

<論 文>

등온 수평 평판 위를 지나는 층류유동의
열적 불안정성 및 열전달 상관관계

박병완* · 유정열** · 최창균*** · 노승택**

(1985년 7월 2일 접수)

Thermal Instability and Heat Transfer Correlations of Laminar Flow
over Isothermal Horizontal Flat Plate

P. Park, J.Y. Yoo, C.K. Choi and S.T. Ro

Key Words: Thermal Instability(熱的 不安定性), Heat Transfer Correlations(熱傳達 相關關係), Blasius Flow(블라시우스 流動)

Abstract

An analysis on the thermal instability of horizontal Blasius flow in the form of longitudinal vortices has been carried out by introducing the 3-dimensional spatial dependence of the disturbance quantities. The stability problem has been simplified significantly by considering the limiting case of infinite Prandtl number and by skilfully replacing the boundary conditions at infinity with the interface conditions at the edge of the thermal boundary layer (or by simply confining the thermal disturbances in the thermal boundary layer).

The advantage of this approach is that the critical values marking the onset of thermal instability can be readily obtained as solutions of the eigenvalue problems formulated by a 6×6 (or a 5×5) determinant. Present analysis provides reasonable explanations on the existing experimental and theoretical data. Especially, the heat transfer correlation based on the present analysis agrees well with the existing experimental data.

기 호 설 명

a	: 파수(wave number)	Pr	: Prandtl 수($=\kappa/\nu$)
Gr_x	: 국소 Grashof 수($=g\beta\Delta T x^3/\nu^2$)	Ra	: Rayleigh 수($=g\beta\Delta T \delta_T^3/\kappa\nu$)
g, g	: 중력가속도	Ra_x	: 국소 Rayleigh 수($=g\beta\Delta T x^3/\kappa\nu$)
Nu_x	: 국소 Nusselt 수	Re_x	: 국소 Reynolds 수($=U_\infty x/\nu$)
P, P_b	: 압력, 기본압력	T, T_b	: 온도, 기본온도
		U_b, W_b	: 기본속도성분
		u	: 속도벡터
		u, v, w	: 속도성분
		u', v', w'	: 교란속도성분
		\tilde{w}	: z 방향속도 교란의 진폭

* 서울대학교 대학원 기계공학과

** 정회원, 서울대학교 공과대학 기계공학과

*** 서울대학교 공과대학 화학공학과

x, y, z	: 직각좌표계
β	: 열팽창계수
∂_H, ∂_T	: 속도경계층, 온도경계층
$\theta', \bar{\theta}$: 온도교란, 온도교란의 진폭
κ	: 열확산계수
ν	: 동점성계수
ρ	: 밀도

1. 서 론

밀도로부터 일정한 온도로 가열되는 수평 Blasius 유동에서 길이방향 와동이 발생하는 현상은 Wu와 Cheng⁽¹⁾에 의하여 최초의 이론적인 해석이 이루어진 이래 많은 관심의 대상이 되고 있다. 그러나, 지금까지 대부분의 연구^(2,3)에서는 선형안정성 해석을 수행함에 있어서 비평행 또는 평행유동으로 표현되는 기본유동장에다 유동방향 좌표에 의존하지 않는 교란 양을 중첩시켰다. 이와 같은 교란 양의 선택은 다소 임의적인 것으로서, 본 연구에서는, 가열되는 경사진 평판에 의하여 유도되는 층류 자연대류 유동의 안정성 해석을 수행한 Iyer와 Kelly⁽⁴⁾에서와 같이, 유동 방향을 포함한 3방향에 모두 의존하는 교란 양을 고찰하기로 한다. 또한 이와 같은 새로운 개념의 유효성을 검토하기 위하여, 우선 이 연구에서는 경계층 이론에서와 같은 길이척도 및 $Pr \rightarrow \infty$ 의 극한 경우의 크기 위수 해석등을 도입함으로써 단순화된 안정성 방정식을 사용할 것이다. 본 연구와 관련된 여러 다른 연구에서 Prandtl 수가 증가함에 따라 임계 Rayleigh 수와 그에 상응하는 임계파수는 Prandtl 수에 약하게 의존한다는 실험들이 참고문헌 (3)과 (5)에서 이미 토의되었으므로 이는 그대로 받아들여질 수 있는 타당한 가정인 것이다.

한편, 경계층 외부의 자유유동 구역에서의 교란의 경계조건을 표시하는데 흔히 따르는 어려움을 극복하고자 무한대에서의 경계조건을 온도경계층 가장자리에서의 조건으로 대치시키는 방법을 사용하거나, $Pr \rightarrow \infty$ 의 극한 경우에 온도교란은 온도경계층에 한정된다는 이른바 *bottling* 효과^(6,7)의 가정을 채택한다. 이 접근방법의 장점은 불안정성의 발생조건을 규정하는 임계치들이 6×6 (또는 5×5) 행렬식으로 이루어지는 고유치문제의 해로서 간단히 구하여 진다는 것이다.

본 연구의 목적은 수평 Blasius 유동의 열적 불안정성 문제에서 유동방향 좌표에도 의존하는 교란양을 최초로 도입함으로써 보다 합리적인 안정성 해석을 수행하고 그 결과를 기존의 실험적 및 이론적인 자료들과

비교하며 이를 토대로 한 보다 실제적인 열전달 상관관계를 얻고자 하는데 있다.

2. 선형안정성 해석

일정한 온도 T_w 로 유지되는 수평 평판 위를 지나 는 자유유동 속도가 U_∞ 이고 자유유동 온도가 T_∞ 인 정상층류 경계층 유동의 열적 불안정성 문제를 고찰하고자 한다. 점성에 의한 에너지 소산은 무시되고, Boussinesq 근사에 따라 밀도변화가 부력에 기여하는 경우만을 제외하고는 유체의 성질은 일정하다고 가정한다. 그러면 이 문제의 출발점은 Fig. 1에 보여진 좌표계에 관한 다음의 방정식들이다.

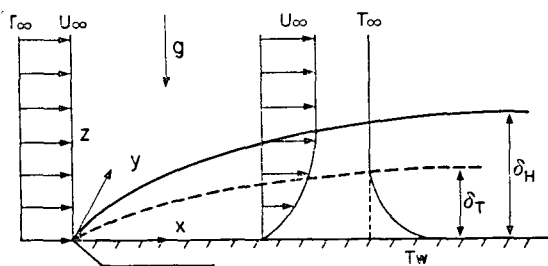


Fig. 1 Schematic diagram of the basic flow field

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - g\beta(T - T_\infty) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (3)$$

기본 유동장은 층류 강제 대류유동으로서 잘 알려진 Blasius의 속도분포와 Pohlhausen의 온도분포로 나타낼 수 있다. 선형 안정성 해석을 위하여 이와 같은 기본 양들에 무한소의 교란들이 중첩된 섭동된 유동을 고찰한다.

종전까지의 연구에서는^(1,2,3) 유동방향 좌표에 의존하지 않는 교란양을 가정하였는데, 이것은 참고문헌 (6)에 상세히 설명된 자연대류유동의 열적 불안정성 문제에 근원을 두고 있다. 그러나 본 연구에서는 강제 및 혼합대류 유동의 열적불안정성 발생점에서 교란양이 유동방향 좌표에도 의존한다는 가정하에 해석을 수행하고자 다음과 같은 형태의 섭동된 유동을 고찰한다.

$$u = U_b(x, z) + u'(x, y, z)$$

$$v = v'(x, y, z)$$

$$w = W_b(x, z) + w'(x, y, z)$$

$$T = T_b(x, z) + \theta'(x, y, z)$$

$$P = P_b(x, z) + P'(x, y, z)$$

통상적인 선형 안정성 해석의 절차에 따라 이 양들을

식(1), (2), (3)에 대입하고 기본 유동에 의하여 만족되는 부분과 비선형항들을 제하면 안정성 방정식들이 얻어진다. 이 방정식들에 경계층 이론에서와 같은 길이 척도의 개념, 즉,

$$x \gg 0(\delta_T, \delta_H)$$

을 도입하고, 매우 큰 Prandtl 수에 대하여는 편성항들을 무시할 수 있다는 사실⁽³⁾을 기억하면, 다음과 같은 4개의 방정식들이 얻어진다.

$$\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \nabla^2 v' = 0, \quad (5)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \nabla^2 w' + g\beta\theta' = 0, \quad (6)$$

$$U_b \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \frac{\partial T_b}{\partial z} + W_b \frac{\partial \theta'}{\partial z} = \kappa \nabla^2 \theta'. \quad (7)$$

여기서, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 을 나타낸다.

$\frac{\partial^2(5)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2(6)}{\partial y^2}$ 의 계산을 수행함으로써 식(5)와 (6)

으로부터 p' 을 소거하고, 식(4)를 사용하여 v' 을 소거하면, 안정성 문제는 다음과 같은 2개의 방정식들로 축소된다.

$$\nu \nabla^2 \nabla^2 w' + g\beta \frac{\partial^2 \theta'}{\partial y^2} = 0, \quad (8)$$

$$U_b \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \frac{\partial T_b}{\partial z} + W_b \frac{\partial \theta'}{\partial z} = \kappa \nabla^2 \theta'. \quad (7)$$

교란 양들은 불안정성 발생점에서 y 방향으로 주기적인 구조를 가지게 됨으로 다음과 같은 정규형식으로 표시한다.

$$w(x, y, z) = \tilde{w}(x, z)e^{i\alpha y} \quad (9)$$

$$\theta'(x, y, z) = \tilde{\theta}(x, z)e^{i\alpha y} \quad (10)$$

교란의 진폭 $\tilde{w}(x, z)$ 와 $\tilde{\theta}(x, z)$ 에 대하여는 기본유동장의 열경계층 두께 $\delta_T(x)$ 를 특성길이로 하는 상사파라미

터 $\zeta = z/\delta_T(x)$ 를 도입하여 상사해를 구하도록 한다⁽⁴⁾ 따라서 다음과 같은 무차원 변수들을 사용한다.

$$(\bar{y}, \zeta) = \frac{1}{\delta_T(x)} (y, z)$$

$$\bar{w}(\zeta) = \frac{\tilde{w}(x, z)}{\kappa} \frac{\delta_T}{\delta_T}$$

$$\bar{\theta}(\zeta) = \frac{\tilde{\theta}(x, z)}{\Delta T}$$

$$\bar{a} = a\delta_T$$

$$(\bar{U}_b, \bar{W}_b) = \frac{\delta_T}{\kappa} (U_b, W_b)$$

$$\bar{\theta}_b = \frac{T_b - T_\infty}{\Delta T}$$

여기서 $\Delta T = T_b - T_\infty$ 이다.

그러면, 식(8)과 (7)은 다음과 같이 무차원화 된다.

$$(\bar{D}^2 - \bar{a}^2)\bar{w} - Ra\bar{a}^2\bar{\theta} = 0, \quad (11)$$

$$(\bar{D}^2 - \bar{a}^2)\bar{\theta} + (-\delta_T \frac{\partial \zeta}{\partial x} \bar{U}_b - \bar{W}_b)\bar{D}\bar{\theta} = \bar{w}\bar{D}\bar{\theta}_b. \quad (12)$$

여기서, $\bar{D}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \zeta}$ 를 나타낸다. 위의 상미분 방정

식(11)과 (12)의 해를 구하는데 있어서는 기본유동장에 대한 정보가 요구되는데, 본 연구에서는 이들에 대한 엄밀해를 사용하는 대신에 경계층해석의 근사방법에서 채택되는 다항식들을 사용하도록 한다. Table 1에는 3차다항식*으로 표시된 \bar{U}_b , $\bar{\theta}_b$ 및 4차다항식으로 표시된 \bar{W}_b 가 주어져 있다.

이와 같은 기본속도장에 대한 3차(또는 4차) 근사다항식의 잇점은 식(12)의 좌변의 둘째항의 계수가

$$-\delta_T \frac{\partial \zeta}{\partial x} \bar{U}_b - \bar{W}_b = A\zeta^2 \quad (A \text{는 상수}) \quad (13)$$

의 형태로 되어 매우 간단해지며, 다음절에서 소개하고자 하는 멱급수 해법을 적용할 수 있게 하는 것이다. 식(13)을 식(12)에 대입한 후에, 식(11)과 (12)로부터 $\bar{\theta}$ 를 소거하면

Table 1 Approximating polynomials used to represent the basic quantities in the integral method of boundary layer analysis and corresponding boundary layer thicknesses, where $\zeta_H = \frac{z}{\delta_H}$ and

$$\zeta = \frac{z}{\delta_T}$$

U_b/U_∞	$(T_b - T_\infty)/\Delta T$	$\frac{\delta_H}{x} \sqrt{Re_x}$	δ_T/δ_H	$\frac{W_b}{U_\infty} \sqrt{Re_x}$
$\frac{3}{2}\zeta_H - \frac{1}{2}\zeta_H^3$	$1 - \frac{3}{2}\zeta + \frac{1}{2}\zeta^3$	4.64	$Pr^{-1/3}$	$1.74(\zeta_H^2 + \frac{1}{2}\zeta_H^4)$

* 물론 3차 다항식 대신에 4차 다항식을 사용할 수도 있는데⁽⁵⁾, 해석결과에는 큰 영향을 미치지 않을 것이므로 3차 다항식만에 대하여 토의하기로 한다.

$$(D^2 + A\zeta^2 D - a^2)(D^2 - a^2)^2 w = a^2 R a \bar{w} D \theta, \quad (14)$$

로 되는데 앞으로는 무차원변수 위의 “-”를 사용하지 않기로 한다. 이제 $\zeta \leq 1$ 에 대하여 $w = w_i(\zeta)$, $\zeta > 1$ 에 대하여 $w = w_0(\zeta)$ 로 표시하면, 온도경계층의 정의로부터 식 (14)는 다음과 같이 나뉘어져서 쓰여질 수 있다.

$$\zeta \leq 1 \text{에 대하여,} \quad (D^2 + A\zeta^2 D - a^2)(D^2 - a^2)^2 w_i = a^2 R a w_i D \theta, \quad (15)$$

$\zeta > 1$ 에 대하여,

$$(D^2 + A\zeta^2 D - a^2)(D^2 - a^2)^2 w_0 = 0. \quad (16a)$$

또한, 경계조건들은 다음과 같은 형태로 주어진다 :

$$\zeta = 0 \text{에서 } w_i = D w_i = (D^2 - a^2)^2 w_i = 0, \quad (17)$$

$$\zeta = 1 \text{에서 } D^n w_i = D^n w_0 (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \quad (18a)$$

$$\zeta \rightarrow \infty \text{에 따라 } w_0 = D w_0 = (D^2 - a^2)^2 w_0 = 0 \quad (19a)$$

만일 bottling 효과, 즉, 불안정성 발생점에서 온도 교란이 열경계층내에 한정되는 현상이 존재한다고 가정하면 $\zeta > 1$ 에 대하여 $\theta = 0$ 로 놓을 수 있으므로 안정성 방정식과 경계조건은 다음과 같이 쓰여진다 :

$\zeta \leq 1$ 에 대하여,

$$(D^2 + A\zeta^2 D - a^2)(D^2 - a^2)^2 w_i = a^2 R a w_i D \theta, \quad (15)$$

$\zeta > 1$ 에 대하여,

$$(D^2 - a^2)^2 w_0 = 0, \quad (16b)$$

$$\zeta = 0 \text{에서 } w_i = D w_i = (D^2 - a^2)^2 w_i = 0, \quad (17)$$

$$\zeta = 1 \text{에서 } D^n w_i = D^n w_0 (n = 1, 2, 3, 4), \quad (18b)$$

$$\zeta \rightarrow \infty \text{에 따라 } w_0 = D w_0 = 0. \quad (19b)$$

한편, (7)식으로 되돌아 가서 기본유동을 비평행 ($W_b \neq 0$) 또는 평행 ($W_b \equiv 0$)으로 가정함에 따라 두가지 경우로 나누어 생각할 수 있고, 그 각각에 대하여 식(9)와(10)에서와 같이 교란양들이 x 에도 의존한다고 가정하거나 또는 종전까지의 연구^(1,2,3)에서와 같이 교란양들이 x 로부터 독립적이라고 가정함으로써, 비가지의 경우를 교환할 수 있다. 그러므로 앞서의 교란양들에 대한 bottling 효과를 고려하는 가의 여부에 따라서는 모두 여덟가지의 경우로 나누어 안정성 해석을 수

Table 2 The values of parameter A for various cases

Case	Value of A
A1, B1	8.0736
A2, B2	16.1472
A3, B3	-8.0736
A4, B4	0

행할 수 있다. 이와같은 여러 경우에 대하여 식(13)~(16)에서의 A는 각각 다른값을 가지게 되는데, Table 2에 그 값들이 주어진다.

여기서 기호 “A”는 bottling 효과를 고려하지 않는 경우, 기호 “B”는 bottling 효과를 고려하는 경우를 나타내며, 첨자 “1”은 비평행기본 유동 및 x 방향의 도함수를 가지는 교란양, “2”는 평행기본유동 및 x 방향의 도함수를 가지는 교란양, “3”은 비평행 기본 유동 및 x 로부터 독립적인 교란양, “4”는 평행 기본유동 및 x 로부터 독립적인 교란양의 경우를 각각 가리킨다.

3. 해 법

이제 상미분방정식(15)의 계수가 ζ 에 관한 다항식의 형태이므로 $\zeta \leq 1$ 에 대하여는 잘 알려진 멱급수 해법⁽⁸⁾을 이용하여 다음과 같은 형태의 해를 구할 수 있다 :

$$w_i = \sum_{j=0}^5 C_j f_j(\zeta).$$

여기서 C_j 는 임의의 상수들이며, $f_j(\zeta)$ 는 급속히 수렴하는 멱급수들이다 :

$$f_j(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} (Ra, a) \zeta^n, \quad (j=0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

급수의 계수들은 $n \leq 5$ 에 대하여는 다음과 같이 규정될 수 있으며,

$$b_{-3}^{(j)} = b_{-2}^{(j)} = b_{-1}^{(j)} = 0,$$

$$b_n^{(j)} = \delta_{nj} \quad (n=0, 1, 2, 3, 4, 5),$$

$n \geq 6$ 에 대하여는 식(15)로부터 순환공식에 따라서 보다 낮은 차수의 계수들에 관하여 다음과 같이 결정될 수 있다.

$$b_n^{(j)} = \left[3a^2(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)b^{(j)}_{n-2} - A(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)b^{(j)}_{n-3} - 3a^4(n-4)(n-5)b^{(j)}_{n-4} + 2Aa^2(n-5)(n-6)(n-7)b^{(j)}_{n-5} + \left(a^2 + \frac{3}{2}a^2 Ra\right)b^{(j)}_{n-6} - a^4 A(n-7)b^{(j)}_{n-7} + \frac{3}{2}a^2 Ra b^{(j)}_{n-\infty} \right] / \{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\}.$$

상수들 $C_j (j=0, 1, 2, 3, 4, 5)$ 는 경계조건을 만족시키도록 결정되는데, $\zeta=0$ 에서의 경계조건으로 부터는 다음을 얻는다.

$$C_0 = C_1 = 0, \quad C_4 = \frac{a^2}{6} C_2. \quad (20)$$

그러므로 w_i 는 다음과 같이 쓰여진다.

$$w_i = C_2 \left(f_2 + \frac{a^2}{6} f_4 \right) + C_3 f_3 + C_5 f_5. \quad (21)$$

$\zeta > 1$ 에 대하여는, 우선 bottling 효과를 가정하지 않는 경우에는 식(16a)와 (19a)를 만족시키는 해를 구하여야 하는 데, 식(16a)는 다음과 같이 나누어서 고찰하기로 한다 :

$$(D^2 + A\zeta^2 D - a^2) Y = 0, \quad (22)$$

$$(D^2 - a^2)^2 w_0 = Y. \quad (23)$$

식(19a)의 세번째조건, 즉, $\zeta \rightarrow \infty$ 에 따라 $Y \rightarrow 0$ 인 조건을 만족시키는 식(22)의 해는 WKB 근사법¹⁹⁾에 의하여 구할 수 있다.

$$Y \sim \exp \left[-\frac{A}{6} \zeta^3 - \int_1^{\zeta} \sqrt{\frac{A^2}{4} - \zeta^4 + A\zeta + a^2} d\zeta \right] / \left(\frac{A^2}{4} \zeta^4 + A\zeta + a^2 \right)^{1/4}.$$

이 식으로부터 $Y(1)$ 및 $Y'(1)$ 의 값을 계산할 수 있는데, 이 값들은 $\zeta \rightarrow \infty$ 에서의 식(22)의 점근해¹⁹⁾로부터 수치적으로 구한 값들과도 일치한다. 이것은 또한 $\zeta \rightarrow \infty$ 에서의 경계조건을 $\zeta=1$ 에서의 초기조건들로 바꾼 것이라고도 볼 수 있다. 따라서 $t = \zeta - 1$ 의 변수 변환을 사용하여 $t=0$ 근처에서 식(22)의 해를 멱급수해법으로 찾아낸 다음, 식(23)을 연산자 기법¹¹⁾으로 풀면 다음과 같다 :

$t = \zeta - 1 = 0$ 근처에서

$$w_0 = C_6 [e^{at} e(t) - e^{-at} g(t)] / 4a^2 + C_7 e^{-at} + C_8 t e^{-at}. \quad (24a)$$

여기서 함수 $e(t)$ 와 $g(t)$ 는 다음과 같은 멱급수들이다

$$e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{(n+1)(n+2)} t^{n+2} - \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{n+1} t^{n+1},$$

$$e_n = -[(A+2a)(n-1)e_{n-1} + A(2n-4+a)e_{n-2} + A(n-3+2a)e_{n-3} + Aa e_{n-4}] / n(n-1),$$

$$e_{-1} = e_{-2} = 0,$$

$$e_0 = Y(1),$$

$$e_1 = Y'(1) - aY(1),$$

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{(n+1)(n+2)} t^{n+2} + \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{n+1} t^{n+1},$$

$$g_n = -[(A-2a)(n-1)g_{n-1} + A(2n-4-a)g_{n-2} + A(n-3-2a)g_{n-3} - Aag_{n-4}] / n(n-1),$$

$$g_{-1} = g_{-2} = 0,$$

$$g_0 = Y(1),$$

$$g_1 = Y'(1) + aY(1).$$

한편 $\zeta > 1$ 에 대하여 bottling 효과를 가정하는 경우에는 식(16b)와 (19b)로부터 간단한 형태의 엄밀해가 얻어지는데, 여기서도 $t = \zeta - 1$ 의 변수변환을 사용하면 다음과 같이 표현된다 :

$t = \zeta - 1 = 0$ 근처에서

$$w_0 = C_6 e^{-at} + C_7 t e^{-at}. \quad (24b)$$

이제 bottling 효과를 가정하지 않는 경우에는 식(21)과 (24a) 및 경계조건(18a)로부터 다음과 같은 6×6 행렬식이 얻어진다.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -(f_2 + a^2/6 f_4) & -f_3 & -f_5 \\ 0 & -a & 1 & -(f_2' + a^2/6 f_4') & -f_3' & -f_5' \\ 0 & a^2 & -2a & -(f_2'' + a^2/6 f_4'') & -f_3'' & -f_5'' \\ 0 & -a^3 & 3a^2 & -(f_2''' + a^2/6 f_4''') & -f_3''' & -f_5''' \\ Y & a^4 & -4a^3 & -(f_2^{iv} + a^2/6 f_4^{iv}) & -f_3^{iv} & -f_5^{iv} \\ Y' & -a^5 & 5a^4 & -(f_2^v + a^2/6 f_4^v) & -f_3^v & -f_5^v \end{vmatrix} = 0 \quad (25) \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ a, b) \\ \zeta=1 \end{matrix}$$

여기서 프라임은 ζ 에 관한 미분을 표시한다. 또한 bottling 효과를 가정하는 경우에는 식(21)과 (24b) 및 경계조건(18b)로부터 점선 내부의 원소들만으로 된 5×5 행렬식이 얻어진다. 방정식(25)는 고유치문제로서, 개별적인 a 의 값에 대하여 이 식을 만족시키는 Ra 의 값이 고유치로서 계산될 수 있음을 알 수 있다. Ra 에 a 의 도표, 즉 안정성 곡선이 얻어지면 Ra 의 최소치가 찾아질 수 있으며, 이 최소 고유치 및 대응하는 파수는 불안정성의 발생에 해당하는 임계치이다.

4. 결과 및 토의

Fig. 2에는 Case A1의 경우에 대하여 불안정성의 발생점에서 각 교란 양들의 최대치를 기준으로 한 분포가 나타나 있다. 온도 교란의 분포에 대하여 bottling 효과의 가정을 적용하지 않았는데도, 온도 교란은 대체로 온도 경계층 내에 한정되는 것을 볼 수 있다. 따라서 bottling 효과는 매우 타당한 가정이라고 판단된다.

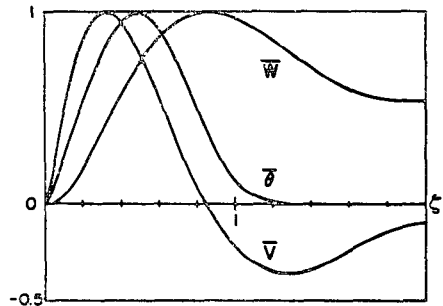


Fig. 2 Distributions of the normalized perturbation quantities at the onset of longitudinal vortices for the case A1

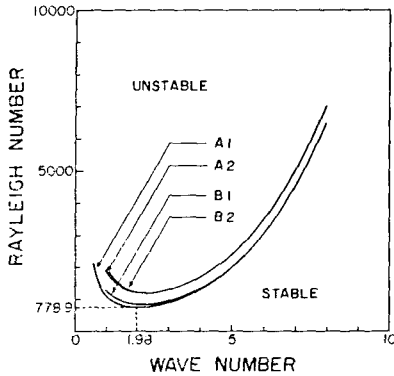


Fig. 3 Neutral stability curves for different cases

Table 3 Critical values under various assumptions

Case	a_c	Ra_c	$Gr_x/Re_x^{1.5}$
A 1	1.98	778.9	7.797
A 2	2.23	1194.5	11.957
B 1	2.08	872.7	8.736
B 2	2.26	1231.1	12.324
B 3 ⁽³⁾	1.76	438	4.38
B 4 ⁽³⁾	1.88	584	5.85

Fig. 3에는 x 방향의 도관수를 가지는 교란 양을 가정한 비까지 경우에 대한 중립안정성 곡선들이 주어져 있다. 이 곡선들로부터 구하여진 임계 Rayleigh 수 Ra_c 와 이에 상응하는 임계파수 a_c 및 부력매개변수 $Gr_x/Re_x^{1.5}$ 가 기존의 결과⁽³⁾와 함께 Table 3에 주어져 있다. 이 표에 나타나 있지 않은 Case A 3 및 A 4의 경우에는 해가 존재하지 않는다. 실제로 Case A 3는 Table 2에서 볼 수 있듯이 A 의 값이 음수이므로 이 경우에는 $\zeta \rightarrow \infty$ 에 따라 $Y \rightarrow 0$ 인 조건을 만족시키는 식(22)의 해를 구할 수 없으며, Case A 4는 임계 파수가 0이 되므로 물리적 현상에 맞지 않는 경우이다.

그러므로, x 좌표에 의존하지 않는 교란 양을 가정하는 재래적인 안정성 해석들은 재검토되어야 한다는 것을 알 수 있다.

비평행 및 평행 기본유동 모형에 대한 Ra_c 및 $Gr_x/Re_x^{1.5}$ 의 값들을 비교하면, 전자(Case A 1, B 1)가 후자(Case A 2, B 2)보다 더 낮은 값들을 나타내는 것을 알 수 있다. 이것은 기본 평류속도 성분 W_b 의 송출효과로 인한 것으로 판단된다. 즉, 비평행 기본 유동 모

형의 경우에는 W_b 의 존재로 인하여 온도 경계층이 더 쉽게 파괴됨으로써 유동장이 더 불안정하게 되기 때문이다.

한편, bottling 효과를 가정할 때, 교란양이 x 좌표에 의존하는 경우(Case B 1, B 2)와 x 로부터 독립적인 경우(Case B 3, B 4)를 비교하면, 전자가 후자보다 더 안정한 값들을 나타낸다. 이것은 전자의 경우 식(7)에서 x 이송항, 즉 $U_b \frac{\partial \theta'}{\partial x}$ 의 존재로 인하여 온도경계층을 파괴하려는 열교란양 θ' 이 유동방향으로 이송됨으로써 유동을 안정화시키기 때문이다.

Fig. 4에는 본 해석과 이형인등⁽³⁾의 해석 및 유한한 Pr 에 관련된 기존의 연구 결과 등이 비교되었다. 서론에서 언급된 바와 같이 $Pr \geq 6$ 의 경우에는 임계치들이 거의 Pr 에 무관하다는 것이 알려져 있으므로 이와 같은 비교는 충분히 타당한 것이다.

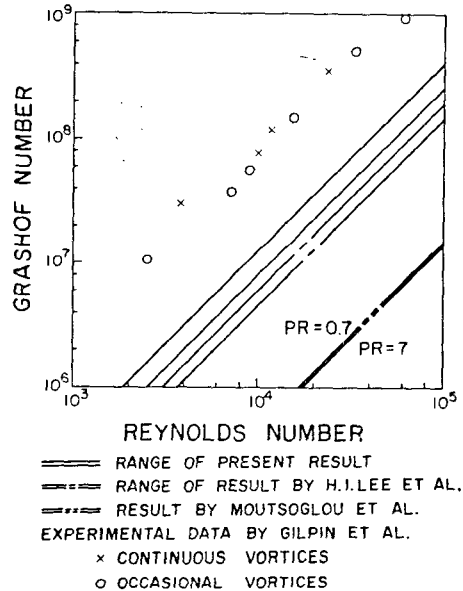


Fig. 4 Critical Grashof number marking the onset of vortex rolls as a function of Reynolds number

본 해석 결과는 물($Pr=7$)을 사용한 Gilpin 등⁽¹²⁾의 실험결과보다 한 위수 정도 낮은 Gr_c 를 제공하는데, 이는 혼합대류 유동을 기본유동으로 가정한 Moutso-gliou 등⁽²⁾의 수치해석 결과보다 훨씬 더 근접하는 값들이다. 따라서 Chen과 Mucoglu⁽¹³⁾에서 언급된 바와 같이 이론적인 결과가 실험적인 결과보다 대략 한 위수 정도 낮게 예측된다는 점을 고려하면 본 해석결과는 실험결과와 잘 일치하며, 교란의 발생기구에 대하여 보다 합리적인 설명을 제공해 준다고 할 수 있다.

최근에 Choi 와 Hwang⁽¹⁴⁾은 대류열전달 특성이 임계 Rayleigh 수와 같은 안정성조건에 의하여 예측될 수 있다고 보고 하였다. 난류 대류열전달은 벽 근처의 얇은 온도 경계층에서의 온도차에 의하여 지배되므로 Howard⁽¹⁵⁾의 경계층 불안정성 모형(boundary layer instability model)에 의하면 국소 Nusselt 수는 국소 Rayleigh 수에 다음과 같이 관련될 수 있다⁽¹⁶⁾ :

$$Ra_x \rightarrow \infty \text{에 따라 } Nu_x = x/\delta_T = (Ra_x/Ra_c)^{1/3} \quad (26)$$

한편, Acrivos⁽¹⁷⁾는 경계층 내의 혼합 강제 및 자연대류 열전달 현상에 대하여 다음과 같은 식을 제안하였는데,

$$Nu = (Nu_0^4 + Nu_1^4)^{1/4}, \quad (27)$$

여기서 하첨자 "0"과 "1"은 각각 순수한 강제대류 및 자연대류 점근치들을 나타낸다. 식(26)을 (27)의 Nu_1 과 연관시키고, x 에 근거한 임계 Rayleigh 수 $Ra_{x,c}$ 를 도입함으로써, 새로운 열전달 관계식을 다음과 같이 공식화할 수 있다 :

$Ra_x > Ra_{x,c}$ 에 대하여

$$Nu_x = \{ (0.332Pr^{1/3}Re_x^{1/2})^4 + [0.11(Ra_x^{1/3} - Ra_{x,c}^{1/3})^4] \}^{1/4}. \quad (28)$$

위 식에서 $Ra_{x,c}^{1/3}$ 을 떼어 내는 이유는 와동 형태의 2차유동 발생점에서는 자연대류 효과가 없기 때문이다. 또

한 이 식은 파 형태의 2차 유동이 발생되기 전까지만 유효하다는 점에 유의하여야 한다. 통상적으로 강제대류의 국소 Nusselt 수는 다음과 같은 식으로 주어진다⁽¹⁸⁾ :

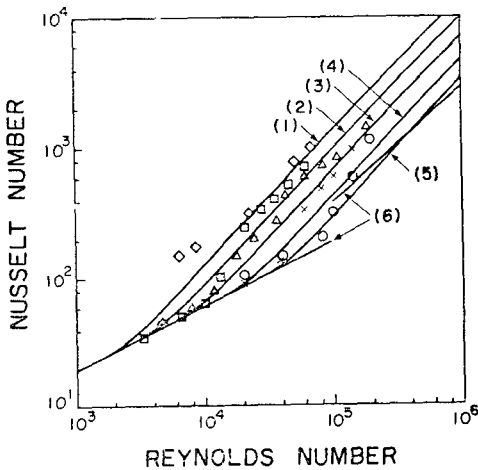
$$\begin{aligned} Re_x < 10^5 \text{에 대하여} \\ Nu_x &= 0.332Pr^{1/3}Re_x^{0.5}, \\ Re_x > 10^5 \text{에 대하여} \\ Nu_x &= 0.0287Re_x^{0.8} Pr / [0.169Re_x^{-0.1} \\ &\quad (13.2Pr - 10.16) + 0.9] \end{aligned} \quad (29)$$

Fig. 5에는 Imura 등⁽¹⁹⁾의 물에 대한 실험결과와 함께 식(28) 및 (29)의 열전달 관계식들이 비교되어 있다. $Ra_x > Ra_{x,c}$ 인 경우에는 식(28)이 식(29)보다 더 실험치에 가까운 것을 명백히 할 수 있다.

5. 결 론

밑으로부터 가열되는 등온 수평평판 위를 지나는 층류유동에서 와류 형태의 불안정성의 발생조건을 $Pr \rightarrow \infty$ 의 극한 경우에 대하여 해석하였다. 기본유동에 대하여는 경계층 해석의 근사방법에서 채택되는 다항식 형태의 비평행 유동 모형 및 평행유동 모형이 모두 고찰되었다. 교란 양들에 대하여는 불안정성의 발생점에서 진폭이 유동방향의 도함수를 가진다는 가정 및 bottling 효과 즉, 온도 교란은 온도 경계층 내에 한정된다는 가정의 타당성이 검토되었다. 모든 경우에 안정성 문제의 해들은 급속히 수렴하는 벽급수형태로서 표현될 수 있으며, 불안정성의 발생점을 표시하는 임계치들은 계면에서의 조건들로부터 얻어지는 고유치 문제의 해로서 구하여 진다.

온도 교란에 대한 bottling 효과의 가정은 실제 현상을 잘 설명하여 줄 뿐 아니라 안정성 문제의 구성을 단순화 시켜주는 유효하고도 강력한 도구이다. 교란의 진폭이 유동방향의 도함수를 가진다는 가정은 이를 무시했던 종전까지의 해석보다 더 안정한 경향을 나타내는 임계치 즉 실험 결과에 더 근접하는 값을 제공하여 준다. 더 나아가서 등온 수평평판 위를 지나는 층류강제 대류유동의 안정성 해석에서 교란의 진폭이 유동방향의 좌표에 의존하지 않는다는 종전까지의 해석의 유효성은 의문의 여지가 많으며, 재검토되어야 할 필요성이 있는 것으로 판단된다. 위의 안정성 해석에 근거를 둔 와류 형태의 불안정성의 발생점 이후의 혼합대류에 대한 열전달 상관관계식이 만들어졌다. 이 식은 파동 형태의 불안정성이 발생하기 전까지의 실험 결과들에 매우 근접하는 결과를 제공해 준다.



— (1)-(5) PRESENT HEAT TRANSFER CORRELATIONS
 — (6) HEAT TRANSFER CORRELATION BASED ON FORCED CONVECTION
 ◊□△×○ EXPERIMENTAL DATA BY IMURA ET AL.
 CORRESPONDING EXPERIMENTAL DATA AND CRITICAL REYNOLDS NUMBERS
 (1) ◊ 8.44E2
 (2) □ 1.68E3
 (3) △ 3.21E3
 (4) × 7.36E3
 (5) ○ 1.77E4

Fig. 5 Heat transfer correlations

후 기

본 연구는 한국 과학재단의 일반연구비 지원을 받아 수행되었으므로 이에 심심한 감사의 뜻을 표합니다.

참 고 문 헌

- (1) R.S. Wu and K.C. Cheng, Thermal Instability of Blasius Flow along Horizontal Plates, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 907~912, 1976
- (2) A. Moutsoglou, T.S. Chen and K.C. Cheng, Vortex Instability of Mixed Convection Flow over a Horizontal Flat Plate, *J. Heat Transfer*, Vol. 103, pp. 257~261, 1981
- (3) 이형인, 최창균, 유정열, 등온으로 가열되는 수평 평판위를 지나는 블라시우스유동의 와류 불안정성 해석, 대한기계학회 논문집, 제 6권, 제 4호, pp. 390~396, 1982
- (4) P.A. Iyer and R.E. Kelly, The Stability of Laminar Free Convection Flow Induced by a Heated Inclined Plate, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 17, pp. 517~525, 1974
- (5) 박병완, 유정열, 최창균, 노승탁, 등온으로 가열되는 수평평판위를 지나는 층류유동에서 교란의 증폭이 안정성에 미치는 영향, 서울대학교 공대연구보고, 제 16권, 제 1호, pp. 95~100, 1984
- (6) S.E. Haaland and E.M. Sparrow, Vortex Instability of Natural Convection Flow on Inclined Surfaces, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 16, pp. 2355~2367, 1973
- (7) K.D. Kihm, C.K. Choi and J.Y. Yoo, The Onset of Instability in a Horizontal Fluid Layer due to a Step Change in Temperature, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 25, pp. 1829~1837, 1982
- (8) E.M. Sparrow, R.J. Goldstein and V.K. Jonsson, Thermal Instability in a Horizontal Fluid Layer: Effect of Boundary Conditions and Non-linear Temperature Profile, *J. Fluid Mech.*, Vol. 18, pp. 513~528, 1964
- (9) J. Matthews and R.L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, 2nd Ed., W.A. Benjamin, Inc., 1973
- (10) A.H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons, pp. 343~355, 1981
- (11) L.M. Kells, *Elementary Differential Equations*, 6th Ed., Mc-Graw Hill, pp. 145~152, 1965
- (12) R.R. Gilpin, H. Imura and K.C. Cheng, Experiments on the Onset of Longitudinal Vortices in Horizontal Blasius Flow Heated from Below, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 100, pp. 71~77, 1978
- (13) T.S. Chen and A. Mucoglu, Wave Instability of Mixed Convection Flow over a Horizontal Flat Plate, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 22, pp. 185~196, 1979
- (14) C.K. Choi and S.T. Hwang, Correlations of Heat Transfer by Thermal Convection in a Horizontal Fluid Layer, submitted to I & EC.
- (15) L.N. Howard, Convection at High Rayleigh Number, *Proc. 11th Int. Congress Appl. Mech.*, Munich, pp. 1109~1115, 1964
- (16) T.S. Turner, *Buoyancy Effects in Fluids*, Cambridge University Press, pp. 207~250, 1973
- (17) A. Acrivos, On the Combined Effect of Forced and Free Convection Heat Transfer in Laminar Boundary Layer Flows, *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 21, pp. 343~352, 1966
- (18) W.M. Kays, *Convective Heat and Mass Transfer*, 2nd Ed., McGraw Hill, p. 212, 1980
- (19) H. Imura, R.R. Gilpin and K.C. Cheng, An Experimental Investigation of Heat Transfer and Buoyancy Induced Transition from Laminar Forced Convection to Turbulent Free Convection over a Horizontal Isothermally Heated Plate, *J. Heat Transfer*, Vol. 100, pp. 429~434, 1978