

<論 文>

유체의 틈이 있는 정다각형 실린더의 부가질량

金 萬 會* · 金 文 彦** · 趙 榮 錫**

(1984年 10月 4日 接受)

Added Mass of Regular Polygonal Cylinders with Fluid Gap

Man Hoe Kim, Moon Uhn Kim and Hyung Suck Cho

Abstract

Methods for evaluating the added masses of square and hexagonal structures with fluid gap are presented.

For a sufficiently small fluid gap, an analytical expression for the added mass is found using the method of matched asymptotic expansion. Experimental data and numerical results using finite element method are also obtained for various sizes of fluid gap.

It is shown that added masses increase in inverse proportion to the fluid gap as it becomes smaller. Experimental data, theoretical and numerical results are in good agreement.

1. 서 론

보일러, 열교환기의 관 집합체, 원자로의 핵연료봉 집합체 등 많은 발전설비 요소들이 세장보(slender beam)로 구성되어 있으며, 또한 유체 속에 잠겨있다. 이런 구조물들은 유동에 의해 쉽게 진동하게 되며, 지나친 유동관련진동(Flow Induced Vibration)은 구조물을 손상시키게 되고, 특히 원자로에서는 방사능 오염 문제와 관련하여 심하면 작동을 중지시키게 되어 막대한 경제적 손실을 초래하게 된다. 이러한 유동관련진동의 특성을 지배하는 중요한 매개변수 중의 하나는 고유진동수이며, 고유진동수에 대한 유체의 영향은 가상 질량(virtual mass) 또는 부가질량(added mass)을 계

산함으로써 조사할 수 있다⁽¹⁾.

가상질량에 관한 현상은 Dubuat(1776)에 의해 실험적으로 처음 발견되었고⁽²⁾, 그후 Stokes, Lamb, Birk-off, Patton 등에 의해 이론적으로 고찰되었다⁽³⁾. 최근에는 선박의 진동 문제⁽⁴⁾, 송유관의 진동문제⁽⁵⁾ 및 발전설비 요소의 진동 문제^{(6),(7),(8)}등과 관련하여 가상질량을 결정하는 문제가 많이 연구되고 있다.

본 논문에서는 유체의 틈(gap)이 있는 동심 사각형 및 육각형 구조물의 가상질량을 이론적으로 구하고 이를 실험치 및 수치해와 비교 검토한다. 대부분의 원자로의 핵연료봉이 육각 또는 사각형의 통(can)에 넣어져 배열되며, 통 사이의 작은 틈으로 냉각수가 흐르고 있으므로⁽¹⁾ 본 논문은 이러한 경우에 대한 가장 간단한 모델의 하나가 된다. 이론해는 유동을 이차원 포텐셜흐름(potential flow)으로 가정하고, 통 사이의 틈이 작을 때 정합점근 전개(matched asymptotic expansion)의 방법을 써서 근사적으로 구한다. 실험은 구조물

*正會員, 亞洲大學校 工科大学 機械工學科
**正會員, 韓國科學技術院

외팔보로 이상화시켜 틈의 크기를 변화시켜 가면서, 공기 중에서의 물 속에서의 고유진동수 및 감쇠계수를 측정하여 가상질량을 구한다. 수치해는 H. Chung and S.S. Chen의 프로그램⁽¹⁾을 이용하여 유한요소법으로 구한다.

2. 이론해석 및 수학적 전개

실제 유체 내에서 물체의 미소 진동으로 인한 유동은 포텐셜흐름으로 근사시킬 수 있고⁽⁹⁾, 이때 가상질량은 물체의 운동에 의해 야기된 유체의 운동에너지

$$T = -\frac{\rho}{2} \int_s \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M_{ij} = -\rho \int_s \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS \quad (i, j = 1, 3) \quad (1)$$

여기서, n 은 바깥으로 향하는 단위수직벡터이고 적분은 물체의 전 표면에 걸쳐 수행된다. 또, 문제의 선형성으로부터 속도포텐셜 ϕ 를

$$\phi = \sum_{i=1}^3 U_i \phi_i \quad (2)$$

(여기서, U_i 는 물체의 병진속도성분을, ϕ_i 는 각 속도성분에 대한 속도포텐셜을 의미한다)라 두었다. 가상질량에서 M_{ij} 는 시간, 속도 및 가속도에는 무관하고 물체의 모양과 선정된 좌표축에 대한 물체의 방향 및 놓여진 위치에만 관계되는 대칭 텐서이다.

Fig. 1과 같이 유체의 틈을 갖는 동심정다각형 구조물에서 내부 실린더가 단위속도로 진동할 경우, 유동은 속도포텐셜 $\phi(x, y)$ 로 기술된다.

$$\vec{v} = \text{grad} \phi, \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad (3)$$

이때 대칭성을 고려하면,

$$\begin{aligned} \phi(x, -y) &= \phi(x, y) \\ \phi(-x, y) &= -\phi(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

이므로, 속도포텐셜 ϕ 를 구하는때는 제 1상한의 유동만 고려하면 충분하다. 그러나, 본 문제의 유동은 유동함수 Ψ 를 구하는 것이 보다 간단하다. 유동함수 Ψ 는 속도포텐셜 ϕ 와 마찬가지로 이차원의 Laplace 방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 \Psi = 0$$

유동함수 Ψ 가 결정되면 속도포텐셜 ϕ 는 유동함수 Ψ 의 공액조화함수로 쉽게 구해진다. Fig. 2에 Ψ 가 만족할 경계조건을 표시하였다.

Fig. 2와 같이 틈의 크기 ϵ 이 대단히 작을 때 유동은 사각형인 경우에는 영역 I, II, III에서, 육각형의 경우에는 영역 I, II, III, IV에서 그 특성이 각각 다르므

로 각 영역에서의 흐름을 구하고 이를 정합(matching)하여 제 1상한의 전영역에서 성립하는 유동을 구한다. 속도포텐셜 ϕ 가 결정되면, (3)의 대칭성과 식 (1)을 이용하여 가상질량을 계산한다.

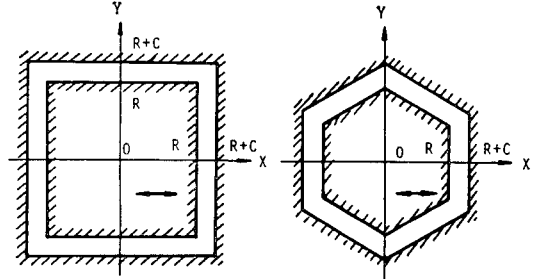


Fig. 1 Two-dimensional models of square and hexagonal cylinders with fluid gap

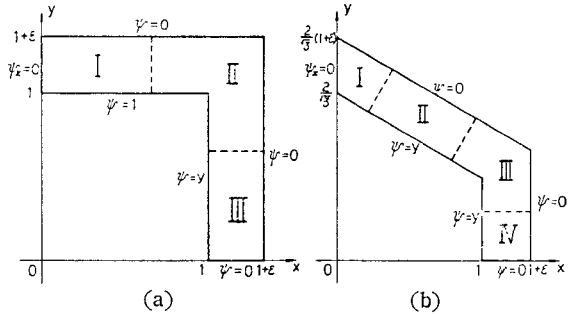


Fig. 2 Flow regions and boundary conditions

2.1. 동심 정사각형 구조물의 가상질량

Fig. 2(a)와 같이 $R=1$ 인 내부 실린더가 x 축과 평행하게 단위속도로 운동하는 경우에 대하여 속도포텐셜을 구하고 가상질량을 결정하자. y 축과 평행하게 움직이는 경우에도 속도포텐셜이 같은 모양으로 구해지므로 임의의 방향의 진동에 대해서도 식 (2)에서 쉽게 속도포텐셜을 얻을 수 있고 따라서 가상질량을 구할 수 있다.

(a) 영역 I

좌표를 매우 작은 ϵ 에 대해 $\bar{x}=x, \bar{y}=(y-1)/\epsilon$ 로 변환하면, 지배방정식과 경계조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\Psi^1_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{\epsilon^2} \Psi^1_{\bar{y}\bar{y}} = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Psi^1 &= 1 & \bar{x} > 0, \bar{y} = 0 \text{에서} \\ \Psi^1 &= 0 & \bar{x} > 0, \bar{y} = 1 \text{에서} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Psi^1_{\bar{x}} = 0 \quad \bar{x} = 0, 0 < \bar{y} < 1 \text{에서}$$

유동함수 Ψ^1 를 ϵ 의 멱급수로 전개하여 식 (5)와 (6)에 대입하여 같은 차수의 ϵ 에 대해 정리하여 풀면,

$$\Psi^1 = 1 - \bar{y} \quad (7)$$

따라서, 영역 I에서의 속도포텐셜 ϕ^I 는 (7)의 공액조화함수이므로

$$\phi^I = -\frac{x}{\varepsilon} \quad (8)$$

로 된다. (8)을 얻는때는 $\bar{y}=(y-1)/\varepsilon$ 과 $x=0$ 에서 $\phi^I=0$ 인 경계조건을 사용하였다.

(b) 영역 II

좌표를 $X=(x-1)/\varepsilon$, $Y=(y-1)/\varepsilon$ 로 확대(Stretching)시킨다. 이때의 지배방정식은

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)\Psi^{II} = 0 \quad (9)$$

경계조건은

$$\begin{aligned} \Psi^{II} &= 1 + \varepsilon Y & X=0, Y < 0 \text{에서} \\ \Psi^{II} &= 0 & X=1, Y < 1 \text{에서} \\ \Psi^{II} &= 1 & X < 0, Y=0 \text{에서} \\ \Psi^{II} &= 0 & X < 1, Y=1 \text{에서} \end{aligned} \quad (10)$$

로 표현된다. 유동함수 Ψ^{II} 를

$$\Psi^{II} = \Psi_0^{II} + \varepsilon \Psi_1^{II} + \varepsilon^2 \Psi_2^{II} + \dots \quad (11)$$

와 같이 ε 의 멱급수로 전개하고, 이를 식 (9)와 (10)에 대입하여 같은 차수의 ε 에 대해 정리한다. Ψ_0^{II} 는 Z-평면 ($Z=X+iY$)을 ζ -평면 ($\zeta=\xi+i\eta$)의 상반평면에 등각사상 시킴으로써 결정할 수 있다. Schwarz-Christoffel 변환을 이용하면, 사상함수는

$$Z = \frac{2}{\pi} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}} - \tanh^{-1} \sqrt{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}} \right] \quad (12)$$

사상평면에서의 지배방정식은

$$\Psi_{\xi\xi}^{II} + \Psi_{\eta\eta}^{II} = 0 \quad (13)$$

경계조건은

$$\begin{aligned} \Psi_0^{II} &= 0 & \xi < 0, \eta = 0 \text{에서} \\ \Psi_0^{II} &= 1 & \xi > 0, \eta = 0 \text{에서} \end{aligned} \quad (14)$$

가 된다. 경계조건 (14)를 만족하는 유동함수 Ψ_0^{II} 는

$$\Psi_0^{II} = 1 - \frac{1}{\pi} \theta, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\xi}{\eta} \right)$$

따라서 속도포텐셜은

$$\phi_0^{II} = -\frac{1}{\pi} \ln |\zeta| + C^{II} \quad (15)$$

로 쓸 수 있다. 여기서 C^{II} 는 결정해야 할 실수상수이다. $\zeta \rightarrow 0$ 일 때 간단한 계산에 의하면 속도포텐셜은

$$\phi_0^{II} \sim -\frac{1}{\pi} \left(\pi X - \frac{\pi}{2} + \ln 2 \right) + C^{II} \quad (15)'$$

로 쓸 수 있다. $\zeta \rightarrow 0$ 는 영역 II의 왼쪽 가장자리로 영역 I의 오른쪽 부분과 겹쳐진다는 사실을 고려하여 (15)로 주어진 ϕ^{II} 와 식 (8)로 주어진 속도포텐셜 ϕ^I 를 정합하면

$$C^{II} = -\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{\pi}$$

를 얻는다. 따라서 영역 II에서의 속도포텐셜은

$$\phi^{II} = -\frac{1}{\pi} \ln |\zeta| - \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{\pi} + O(\varepsilon) \quad (16)$$

임을 알 수 있다.

(c) 영역 III

좌표를 $\bar{X}=(x-1)/\varepsilon$, $\bar{Y}=y$ 로 변환시키면 지배방정식은

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \Psi_{\bar{X}\bar{X}}^{III} + \Psi_{\bar{Y}\bar{Y}}^{III} = 0 \quad (17)$$

경계조건은

$$\begin{aligned} \Psi^{III} &= \bar{Y} & \bar{X}=0, \bar{Y} > 0 \text{에서} \\ \Psi^{III} &= 0 & \bar{X}=1, \bar{Y} > 0 \text{에서} \\ \Psi^{III} &= 0 & 0 < \bar{X} < 1, \bar{Y}=0 \text{에서} \end{aligned} \quad (18)$$

로 표현된다. Ψ^{III} 를 ε 의 멱급수로 전개하여 같은 차수의 ε 에 대해, 정리하여 풀면 유동함수는

$$\Psi^{III} = (1 - \bar{X}) \bar{Y} \quad (19)$$

따라서, 속도포텐셜 ϕ^{III} 는 (19)의 공액조화함수이므로 다음과 같이 구해진다.

$$\phi^{III} = \frac{1}{2\varepsilon} (y^2 - x^2 + 2x) + x + C^{III} \quad (20)$$

여기서 상수 C^{III} 는 $\zeta \rightarrow \infty$ 때의 속도포텐셜 ϕ^{III} 와 정합하여 구한다. ϕ^{III} 를 매우 작은 ε 에 대해 inner variable X, Y 로 전개하면 근사적으로

$$\phi^{III} \sim Y + \frac{1}{\varepsilon} + 1 + C^{III} + O(\varepsilon) \quad (20)'$$

이고, $\zeta \rightarrow \infty$ 일 때 ϕ^{III} 는

$$\phi^{III} \sim Y - \frac{1}{\varepsilon} - 1 + \frac{2 \ln 2}{\pi} + O(\varepsilon) \quad (16)'$$

로 표현된다. 따라서 상수 C^{III} 는

$$C^{III} = -\frac{2}{\varepsilon} - 2 + \frac{2}{\pi} \ln 2$$

가 됨을 알 수 있다. 따라서 영역 III에서의 속도포텐셜은 다음과 같이 표현된다.

$$\phi^{III} = \frac{1}{2\varepsilon} (y^2 - x^2 + 2x - 4) + x + \frac{2 \ln 2}{\pi} - 2 + O(\varepsilon) \quad (21)$$

제 1상한의 모든 영역에서 성립하는 속도포텐셜 ϕ 를 구했으므로, 가상질량 M_H 는 (3)의 대칭성을 고려하면

$$\begin{aligned} M_H &= -\rho \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \\ &= \rho \left[\frac{16}{3\varepsilon} - \frac{8}{\pi} \ln 2 + 4 + O(\varepsilon) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 가상질량계수 C_m 을 가상질량과 내부실린더에 상당하는 유체의 질량의 비로 정의하고, $\varepsilon=C/R$ 을 대입하면

$$C_m = \frac{4}{3} \frac{R}{C} - \frac{2}{\pi} \ln 2 + 1 + O\left(\frac{C}{R}\right) \quad (23)$$

을 얻는다.

2.2. 동심 정육각형 구조물의 가상질량

Fig. 2(b)와 같이 $R=1$ 인 단위체를 생각한다. 사각형의 경우와 마찬가지로 x -방향의 진동에 대한 속도포텐셜을 구하고 가상질량을 결정하기로 한다. 이 경우에도 식 (2)의 중첩원리를 이용하면 임의 방향의 진동에 대한 속도포텐셜의 표현을 쉽게 얻을 수 있다.

(1) 영역 I

좌표를 $X=x/\varepsilon$, $Y=(y-\frac{2}{\sqrt{3}})/\varepsilon$ 로 변환하고 유동장을 Y 축과 대칭이 되게 확장시키면 영역 I에서의 지배방정식은

$$\Psi^{Ixx} + \Psi^{Iyy} = 0 \tag{24}$$

경계조건은

$$\begin{aligned} \Psi^I &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \varepsilon Y & Y &= -\frac{|X|}{\sqrt{3}} \\ \Psi^I &= 0 & Y &= -\frac{|X|}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{25}$$

가 된다. 유동함수 Ψ^I 를 다음과 같이 두고

$$\Psi^I = \Psi_0^I + \varepsilon \Psi_1^I + \varepsilon^2 \Psi_2^I + \dots$$

이를 식 (24)와 (25)에 대입하여 같은 차수의 ε 에 대해 정리한다. 영역 I에서의 흐름을 구하기 위하여 유동장을 Schwarz Christoffel 변환을 이용하여 ζ -평면의 무한상반평면으로 등각사상시킨다. 이때 사상함수는

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2\pi}(\sqrt{3}-i) \left[\sqrt{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{1+2\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^{\frac{2}{3}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \ln \left\{ 1 - \left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right)^{\frac{2}{3}} \right\} + \ln \frac{2\sqrt{\zeta}}{\zeta+1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}-i) \end{aligned} \tag{26}$$

와 같이 주어진다. 반원 $|\zeta|=1$ 은 Y 축에 대응한다. 사상평면에서 유동함수의 제 1차 근사 Ψ_0^I 의 지배방정식은

$$\nabla^2 \Psi_0^I = 0 \tag{27}$$

이고 경계조건은

$$\begin{aligned} \Psi_0^I &= 0 & \xi < 0, 2\xi = 0 \text{에서} \\ \Psi_0^I &= \frac{2}{\sqrt{3}} & \xi > 0, \xi = 0 \text{에서} \end{aligned} \tag{28}$$

이 된다. 따라서 영역 I에서의 속도포텐셜은 $|\zeta|=1$ 때 $\Psi_0^I=0$ 인 경계조건을 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi^I = -\frac{2}{\sqrt{3}\pi} \ln|\zeta| + O(\varepsilon) \tag{29}$$

(b) 영역 II

좌표를 $\bar{X} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y + \frac{2}{\sqrt{3}})$, $Y = \frac{1}{2\varepsilon}(x + \sqrt{3}y - 2)$ 로 변환하면 유동장에 대한 지배방정식은

$$\Psi^{Ixx} + \frac{1}{\varepsilon^2} \Psi^{Iyy} = 0 \tag{30}$$

경계조건은

$$\begin{aligned} \Psi^{II}(\bar{X}, 0) &= -\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\bar{X}}{2} \\ \Psi^{II}(\bar{X}, 1) &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

대단히 작은 ε 에 대하여 유동함수 Ψ^{II} 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \Psi^{II} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\bar{X}}{2} \right) (1 - \bar{Y}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8\varepsilon}(x^2 - y^2) + \frac{xy}{4\varepsilon} - \frac{\sqrt{3}}{2\varepsilon}x - \frac{\sqrt{3}}{4}x \\ &\quad - \frac{y}{2\varepsilon} + \frac{y}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \end{aligned} \tag{32}$$

따라서 속도포텐셜 ϕ^{II} 는

$$\begin{aligned} \phi^{II} &= \frac{1}{8\varepsilon}(x^2 - y^2) - \frac{\sqrt{3}}{4\varepsilon}xy - \frac{x}{2\varepsilon} + \frac{\sqrt{3}}{2\varepsilon}y + \frac{x}{4} \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{4}y + C^{II} \end{aligned} \tag{33}$$

이 되고, 상수 C^{II} 는 동심사각형의 경우와 마찬가지로 방법으로 $\zeta \rightarrow \infty$ 때 영역 I의 속도포텐셜 ϕ^I 와 정합하여 구하면

$$C^{II} = -\frac{5}{6} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) - \frac{4 \ln 2}{\sqrt{3}\pi} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln 3$$

이다. 따라서 영역 II에서의 속도포텐셜은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi^{II} &= \frac{1}{8\varepsilon}(x^2 - y^2) - \frac{\sqrt{3}}{4\varepsilon}xy + \frac{\sqrt{3}}{2\varepsilon}y - \frac{x}{2\varepsilon} + \frac{x}{4} \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{5}{6\varepsilon} - \frac{5}{6} - \frac{4 \ln 2}{\sqrt{3}\pi} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln 3 + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{34}$$

(c) 영역 III

좌표를 $u=(x-1)/\varepsilon$, $v=(y-\frac{1}{\sqrt{3}})/\varepsilon$ 로 변환시키면, 지배방정식은

$$\Psi^{III_{uu}} + \Psi^{III_{vv}} = 0 \tag{35}$$

경계조건은

$$\Psi^{III} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \varepsilon v \quad \left(\begin{matrix} u=0, v < 0 \\ u < 0, v = -\frac{u}{\sqrt{3}} \end{matrix} \right) \tag{36}$$

$$\Psi^{III} = 0 \quad \left(\begin{matrix} u=1, v < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ u < 1, v = -\frac{u}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \end{matrix} \right) \text{에서}$$

로 표현된다. 영역 III에서의 유동장을 ζ -평면의 무한상반평면으로 등각사상시키면 사상함수 $W(=u+iv)$ 는

$$\begin{aligned} W &= -\frac{i}{\pi} \left[\sqrt{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{1+2\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^{\frac{2}{3}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \ln \left\{ 1 - \left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right)^{\frac{2}{3}} \right\} + \ln \frac{2\sqrt{\zeta}}{\zeta+1} \right] + \frac{i}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{37}$$

사상평면에서의 속도포텐셜의 제 1차근사 ϕ_0^{III} 는 다음과 같이 구해진다.

$$\phi_0^{\text{II}} = -\frac{1}{\sqrt{3}\pi} \ln|\zeta| + C^{\text{II}} \quad (38)$$

여기서 상수 C^{II} 는 영역 II의 속도포텐셜과 정합하여 구하면

$$C^{\text{II}} = -\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \ln 2 + \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \ln 3$$

이므로 영역 III에서의 속도포텐셜은

$$\phi^{\text{III}} = -\frac{1}{\sqrt{3}\pi} \ln|\zeta| - \frac{1}{\varepsilon} - \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \ln 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \ln 3 - \frac{1}{2} + O(\varepsilon) \quad (39)$$

로 표현된다.

(d) 영역 IV

영역 IV의 유동은 사각형 경우의 영역 III과 마찬가지로 이므로 속도포텐셜 ϕ^{IV} 는

$$\phi^{\text{IV}} = -\frac{5}{3\varepsilon} - \frac{5}{3} - \frac{8}{\sqrt{3}\pi} \ln 2 + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \ln 3$$

로 쓸 수 있다. 여기서 상수 C^{IV} 는 $\zeta \rightarrow \infty$ 때의 (39)와 정합하여

$$C^{\text{IV}} = -\frac{5}{3\varepsilon} - \frac{5}{3} - \frac{8}{\sqrt{3}\pi} \ln 2 + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \ln 3$$

임을 알 수 있으므로 영역 IV에서의 속도포텐셜은 다음과 같이 표현된다.

$$\phi^{\text{IV}} = \frac{1}{2\varepsilon} (y^2 - x^2 + 2x) + x - \frac{5}{3} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) - \frac{8}{\sqrt{3}\pi} \ln 2 + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \ln 3 + O(\varepsilon) \quad (40)$$

제 1상항의 전 영역에서 성립하는 유동을 구했으므로, 가상질량계수 C_m 은

$$C_m = \frac{10}{9} \frac{R}{C} + \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}\pi} (4\ln 2 - 3\ln 3) + O(\varepsilon) \quad (41)$$

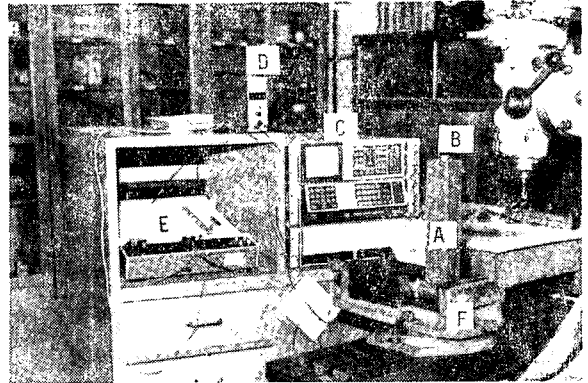
을 얻는다.

3. 실험

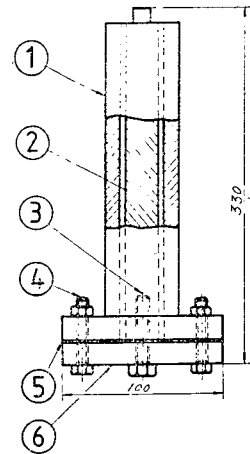
3.1. 실험장치

실험은 외팔보로 모델화하여 실시하였다. 이는 유체의 작은 틈이 있는 구조물의 틈의 크기를 변화시키면서 고유진동수의 측정을 용이하게 한다. 외팔보의 진동모형을 만족시키도록 하기 위하여 Fig. 3(b)와 같이 아크릴봉 ②를 밀판 ⑥에 볼트 ③으로 고정시켰다. 이를 다시 강철용기 ①과 동심이 되도록하여 4개의 볼트 ④로 조립하였다. 그리고, 봉의 회전 및 전단변형을 무시할 수 있도록 봉의 길이를 폭에 비해 대단히 크게 하여(10배 이상) 단순보이론⁽¹⁰⁾을 만족시키게 하였다. 이러한 진동모형을 만족시키는 것을 보이기 위하여 Euler-Bernoulli 보의 고유진동수식으로 계산한 이론치

와 실제로 측정된 고유진동수를 비교한 결과 만족할만한 일치를 보였다(Table 1 참조). 그리고 측방향의 유동을 방지하기 위하여 밀판에 패킹 ⑤를 넣었다. 유체의 틈의 크기는 아크릴봉의 크기 R 을 변화시켜서 조정하였다. 사용된 아크릴봉의 치수와 틈의 크기가 Table 1에 주어졌다. 고유진동수를 측정하기 위해 봉의 자유단에 만든 돌기부분에 가속도계를 부착하였다. 가속도계는 IMV의 공진진동수 2.12KHz, 최대허용가속도 100g인 것을 사용하였다. 사용된 가속도계의 질량은 측정하고자 하는 봉의 질량에 비하여 대단히 작아서(1%미만) 무시하였다. 전체적인 실험장치를 Fig. 3에 도시하였다.



A : Test section B : Accelerometer
 C : FFT analyzer D : Charge amplifier
 E : X-Y recorder F : Fixed vice
 (a) Equipment arrangement for experiment



(b) Test section

Fig. 3 Experimental apparatus

Table 1 Gap ratios and natural frequencies of cantilevered beam

(a) For square cylinders

R (mm)	C (mm)	C/R	Natural frequency, Hz	
			Calculated	Measured
14.0	1.0	0.0714	81.59	75.02
13.4	1.6	0.12	78.67	76.15
13.0	2.0	0.154	75.77	78.13
12.0	3.0	0.25	69.93	68.75
10.0	5.0	0.5	58.28	65.63

(b) For hexagonal cylinders

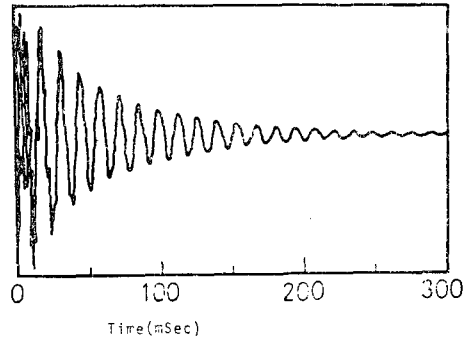
R (mm)	C (mm)	C/R	Natural frequency, Hz	
			Calculated	Measured
14.0	1.0	0.0714	74.49	76.10
13.5	1.5	0.111	72.07	73.85
13.0	2.0	0.154	69.17	68.24
12.0	3.0	0.25	63.84	60.80
10.0	5.0	0.5	53.21	51.84
7.5	7.5	1.0	39.91	40.63

3.2. 실험방법 및 결과

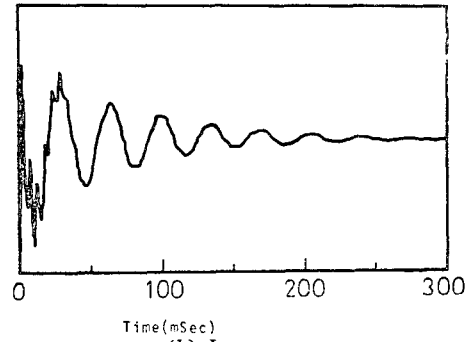
실험은 유체의 틈의 크기를 변화시켜가면서 공기 중
에서와 물 속에서 행하였다. 주어진 틈의 크기에 대하
여 봉의 돌기부분에 충격을 가하여 가속신호(accelera-
tion signal)를 얻었다. 이 신호를 신호분석기(FFT
analyzer)로 Fourier 변환시켜 고유진동수를 측정하였
다. 신호분석기에 기록된 가속신호와 동력스펙트럼
(power spectrum)이 Fig. 4와 Fig. 5에 주어졌다. 가
상질량은 측정된 고유진동수로 부터 감쇠가 없다고 가
정하여 다음과 같이 구한다⁽¹¹⁾.

$$M_H = m \left[\left(\frac{N_a}{N_f} \right)^2 - 1 \right] \tag{42}$$

여기서, m 은 봉의 질량, N_a 와 N_f 는 각각 공기 중
에서와 물 속에서의 동일 모드(mode)에 대한 고유진
동수이다. 가상질량에 대한 감쇠의 영향을 조사하기
위해 제 1차 모드(first mode)에 대한 감쇠계수를 Fig.
4의 가속신호로 부터 대수감소율을 써서 구했다. 육
각형($C/R=0.154$)의 경우 공기 중에서의 감쇠계수는
0.032였는데 이는 봉의 재료감쇠 및 볼트로 지지된 부
분에서의 에너지 손실에 의한 것으로 생각된다. 그리
고 물 속에서의 감쇠계수는 0.088이었다. 이 경우에
감쇠를 고려한 가상질량계수는 감쇠를 무시한 경우보

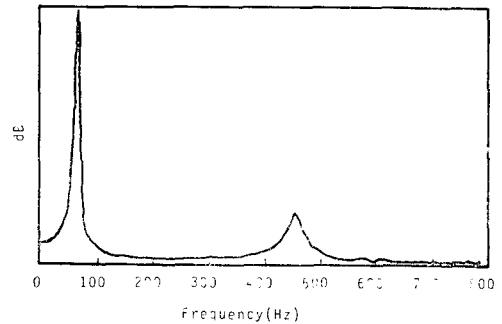


(a) In air

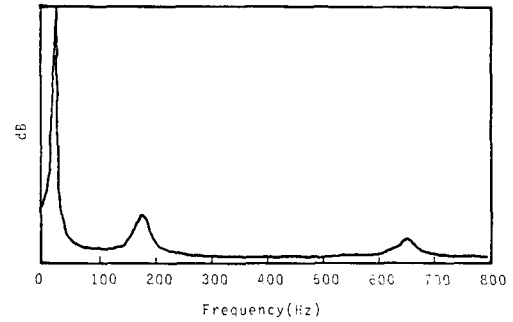


(b) In water

Fig. 4 Acceleration signal (For hexagonal cylinder, $C/R=0.154$)



(a) In air



(b) In water

Fig. 5 Power spectrum (For hexagonal cylinder $C/R=0.154$)

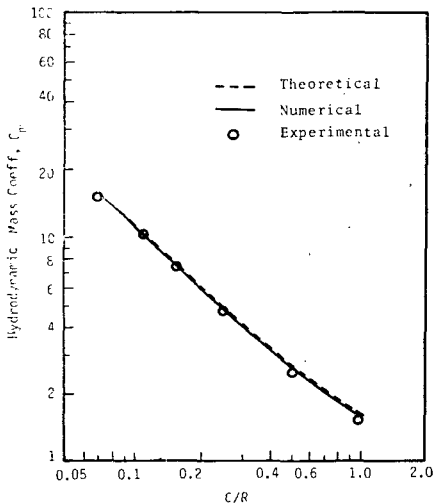
다 0.7% 더 크게 나왔는데 이로 인한 가상질량계수의 변화는 무시할 수 있다. 고유진동수는 제 1차 모드와 제 2차 모드를 측정했는데, 각각의 모드로 계산한 가상질량은 0.4~5% 정도의 차이가 있었다.

4. 결과 및 고찰

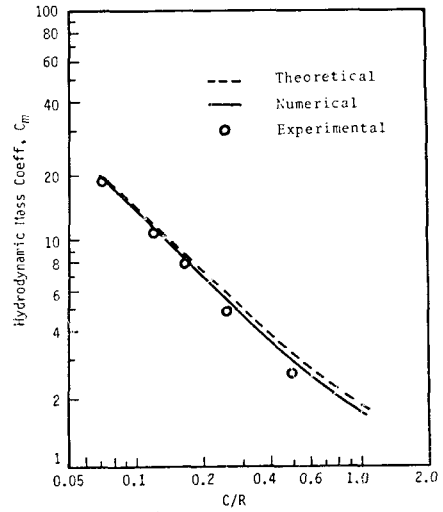
튜브의 크기 C 와 실린더의 크기 R 의 비 C/R 에 대한 실험결과를 Fig. 6에 이론치 및 수치해와 비교하여 도시하였다.

수치해는 육각형의 경우에는 H. Chung and S.S. Chen이 유한요소법으로 계산한 값을 이용했고⁽²⁾, 사각형의 경우는 이를 참고로 하여 계산하였다. 사용된 요소는 삼각형이고 코너부분에서의 경계특이성(boundary singularity)을 제거하기 위해 코너부분에서는 mesh를 세밀하게 나누었다. 요소의 수는 $C/R=1$ 일 때 48개이고 C/R 이 작아짐에 따라 증가시켰다.

이론치, 실험치 및 수치해는 모두 잘 일치하였다. 이런 결과로부터 튜브의 길이와 폭과의 비를 대단히 크게 하고 축방향의 유동을 방지하면 이차원 유동의 가정이 잘 맞음을 볼 수 있었고, 가상질량은 튜브의 크기 C/R 에 반비례하여 증가하였다. 따라서 튜브의 크기가 대단히 작을 때 가상질량은 매우 커지므로 유체의 튜브 있다는 것은 구조물의 진동현상에 큰 영향에 미칠 수 있다는 것을 알 수 있다.



(a) For square cylinders



(b) For hexagonal cylinders

Fig. 6 Hydrodynamic mass coefficient, C_m as a function of C/R

References

- (1) H. Chung and S.S. Chen, "Design Guide for Calculating Hydrodynamic Mass, Part 2; Noncircular Cylindrical Structures" ANL-CT-78-49, 1978
- (2) G. Birkoff, "Hydrodynamics" Princeton University Press, 1960
- (3) R.J. Fritz, "The Effects of Liquid on the Dynamic Motions of Immersed Solids" Trans. of ASME, J. of Engineering for Industry, Vol. 94, pp. 167~173, 1972
- (4) K.J. Bai, "The Added Mass of 2-D Cylinders Heaving in Water of Finite Depth" J. Fluid Mechanics, Vol. 81, pp. 85~105, 1977
- (5) Eduard Naudascher, "Flow Induced Structural Vibrations" Springer-Verlag, 1974
- (6) M.K. Au-Yang, "Flow Induced Vibrations of Power Plant Components" ASME Special Publications, 1980
- (7) H. Tomita and Y. Sasaki, "Analysis of Vibration of a Group of Rods in a Fluid by Approximation of Flow-path Network, Report I" Bulletin of JSME Vol. 27, pp. 956~964, 1984
- (8) H. Tomita, "Analysis of Vibration of a Group

- of Rods in a Fluid by Approximation of Flow-path Network, Report II" Bulletin of JSME, Vol. 27, pp. 965~973, 1984
- (9) Batchelor, G.K., "An Introduction to Fluid Mechanics" Cambridge University Press, 1967
- (10) L. Meirovitch, "Elements of Vibration Analysis" McGraw-Hill Book Company, 1975
- (11) S.S. Chen, M.W. Wambsgans, and J.A. Jendrzeczyk, "Added Mass and Damping of a Vibrating Rod in Confined Viscous Fluids" Trans. of ASME, J. of Applied Mechanics, Vol. 43, pp. 325~329, 1976