

<論 文>

강소성 유한요소법을 이용한 축대칭 전방압출 해석

양 등 열\* · 오 병 수\* · 이 중 흥\*\*

(1985년 3월 16일 접수)

Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Axisymmetric Forward Extrusion

Dong-Yol Yang, Byung-Soo Oh and Choong-Hong Lee

**Key Words:** Axisymmetric Extrusion(축대칭 압출), Rigid-plastic Workhardening(강소성 가공 경화), Conical and Curved Dies(원추형 및 곡선 금형), Finite Element Method(유한요소법), Distribution of Stresses and Strains(응력 및 변형도의 분포)

Abstract

The axisymmetric forward extrusion is analyzed by using the rigid-plastic finite element formulation. The distribution of stresses and strains as well as the deformation pattern in solid extrusion is very important for the improvement of product quality. The initial velocity field is determined by assuming the material as a Newtonian fluid through an arbitrarily shaped axisymmetric die. The workhardening effect and the friction of the die-material interface are considered in the formulation. Some reduction of area and die shapes (conical and biquadratic-curved) are chosen for computation.

Experiments are carried out for steel alloy (SCM4) specimens using conical and curved dies. It is found that experimental observation is in good agreement with FEM results. The strain distribution in curved (biquadratic) dies is shown to be more uniform than in conical dies at the same reduction of area.

기 호 설 명

[*B*] : 노드속도와 변형도율과의 관계를 위한 행렬  
 [*C*] : 체적변형도율과 변형도율의 관계를 위한 행렬  
*F*, [*F<sub>i</sub>*] : 표면력벡터 및 표면력벡터 성분으로 되는 column vector  
 [*f*] :  $\frac{\partial \phi}{\partial U_i}$ 에 의해 정의되는 행렬  
*f* : 마찰응력  
 |*J*| : 자코비안행렬식  
 [*K*] : 강성행렬  
*k* : 항복전단응력  
*m* : 마찰상수(friction factor)  
 [*N*] : 형상함수(shape function)

*N* : 절점의 수  
*n<sub>i</sub>* : 수직벡터의 방향여현성분  
*n* : 반복횟수(number of iteration)  
*P* : 절점에서의 미지수갯수  
*p* : 압력(정수압)  
 (*r, θ, z*) : 원통좌표계  
*S<sub>r</sub>* : 힘이 주어지는 면  
*S<sub>p</sub>* : 소성영역의 경계면  
*S<sub>v</sub>* : 속도가 주어지는 면  
*u, u<sub>i</sub>* : 속도벡터 및 속도벡터성분  
*V* : 체적  
*V<sub>p</sub>* : 소성영역의 체적  
*α* : 감속계수(deceleration coefficient)  
*δ<sub>ij</sub>* : Kronecker delta  
*ε̄, ε̂* : 유효변형도 및 유효변형도율

\* 정회원, 한국과학기술원 생산공학과  
 \*\* 정회원, 경방기계(주)

- $\epsilon_{ij}, \epsilon_{ii}$  : 변형도 텐서 및 체적변형도율
- $\mu$  : 점소성재료의 점성계수
- $p$  : 콜롱마찰계수
- $\pi_1$  : 변형에너지율
- $\pi_p$  : 외력에 의한 에너지율
- $\bar{\sigma}$  : 유효응력
- $\sigma_{ij}, \sigma_{ij}'$  : 응력텐서 및 편차응력텐서
- $\sigma_m$  : 정수압 압력
- $\Phi$  : 노드변수로서 표시된 범함수
- $\phi$  : 범함수(functional)

1. 서 론

냉간압출공정은 높은 압력을 요하기 때문에 금형제작에 주의를 기울여야 하며 특히 금형형상은 소재금속의 유동과 직결되어 있어서 최종 제품의 기계적인 강도분포와 밀접한 관련을 갖는다. 사용목적에 따라 압출제품의 단면에 있어서 기계적인 강도분포가 특별히 요구되는 경우가 있으며 최종제품의 단면에 있어서 가공화된 정도가 균일한 것이 바람직할 때가 많다. 균일한 변형은 공정의 효율을 높이고 성형력을 최소화하여 금형마멸을 줄일 뿐아니라 제품의 결함을 줄여 주게된다<sup>(1)</sup>. 가공물의 제질은 소성영역내의 변형과정뿐 아니라 응력 및 변형도 분포에 의해 결정되는데 이를 위한 수학적인 정해(exact solution)를 구하는 것은 일반적으로 아주 어려운 것으로 알려져 있다<sup>(2)</sup>. 소성변형은 비선형적이고 변형경로에 의존하는 복잡성때문에 최근 전산기의 발전과 더불어 점차 수치적인 방법에 의존하는 경향이 뚜렷해져 있다. 이 중에서 유한요소법은 연속체를 여러개의 요소로 잘라서 속도장을 요소별로 한 다음 전체 체적에 대해 계산하기 때문에 다른 방법으로는 해석이 어려운 여러가지 형상에도 적용이 가능한 방법이다. 탄소성유한요소법(elasto-plastic FEM)은 보다 넓은 영역에서 믿을 만한 응력과 변형도 분포를 제공하지만 계산시간이 많이 들고 수식화과정이 복잡해지는 단점이 있다. 압출이나 단조처럼 전체적인 변형이 일어나는 소성문제에서는 탄성변형의 양이 적기 때문에 탄소성유한요소법은 계산효율적인 면에서 별로 바람직하지 못하다. C.H. Lee<sup>(3)</sup> 등은 소성문제에서 강소성유한요소법(rigid-plastic FEM)을 제안하였는데 변형량 증분의 크기를 크게 잡을 수 있어 컴퓨터 계산시간을 줄일 수 있으며 정상 상태 문제에서는 수식화 프로그래밍이 간단해 지는 장점때문에 널리 쓰이고 있다<sup>(4)</sup>.

압출문제에 대한 유한요소법의 해석은 1971년에 T. Murota<sup>(5)</sup> 등이 최대칭압출에 대해서 그리고 K. Iwata 등<sup>(6)</sup>이 정수압 압출에 대해 탄소성유한요소법으로 응력분포등을 구하였다. 1973년 C.H. Lee<sup>(7)</sup> 등은 압출문제에서 나타나는 잔류응력문제를 탄소성유한요소법으로 다루었다. E.H. Lee<sup>(8)</sup> 등은 평면변형압출문제를 탄소성유한요소법으로 계산하였으며, S.N. Shah<sup>(9)</sup> 등은 최대칭 전방압출과 후방압출을 유한요소법으로 다룬바 있다. C.C. Chen<sup>(10)</sup>은 강소성유한요소법으로 원추형 금형에 의한 최대칭압출에서 여러가지 다른 마찰조건에의 경우와 가공경화의 정도에 따른 분석을 행하였다. 그러나 이 프로그램은 원추형에 제한되어 있을 뿐아니라 처음에 초기속도장을 데이터로 입력시켜야 하는 불편함이 있고 초기속도장이 잘못 들어가면 수렴에 대한 보장이 없는 단점이 있다. Chen의 방법을 바탕으로 내부결합과 관련하여 봉재의 인발에 대한 해도 발표된 바 있다<sup>(11)</sup>. 초기속도장은 해의 수렴에 큰 영향을 미치며 Roll<sup>(12)</sup>, Oh<sup>(13)</sup> 등은 처음속도장은 뉴토니안점성 유체의 유동으로 가정하여 선형행렬방정식을 풀어서 구하면 해의 수렴도를 좋게 한다고 발표하였다. 처음에는 가공경화를 고려하지 않고 접근하다가 속도장이 어느 정도 잘 형성되면 가공경화를 고려하기 위해 유선을 따라 적분함으로써 계산시간을 줄이도록 하였다. 본 논문에서는 냉간전방압출시 가공경화뿐 아니라 마찰의 영향, 단면감소를 그리고 금형의 형상이 재료의 유동과 응력분포 등에 미치는 효과를 강소성유한요소법에 의해 계산하였다. 입출구의 금형형상의 기울기(영(zero)인 곡선)는 금속내부의 보다 이상적인 유동과 고른 변형도 분포를 주는 것으로 알려져 있기 때문에 4차곡선을 가진 금형과 가공상의 편의때문에 공업적으로 많이 쓰고 있는 원추형 금형과를 비교하도록 하였다. 압출된 시편단면의 가공경화도는 유효변형도로 나타내지기 때문에 본 연구에서는 금형의 형상과 단면 감소율등이 이에 미치는 영향을 조사하였다. 이론과의 비교를 위해서 풀림처리된 특수강 소재인 SCM4로 실험을 행하였다. 압출하중은 로드셀(loadcell)로 측정하였으며 수치계산에서 구해진 속도장과 실제속도장의 차이를 살펴보기 위해서 시편단면에 포토에칭(photo-etching)한 압출시킬 시편의 그리드변형을 강소성유한요소법으로 계산한 그리드패턴과 비교 검토하였다.

## 2. 이론전개

### 2.1. 수식화 과정

비압축성 조건과 속도경계 조건을 만족하는 동적 가용속도장  $\mathbf{u}^*$ 에 대해서 이로부터 구해진 응력분포가 실제 응력분포와 같게되는 해는 주어진 문제에 대해 다음의 범함수(functional)  $\phi$ 를 최소화 시킴으로써 구해진다<sup>(4)</sup>.

$$\phi = \int_V \bar{\sigma} \dot{\epsilon}^* dV - \int_{s_p} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^* dS \quad (1)$$

압출공정의 경우는 초기변형을 제외하고는 정상 상태의 공정으로 취급할 수 있다. 단조등의 비정상 상태문제에서와는 달리 정상 상태에서는 질점을 제어체적(control volume)내에 고정시켜 해석하는 오일러리안 관점(Eulerian viewpoint)이기 때문에 제어체적을 통과하는 유동금속에 대한 연속 방정식 즉 비압축성 구속조건( $\dot{\epsilon}_{ii}^* = 0$ )을 고려하여야 한다.

이를 위해서 라그랑지안 승수(Lagrangian multiplier)  $\lambda$ 를 도입하면 식 (1)은 구속조건이 없는 다음식으로 바뀌어 할 수 있다. 즉,

$$\phi = \int_V \bar{\sigma} \dot{\epsilon} dV + \int_V \lambda \dot{\epsilon}_{ii} dV - \int_{s_p} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS \quad (2)$$

이 된다. 여기서 각항의 물리적 의미는 첫항은 내부변형 에너지율( $\pi_1$ )이고 세번째항은 외부입력 에너지율( $\pi_F$ )이다. 두번째항은 체적변화 에너지율(dilatation energy rate,  $\pi_2$ )이고 승수  $\lambda$ 는 평균응력  $\sigma_n$ 이 된다. 즉,

$$\lambda = \sigma_n = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = -p \quad (3)$$

라그랑지안 승수를 사용하는 방법외에 벌칙함수(penaltyfunction)방법이 있다. 여기서는 라그랑지안 승수를 사용하는 방법을 채택하였다.

### 2.2. 강체(Rigid Body)부분 및 마찰의 처리

강소성 변형문제에서 만약 소성영역의 경계면이 유일하게 존재하면 유일한 해는 주어진 외력과 속도 경계 조건들을 만족하면서 존재한다.

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{s_p} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS \quad (4)$$

여기서 속도장은 다음관계를 만족시켜야 한다.

$$\mathbf{u}_{,i,i} = \dot{\epsilon}_{ii} = 0 \quad (5)$$

한편 변형도율은 소성영역안에서 응력과 다음식으로 연관지어진다.

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij} = -p \delta_{ij} + \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (6)$$

그러나 정확한 소성영역을 알 수 없기 때문에 소성역을 포함하는 영역으로 제어체적을 잡으면 소성역을 제외한 나머지 부분에서는 식 (6)이 지배방식이 될 수 없다.  $\dot{\epsilon}$ 이 아주 작은 곳에서는 식 (6)에 의하면  $\sigma'_{ij}$ 이 무한대로 커지기 때문에  $\dot{\epsilon}$ 이 어느값 이하(예컨대 흔히  $10^{-3}$ )가 되면 그 영역을 더이상 소성역으로 보지 말고 강체부분(rigid body)으로 보아야 한다. 이 부분에서 힘의 평형과 경계조건을 만족하는 새로운 응력-변형도 관계를 위해 재료를 선형 점성재료 즉, 적당한 점도를 가진 뉴토니안 유체로 가정한다. 즉,

$$\sigma'_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}, \quad \mu = \frac{\bar{\sigma}}{3\dot{\epsilon}_0} (\dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_0 = 10^{-3}) \quad (7)$$

본래 Prandtl-Reuss 식에서  $\mu$ 는  $\frac{\bar{\sigma}}{3\dot{\epsilon}}$ 로  $\dot{\epsilon}$ 의 함수이며 초기속도장을 구할 시 첫번째 스텝에서는 가공경화가 없는 것으로 두면 일단 뉴토니안 유체처럼 가정하여 계산을 시작할 수 있다<sup>(11,13)</sup>. 이러한 재료의 성질을 갖고 응력에 대한 평형을 만족시키는 가상적인 강-점소성재료에 대한 해를 반복법에 의해  $\mu = \mu(\dot{\epsilon})$ 를 업데이트 시킴으로써 할 수 있게 된다<sup>(13)</sup>. 즉 식 (7)로부터 구한  $\sigma'_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}$ 로부터 이에 해당하는  $\bar{\sigma}, \dot{\epsilon}$ 를 구하면 새로운  $\mu(\dot{\epsilon})$ 를 구할 수 있게 되는데  $\mu(\dot{\epsilon})$ 값이 별로 바뀌지 않을 때까지 반복하여 초기속도장을 구하는데 전술한 바와 같이 균일한  $\mu$ 의 분포를 가정하더라도 몇차례의 반복만으로 만족할 만한 초기속도장을 구할 수 있다. 흔히 처음에 균일한  $\mu$ 의 분포만으로 초기속도장을 구한 다음 Newton-Raphson 방법으로 유한요소해를 구하기도 하는데 이렇게 하면 충분히 정확한 해를 구하기 위해 많은 반복계산이 필요하게 된다<sup>(13)</sup>.

다른 소성가공 공정들과는 달리 압출에서는 마찰력의 방향은 상대속도의 방향으로 일정한 것을 알 수 있지만 크기는 정확하게 알기 힘들다. 콜롬 마찰은 물리적으로 보다 정확한 의미를 갖지만 콜롬 마찰계수  $p$  (Coulomb coefficient of friction =  $f/p$ )의 측정이 힘들기 때문에 압력과는 관계없이 일정하게 주어진다고 가정하는 마찰상수(friction factor)  $m$ 을 써서 일정한 마찰응력  $f = mk$ 을 이용하는 것이 편리하다<sup>(14)</sup>. 본 연구에서는 마찰상수  $m$ 을 사용하였다.

### 2.3. 강소성 유한요소법에 대한 행렬방정식의 유도

어떤 제어체적안에  $M$ 개의 요소(element)가  $N$ 개의 절점(nodal point)으로 서로 연결되어 있다고 생각하면 전체 범함수  $\phi$ 는 각요소의 범함수  $\phi^{(m)}$ 의 합으로 생각할 수 있다. 즉,

$$\phi = \sum_{n=1}^M \phi^{(n)}(\mathbf{u}) \quad (8)$$

속도변수  $\mathbf{u}$  는 절점에서의  $u_i$  값의 선형조합(linear combination)으로 나타낼 수 있으므로 형상함수  $N_i$  를 도입하면

$$\mathbf{u} = \sum N_i u_i \quad (9)$$

가 된다.

여기서 식 (9)을 식 (8)에 대입하면 전체 범함수  $\phi$  는 절점에서의 변수  $u_i$  의 함수  $\Phi$  로 변형된다. 즉,

$$\phi(\mathbf{u}) \cong \Phi(u_i) \quad (10)$$

여기서  $i=1, 2, 3, \dots, N \times P$  이고  $N$  은 절점의 갯수를  $P$  는 절점에서의 미지수 갯수를 나타낸다.

따라서 범함수  $\phi(\mathbf{u})$  의 최소화 문제는 다음과 같이  $\Phi(u_i)$  의 정류치문제(stationary problem)로 변환된다.

$$\frac{\partial \Phi(u_i)}{\partial u_i} = 0 \quad (j=1, 2, 3, \dots, N \times P) \quad (11)$$

이것을 테일러급수 전개하면

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right|_{u_k(n)} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right|_{u_k(n-1)} + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \right|_{u_k(n-1)} \Delta u_j(n) + [\Delta u_j(n)]^2 \text{의 항} + \dots = 0 \quad (12)$$

이 된다. 여기서 증분량은  $\Delta u_j(n) = u_j(n) - u_j(n-1)$  이고  $n$  은 반복횟수를 말한다.

$\Delta u_j \ll 1$  이면  $[\Delta u_j(n)]^2$  이하의 항들은 무시할 수 있으므로

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \right|_{u_k(n-1)} \cdot \Delta u_j(n) = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right|_{u_k(n-1)} \quad (13)$$

로 된다.

식 (2)와 식 (10)으로부터  $\Phi(u_i)$  를 식 (13)에 대입하면 다음과 같은 행렬식을 얻는다.

$$\left( \begin{array}{c|c} \sum_{n=1}^M \left\{ \frac{\partial^2}{\partial u_a \partial u_\beta} (\pi_1 + \pi_2 - \pi_F)^{(n)} \right\} & \sum_{n=1}^M \frac{\partial \pi_V^{(n)}}{\partial u_a} \\ \hline \sum_{n=1}^M \frac{\partial \pi_V^{(n)}}{\partial u_\beta} & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \Delta u_\beta \\ \lambda^{(n)} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} - \sum_{n=1}^M \left\{ \frac{\partial}{\partial u_a} (\pi_1 - \pi_F)^{(n)} \right\} \\ - \sum_{n=1}^M \pi_V^{(n)} \end{array} \right) \quad (14)$$

이 식에서 각항은 다음과 같이 유도됨은 어렵지 않게 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1^{(n)}}{\partial u_a} &= \frac{\partial}{\partial u_a} \int_V \bar{\sigma} \bar{\epsilon} dV = \frac{\partial}{\partial u_a} \int_V \bar{\sigma} \cdot \frac{2}{3} K_{\alpha\beta} u_{\alpha} u_{\beta} dV \\ &= \int_{V^{(n)}} \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} K_{\alpha\beta} u_{\alpha} dV \\ \frac{\partial^2 \pi_1^{(n)}}{\partial u_a \partial u_\beta} &= \int_{V^{(n)}} \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\left[ K_{\alpha\beta} - \frac{2}{3\bar{\epsilon}^2} (K_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} u_{\gamma} u_{\delta}) \right] dV \quad (16)$$

$$\frac{\partial \pi_2^{(n)}}{\partial \lambda} \equiv \pi_V^{(n)} \equiv \int_{V^{(n)}} Q_{\alpha} u_{\alpha} dV \quad (17)$$

$$\frac{\partial \pi_V^{(n)}}{\partial u_a} = \frac{\partial^2 \pi_2^{(n)}}{\partial \lambda \partial u_a} = \int_{V^{(n)}} Q_{\alpha} dV \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_V^{(n)}}{\partial u_a \partial u_\beta} = \frac{\partial^3 \pi_2}{\partial \lambda \partial u_a \partial u_\beta} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \pi_F}{\partial \pi_F} = \text{consistent nodal force} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_F}{\partial u_a \partial u_\beta} = 0 \quad (21)$$

여기서

$$\dot{\epsilon}_{ii} = A_{ij} N_{ja} u_a \equiv B_{ia} u_a,$$

$$K_{\alpha\beta} \equiv B_{ia} B_{i\beta},$$

$$\dot{\epsilon}_{ii} = C_i \dot{\epsilon}_i, \quad \{C_i\}^T = \{1, 1, 1, 0\},$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{2}{3} K_{\alpha\beta} u_{\alpha} u_{\beta}$$

$$Q_{\alpha} = C_i B_{i\alpha}$$

이다.

식 (15~21)을 식 (14)에 대입하면

$$\left( \begin{array}{c} \sum_{n=1}^M \int_{V^{(n)}} \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \left[ K_{\alpha\beta} - \frac{2}{3\bar{\epsilon}^2} (K_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} u_{\gamma} u_{\delta}) \right] dV \\ \hline \sum_{n=1}^M \int_{V^{(n)}} Q_{\beta} dV \\ \hline \sum_{n=1}^M \int_{V^{(n)}} Q_{\alpha} dV \\ \hline 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \Delta u_{\beta} \\ \lambda \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} - \sum_{n=1}^M \int_{V^{(n)}} \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} K_{\alpha\gamma} u_{\gamma} dV + \text{consistent nodal force} \\ \hline - \sum_{n=1}^M \int_{V^{(n)}} Q_{\alpha} u_{\alpha} dV \end{array} \right) \quad (22)$$

가 된다. 이 식을 행렬식으로 표시하면

$$[K] \cdot \{\Delta u_j\} = \{f_i\} \quad (23)$$

가 된다.

여기서  $[K]$  는 강성행렬로  $u_j$  의 함수이므로 비선형 문제가 되어 선형문제의 반복과정에 의해서 풀게 된다. 즉,  $n$  번째 반복과정으로부터  $\Delta u_j(n)$  을 구하여 새로운 속도장  $u_j(n)$  을 얻는다.

$$u_j^{(n)} = u_j^{(n-1)} + \alpha \Delta u_j^{(n)} \quad (24)$$

여기서  $\alpha$  는 해의 발산을 막기 위해 값을 줄이는 감속계수(deceleration coefficient)로  $0 \leq \alpha \leq 1$  의 값을 가진다.  $\alpha$  값을 크게 할 때 수렴속도가 빨라지지만 발산할 위험이 있고 작게 하면 수렴의 안전성이 있으나 수렴속도가 늦어 지므로 이전까지의 범함수값의 동향을 보고 적당히 변화시켜줄 필요가 있는데 이것은 선택에

있어서 경험적인 요소를 갖게 된다<sup>(15)</sup>.

여기서 주어지는 소성문제와 같이  $[K]$ 가  $u_i$ 의 함수로써 비선형인 경우에 매 단계마다 선형문제로 보고 Newton-Raphson 반복법등에 의해 해에 접근하게 된다. 반복작업동안에 매 단계마다 해가 수렴방향으로 나가는지를 점검하는 방법으로 다음과 같은 두가지 판별법이 쓰이고 있다.

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \Big|_{(n)} < \frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \Big|_{(n-1)} \quad (25)$$

여기서  $\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N \times P} u_i^2}$  이다. 또는

$$\bar{g}^{(n)} < \bar{g}^{(n-1)} \quad (26)$$

여기서  $\bar{g} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N \times P} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right)^2}$  이다.

강소성 유한요소법에 의한 수치적 해법과정을 Fig. 1에 유동선도(flow chart)로써 나타내었다.

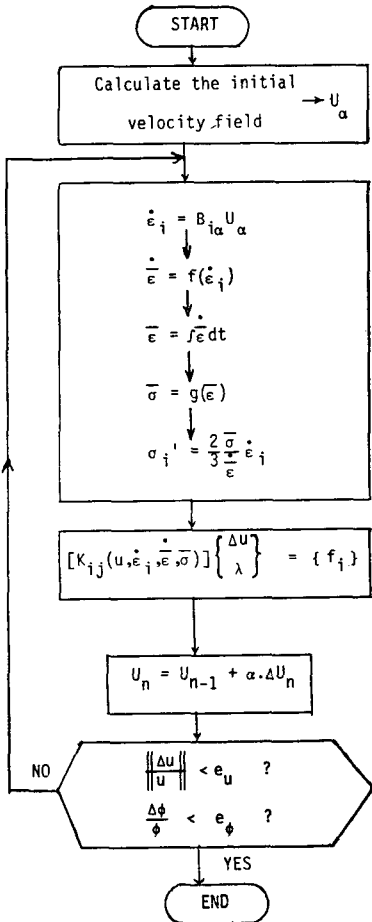


Fig. 1 Flow chart for computer simulation

### 3. 유한요소 모델링

본 논문에서 다루고 있는 축대칭 압출에 있어서 곡면 금형과 직선금형에 대한 유한요소메쉬(mesh)는 Fig. 2와 같다. 계산에서 사용한 4각형요소는 하이브리드수식화(hybrid formulation)로 되어 있고 미지수 9개를 가지며 꼭지점 4개로 된 형상함수(shape function)나 쌍선형(bilinear)으로 된 요소이다.

변형의 구배가 크거나 강소성 경계면이 예상되는 곳에서는 요소를 작게 잘라야 하는데 이런 곳에서 요소를 성기고 크게 하게 하면 해가 정확하지 못하게 된다<sup>(16)</sup>. 예를 들어 Fig. 3과 Fig. 4를 비교해보면 변형

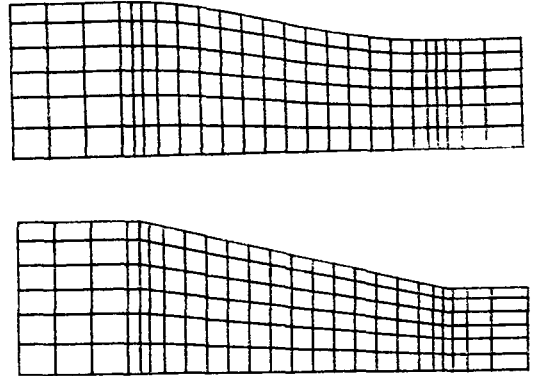


Fig. 2 FEM meshes for curved and conical dies

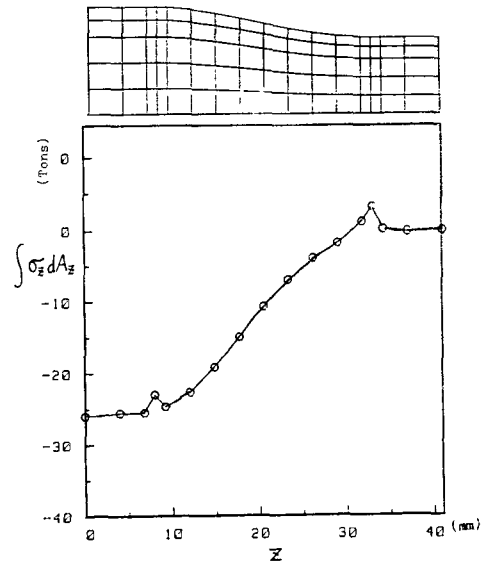


Fig. 3 Values of  $\int \sigma_z dA_z$  along the axial direction for rough meshes at the inlet and the outlet

율이 큰 부분에서  $\sigma_z$  횡 단면에 대한 적분치에 있어서 값의 진동(fluctuation)이 생기는데 이는 강소성 재료를 가정하여 강체부분을 전혀 다른 물질 즉, 뉴토니안 점성유체로 간주했기 때문이다. 이와 같이 경계부분이 민감한 부분에서는 요소의 크기를 비교적 잘게 나누어 모델링하게 되는데 이 현상은 탄소성 재료로 접근하지 않는 한 근본적으로 없어지지 않는다. 이 문제는 Fig.

4에서와 같이 강소성 경계가 예측되는 부위에 요소를 잘게 나눔으로써 해의 정확도를 개선할 수 있다. 강소성 유한요소법을 사용할 때 구할 수 있는 것은 제어체적(control volume) 전체에서의 속도 및 변형도 분포와 소성변형영역안에서의 응력분포이다.

4. 실험

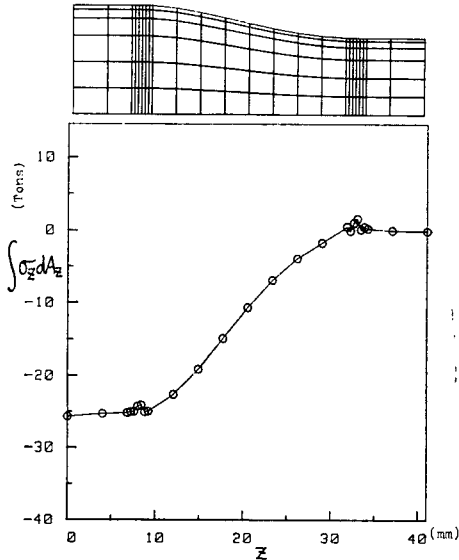


Fig. 4 Values of  $\int \sigma_z dA_z$  along the axial direction for fine meshes at the inlet and the outlet

특수강을 냉간압축시킬 수 있는 전방압출 전용 실험 장치를 설계 제작 하였으며 실험장치가 Fig. 5에 나와 있다. 실험장치는 400톤 유압프레스에 설치하였고 시편이 압출된 후에는 프레스하부에 설치된 쿠션을 이용하여 녹아웃시키도록 하였다. 펀치와 컨테이너의 직경은 25mmφ로 하고 펀치는 냉간공구강인 SKD11로 하고 컨테이너와 소성변형이 진행되는 중간압출금형은 내측엔 SKD11, 외측엔 SCM4의 재질들을 열처리하여 열박음하였으며 단면감소율이 60% 넘는 경우는 합금강 SCM4를 압출시킬 수 있도록 안에서부터 SKH9, SKD 11 그리고 외부에 SCM4로 하는 이중열박음을 할 수 있도록 하였다. 단면감소율과 금형의 형상이 바뀔 때마다, 중간금형만 바뀌면 되도록 하였고 원추형 금형, 곡선금형을 각 4개씩 만들었다. 곡선금형은 입구와 출구에서 구배가 0이고 변곡점이 Table 1로 나와 있는 4차식으로 표현되는 금형이다. 컨테이너는 재료가 정상 상태에 도달할 때까지 작업이 가능하도록 충분히

Table 1 Die profiles for conical and curved dies

Reduction of area (%)	Inlet diameter (2R <sub>0</sub> , mm)	Outlet diameter (2R <sub>f</sub> , mm)	Die profiles
40	25.00	19.30	(i) Conical (ii) 4-th order polynomial curve (I <sub>n</sub> /L=0.438)
50	25.00	17.68	(i) Conical (ii) 4-th order polynomial curve (I <sub>n</sub> /L=0.437)
60	25.00	15.81	(i) Conical (ii) 4-th order polynomial curve (I <sub>n</sub> /L=0.44)
70	25.00	13.69	(i) Conical (ii) 4-th order polynomial curve (I <sub>n</sub> /L=0.447)

L=Die length=25mm

I<sub>n</sub>/L=Relative position for Inflection point

R(z)=Intermediate die radius in terms of distance, z, from the inlet (z=0, R=R<sub>0</sub>)

4-th order polynomial curve for dire profile

$$R(z) = R_0 + \left[ CL^2 - \frac{3(R_0 - R_f)}{L^2} \right] z^2 + \left[ \frac{2(R_0 - R_f)}{L^3} - 2CL \right] z^3 + Cz^4,$$

$$C = 3 \left( 1 - \frac{R_f}{R_0} \right) \left( 1 - \frac{I_n}{L} \right) / \left[ 1 - 6 \left( \frac{I_n}{L} \right) + 6 \left( \frac{I_n}{L} \right)^2 \right] L^4$$

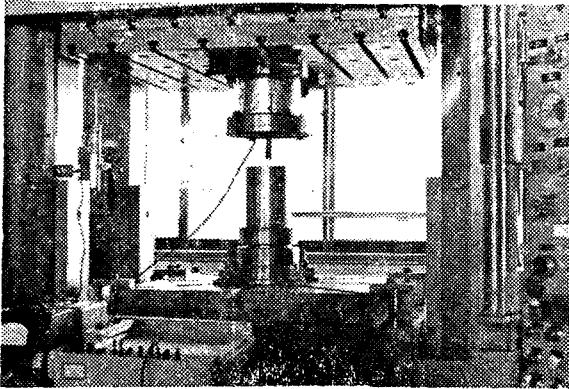


Fig. 5 Experimental die set-up

긴 80mm로 설계하였다.

압출력의 측정에는 자체 제작한 로드셀(용량 170톤)을 이용하였고 변위의 측정에는 선형변위측정기(linear displacement transducer)를 이용하였으며 이로부터 힘-변위곡선을 X-Y 레코더로 얻을 수 있었다.

압축시험에서는 압출실험에서 사용된 SCM4 재료를  $\phi 12\text{mm} \times 12\text{mm}$ 로 가공하여 유압식만능시험기(M.T.S)에서 0.5mm/min의 속도로 압축하였다. 윤활상태를 좋게 하기 위하여 중간에 몇차례 그리스와 테플론 테이프를 갈아 넣어 벌징을 방지하였다. 압축시험으로부터 구한 커브를 압출소재에 대해 다음과 같이 커브 피팅하였다.

$$\bar{\sigma} = 42.7 + 71.25(\bar{\epsilon})^{0.266} \text{ (kgf/mm}^2\text{)} \quad (31)$$

압출공정의 이론해석에서 금속면과 소재사이의 마찰을 고려하는 데는 상당히 어려운 점이 있다. 보통의 경우는 경계면에서 일정한 마찰응력( $\tau = mk$ )을 갖는 것으로 가정하는 마찰상수  $m$ 을 사용하고 있다. 마찰상수  $m$ 은 링압축 시험에서 외경, 내경 및 높이가 각각 16mm, 8mm 및 5.33mm가 되도록 가공하여 구하였는데 압출에 사용한 SCM4 재료를 쓰고 윤활제로서 칼슘그리스에  $\text{MoS}_2$ 를 중량비 10%만큼 섞은것을 사용했을 때  $m = 0.12$ 가 나왔으며 이를 이론해석에 이용하였다.

압출실험은 400톤유압프레스에서 행하였으며 압출소재는 SCM4 환봉을  $816^\circ\text{C}$ 에서 2시간 정도 유지한 후 노냉시킨 다음  $\phi 24.5\text{mm} \times 60\text{mm}$  크기로 가공하였고 변형이 정상 상태에 빨리 도달 하도록 끝부분에 10mm 길이로  $30^\circ\text{C}$ 의 기울기를 두었다. 압출시 윤활제는 링 압축시의 동일한 것으로 칼슘그리스에  $\text{MoS}_2$ 를 10%중량비로 섞은 것을 사용하였다. 곡선 금형의 비중류와 직선 금형의 비중류에 대해 각각 실험을 하였으며 압출 하중은 행정에 따라 하중이 일정하게 될 때 즉 정상상

태의 값을 취하였다. 압출 실험시 소성 유동형상을 실험적으로 구하기 위하여 포토에칭(photoetching) 방법을 이용하여 절반으로 나는 시편의 종단면에 그리딩을 한 다음 그리딩 되지않은 또 하나의 시편을 합하여 완전한 압출용시편을 만들어 금형에 넣고 압출을 행하였다. 압출후 시편을 꺼내어 소성 유동패턴을 관찰하였다.

### 5. 결과 및 고찰

단면적에 따른 압출력이 유한요소법에 의한 수치해석결과와 실험을 비교하여 Fig. 6에 보였는데 수치해석결과가 실험과 잘 일치하고 있다. Fig. 7은 포토에칭방법에 의한 실험적인 그리드패턴(grid pattern)과 유한요소법으로 계산한 그리드패턴을 곡선 금형(curved die)과 직선 금형(conical die)의 경우들에 대해서 대비하여 비교한 것이다. 어느경우든 금형입구근처에서는 이종 곡률을 형성하지만 출구에 가까와 지면서 점차 한 방향의 곡률을 갖게 된다. 입구부분에서는 곡선금형의 직선변형이 직선변형에 비해 더 크다가 출구를 지나면서 급격히 직선금형의 변형이 커짐을 볼 수 있는데 이론결과가 실험결과와 잘 일치하고 있다. 이로써 유한요소법을 사용하면 금속의 유동을 거의 정확하게 예측할 수 있다.

Fig. 8은  $\bar{\epsilon}$ 분포로서 곡선금형이 직선금형에 비해 더 작은 소성영역을 가지고 있음을 보이는데 이는 단면감소율이 클수록 더 차이가 심해지나 재료의 성질이 바뀔(응력-변형도 선도)에 따라서는 별로 크게 영향을 받지 않는 것으로 나타났다. 특히 직선 금형의 경우는 곡선 금형에 비해 입구와 출구부분의 모서리에서 값이 급격히 상승하고 있다. Fig. 9는  $\bar{\epsilon}$ 분포인데 진행거

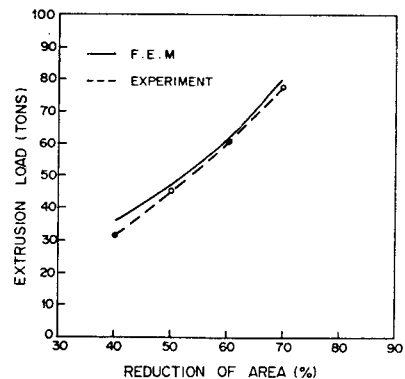


Fig. 6 Comparison of extrusion load between FEM and the experiment with respect to area reduction for the curved dies

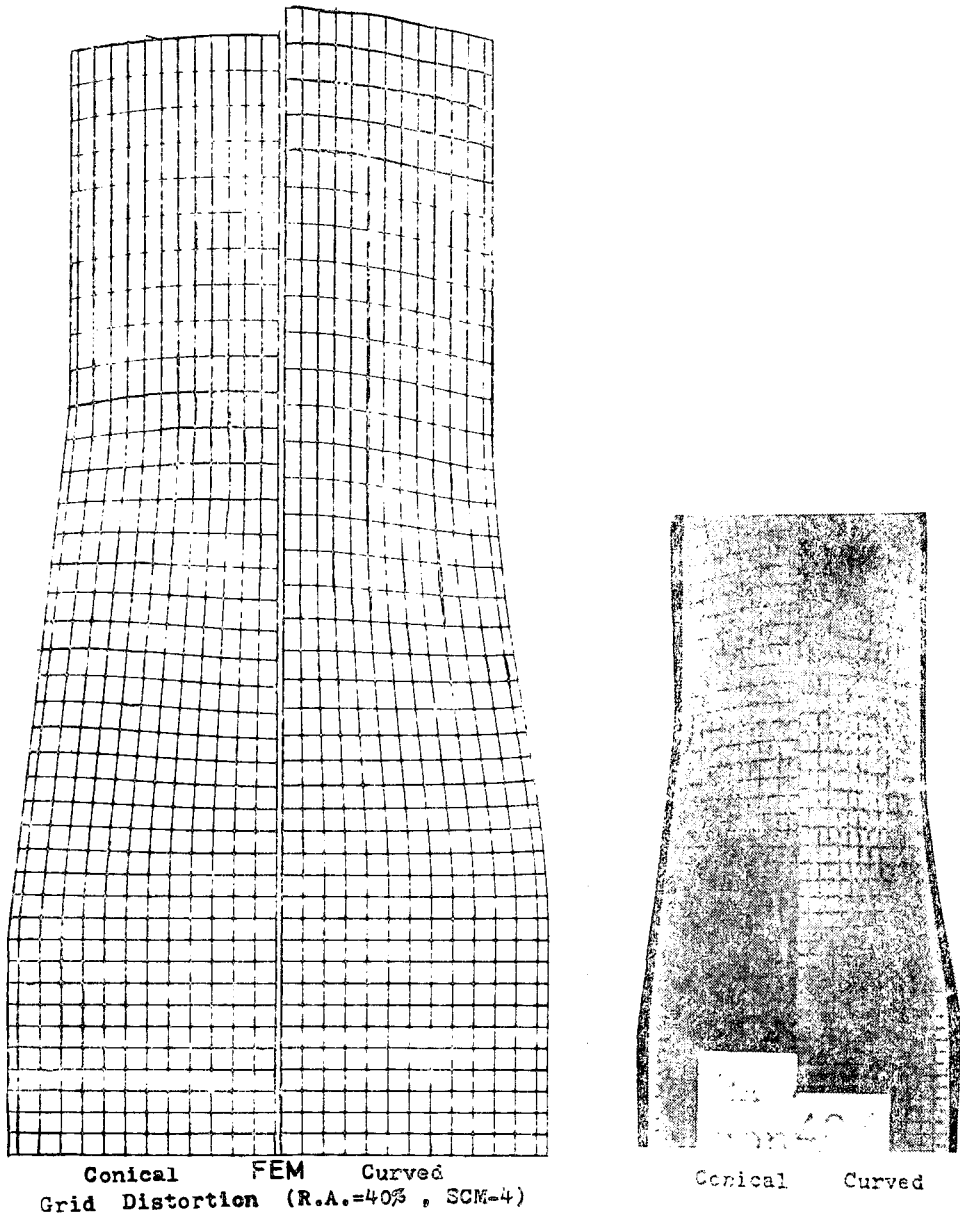


Fig. 7 Comparison of theoretical and experimental flow patterns between the conical die and the curved die (R.A.=40%)

리면에서 서로 비교할 때 대체적으로 직선 금형의 값이 곡선의 경우보다 작은 값이지만 출구의 모서리 부분에서 급격히 상승함으로 인해 직선 금형의 경우는 제품표면의  $\epsilon$  값이 커지게 된다. 최종제품에서의 가공경화도를 보여주는 Fig. 10 을 보면 단면감소율이 클수록 직선 금형이 중심부와 표면사이의 값차이가 더 심해짐을

알 수 있다. Fig. 11 의  $\sigma_z$  분포는 전반적으로 직선 금형의 값이 곡선 금형보다는 더 크게 존재함을 나타내며 특히 출구부위에서 인장응력이 존재함은 특기할 만한 사실이다. 이것은 강소성 해석의 특성 때문에 정확한 판단은 어렵지만 금형의 모양이 압출부 표면에서의 잔류응력의 분포에 영향을 미칠 것이라는 것을 시사해 주



고 있다. Fig. 12와 Fig. 13에서 두가지 금형형태에 대해서  $\sigma_r$ 과  $\sigma_\theta$ 는 거의 같은 수준의 분포를 보여 주고 있으며 등가선(equi-stress contour)의 방향도 반경

방향으로 같은 값을 가지고 있는데 최대값은 금형입구를 바로 지나면서 생김을 알 수 있다. Fig. 14는 전단 응력  $\tau_{rz}$ 의 분포를 보여 주고 있는데 최대값은 금형의 표면중앙부분에 있고 중심축에서는 대칭성 때문에 거

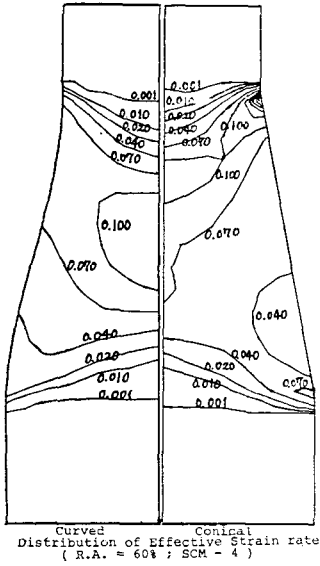


Fig. 8 Comparison of effective strain rate ( $\dot{\epsilon}$ ) distribution between the curved die and the conical die (R.A.=40%)

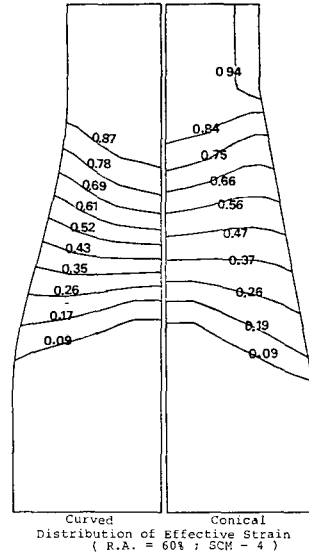


Fig. 9 Comparison of effective strain ( $\epsilon$ ) distribution between the curved die and the conical die (R.A.=60%)

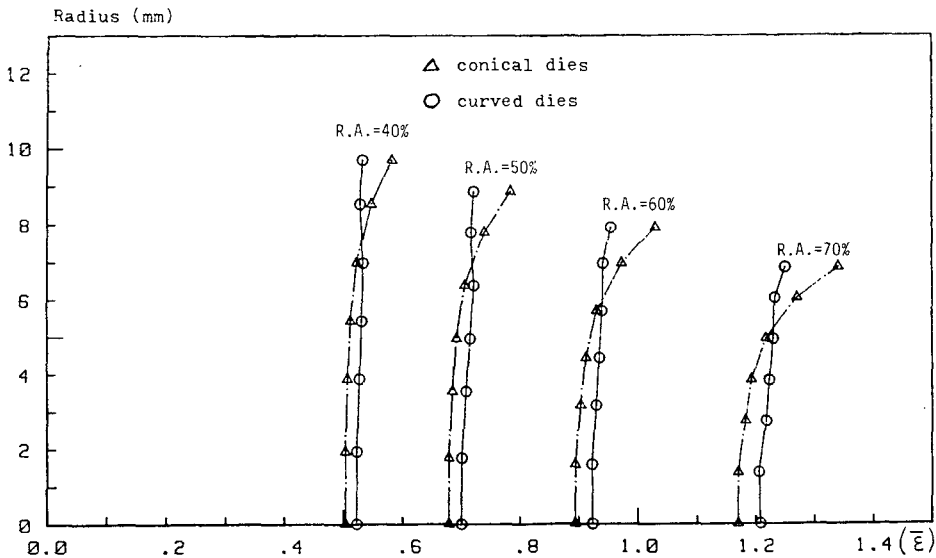


Fig. 10 Comparison of final effective strain distribution between the conical dies and the curved dies for various reductions of area

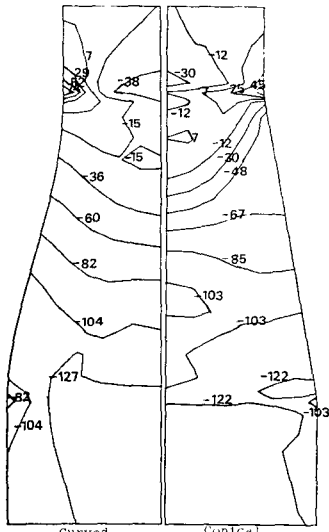


Fig. 11 Comparison of axial stress ( $\sigma_z$ ) distribution between the curved die and the conical die. (R.A.=60%)

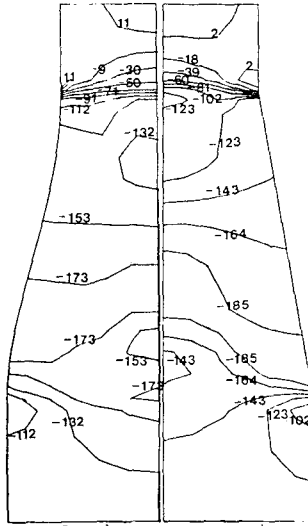


Fig. 12 Comparison of radial stress ( $\sigma_r$ ) distribution between the curved die and the conical die (R.A.=60%)

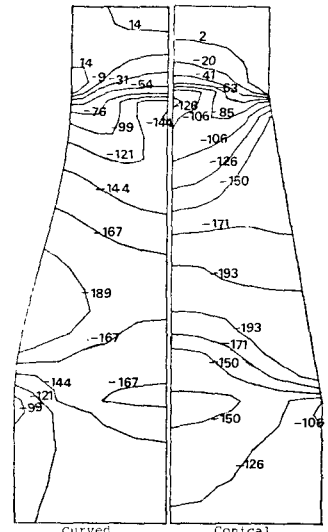


Fig. 13 Comparison of Circumferential stress ( $\sigma_\theta$ ) distribution between the curved die and the conical die (R.A.=60%)

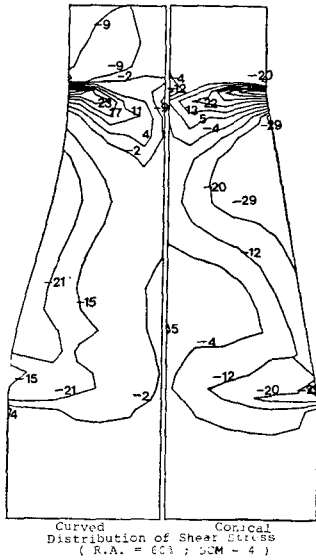


Fig. 14 Comparison of shear stress ( $\tau_{rz}$ ) distribution between the curved die and the conical die (R.A.=60%)

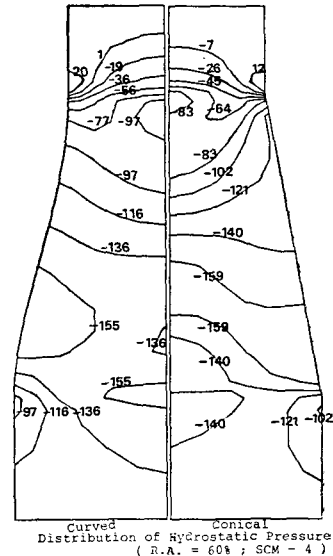


Fig. 15 Comparison of mean stress ( $\sigma_m$ ) distribution between the curved die and the conical die (R.A.=60%)

의 값이 존재하지 않음을 알 수 있고 등가선의 방향은 유선방향으로 존재한다. Fig. 15는 평균응력  $\sigma_m$  분포를 나타내는데 급형 중심부위에서 최대값이 있고 출구를 지나면서 거의 값이 존재하지 않는다.

종합적으로 보면 압출력과 변형 그리드패턴의 예측에 있어 유한요소법이 실험과 잘 일치하므로 이의 예측에 효과적으로 쓸 수 있다. 전반적으로 곡선 급형의 경우가 직선 급형의 경우보다 제품에서 균일한 가공경화를

보여 주고 있고 각 응력성분들의 분포도 대체로 곡선 금형의 경우가 더 고른 분포를 보여 줌을 알 수 있다.

## 6. 결 론

(1) 강소성 유한요소법을 이용하여 여러가지 단면 감소율에 대해 곡선 금형과 직선 금형을 통한 압출에 있어서 각 응력성분들, 변형도, 변형도율, 변형 그리드패턴 등의 제 변형특성을 살펴 보았는데 압출력과 그리드 패턴을 실험과 비교한 결과가 잘 일치하였으며 압출해석에 있어서 강소성 유한요소법의 효율성이 입증되었다.

(2) 직선 금형이 곡선 금형에 비해 소성변형이 더 늦게 끝나고 응력의 값이 전반적으로 높게 분포되어 있다.

(3) 곡선 금형의 경우가 직선 금형보다 전반적으로 훨씬 균일한 변형도 분포를 보이고 있으며 특히 압출제품의 단면에 따른 가공경화특성을 균일한 것으로 나타났다.

(4) 출구를 지나면서  $\sigma_z$  분포에 있어서 인장능력이 존재함은 특기할 만하여 두가지 금형 형태간에 상당한 차이가 있다. 이것은 금형 형태를 바꿈으로써 압출제품 표면의 잔류응력분포에 영향을 줄 수 있다는 것을 시사하고 있다.

## 참 고 문 헌

- (1) O. Richmond, H.L. Morrison and M.L. Devenpeck, "Ideal Metal Forming", Proc. IUTAM Symposium on Metal Forming Plasticity, Aug. 28-Sept. 3, pp. 59~85, 1980
- (2) E.G. Thomsen, C.T. Yang and S. Kobayashi, *Mechanics of Plastic Deformation in Metal Processing*, MacMillan, New York, 1963
- (3) C.H. Lee and S. Kobayashi, "New Solution to Rigid-Plastic Deformation Problems using a Matrix Method", Trans. ASME, J. of Eng. for Industry, Vol. 95, pp. 865~873, 1973
- (4) S. Kobayashi, "Introduction to the Finite Element Method for Metalworking Process Modelling", Lecture Note, University of California, Berkeley, 1980
- (5) T. Murota, T. Jimma and K. Kato, "Analysis of Axisymmetric Extrusion", Bulletin of the JSME, Vol. 13, pp. 1366~1374, 1970
- (6) K. Iwata, K. Osakada and S. Fujino, "Analysis of Hydrostatic Extrusion by the Finite Element Method", Trans. ASME, J. of Eng. for Industry, Vol. 94, pp. 697~703, 1972
- (7) C.H. Lee, H. Iwasaki and S. Kobayashi, "Calculation of Residual Stresses in Plastic Deformation Processes", Trans. ASME, J. of Eng. for Industry, Vol. 95, pp. 283~291, 1973
- (8) E.H. Lee, R.L. Mallet and W.H. Yang, "Stress and Deformation Analysis of the Metal Extrusion Process", SUDAM No. 76-2, Stanford University, June, 1976
- (9) S.N. Shah and S. Kobayashi, "A Theory on Metal Flow in Axisymmetric Piercing and Extrusion", J. Prod. Eng., Vol. 1, 1977
- (10) C.C. Chen, "Finite Element Analysis of Plastic Deformation in Metal Forming Processes", Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley, 1978
- (11) 김병민 · 최재찬 · 백남주, "봉제의 인발가공에서 내부결합에 관한 연구", 대한기계학회추계학술대회초록집, pp. 384~389, 1983
- (12) K. Roll, "Numerische Naehervungsverfahren zur Berechnung von Formaenderung und Spannungen bei Umformverfahren," Ph. D. Dissertation, Universitaet Stuttgart, 1982
- (13) S.I. Oh, "Finite Element Analysis of Metal Forming Processes with Arbitrarly Shaped Dies", Int. J. Mech. Sci., Vol. 24, No. 8, pp. 479~493, 1982
- (14) G.W. Rowe, *Principles of Industrial Metalworking Processes*, Edward Arnold. Ltd., 1977
- (15) K.J. Bathé and A.P. Cimento, "Some Practical Procedure for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 22, pp. 59~85, 1980
- (16) K.J. Bathé and E.L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Inc., 1976