

<論 文>

多層多孔質媒體內的 流體流動

李 忠 求\* · 徐 正 閔\*\*

(1985年 7月 15日 接授)

Fluid Flow in a Multi-Layer Porous Medium

Chung Gu Lee and Jeong Yun Seo

Key Words: Porous Media(多孔質媒體), Unconfined Aquifer(非被壓帶水層), Groundwater(地下水), Linearization(線型化), Unsteady Flow(非定常流動)

Abstract

Unsteady groundwater flow in a three-layer unconfined aquifer has been studied theoretically and experimentally. Two different methods have been used in solving the governing equations of the flow, the nonlinear partial differential equations;

(1) The governing equations are linearized for each layer and approximate solutions are obtained.

(2) The governing equations are transformed to nonlinear ordinary differential equations, which are solved numerically by Runge-Kutta procedure. Fine, middle sized and coarse sands are used in the experiments.

It is found that the solutions from the method(2) (the reduction of partial differential equations to ordinary differential equations) give better agreement with the experimental results than the solution from the method(1).

기 호 설 명

- $c$  : 식 (22)~(24)으로 定義되는 常數
- $f$  :  $\frac{h}{ht}$ 로 定義된 無次元變數
- $h$  : 水頭
- $k$  : 透水係數
- $L$  : 총 길이(cm)
- $m$  : 帶水層內的 比收率
- $Q$  : 帶水層內的 單位幅當流量
- $S_{(t)}$  : 水頭가 下層帶水層의 높이와 같아지는 位置
- $t$  : 時間(sec)

- $V$  : 多孔質媒體內에서의 流體流動速度
- $x$  : 水平距離
- $\alpha$  :  $\frac{a_1}{a_2}$ 로 정의된 무차원수
- $\beta$  : 無次元常數 式 (25)~(27)
- $\lambda$  : 無次元常數 式 (17)
- $\eta$  : 無次元變數( $=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{m_i}{k_i h_i t}}$ )

下 添 字

- $i$  : 最初條件
- $L$  :  $x=L$ 일 때의 條件
- $l$  : 下層 帶水層
- $m$  : 中間層 帶水層

\* 정회원, 충북대학교 공과대학 기계공학과

\*\*정회원, 인하대학교 공과대학 기계공학과

- $u$  : 上層 帶水層
- 0 :  $x=0$  일 때의 條件
- 1 : 水頭가 下層 帶水層의 높이 보다 낮은 경우
- 2 : 水頭가 中間層 帶水層의 높이 보다 낮고 하층 대수층 높이 보다 높은 경우
- 3 : 水頭가 上層 帶水層의 높이 보다 낮고 중간층 대수층 높이 보다 높은 경우

1. 서 론

多孔質媒體內에서의 流體流動에 대한 많은 研究에서 帶水層內의 地下水 흐름<sup>(1-3)</sup>과 多孔質媒體內에서의 氣體의 흐름<sup>(4)</sup>은 類似한 現象으로 나타난다.

보통 地下水의 흐름을 支配하는 微分方程式은 熱傳導方程式과 유사하므로 理論적으로 取扱함에 있어 差異가 없으므로 간단한 地下水流動의 實驗裝置를 利用하여 熱傳達에서 溫度에 따라 熱傳導係數가 變하는 熱傳導問題, 油田에서 기름을 噴揚(pumping)할 때 油面測定, 多孔質媒體內의 氣體流動 등, 여러 種類的의 熱傳導와 多孔質媒體內의 流體流動에 應用할 수 있는 理論的인 解析方法이 論議되어야 할 것이다.

同質帶水層內의 地下水 흐름에 대한 理論解는 잘 알려져 있으나, 帶水層이 서로 다른 性質을 가진 두개의 層으로 된 경우는 Cho<sup>(5)</sup>에 의하여 理論적으로 다루었으나 實驗과 比較하지 않았다.

Lee<sup>(5,6)</sup> 등은 두개 層의 非被壓帶水層內에서의 流體流動에 대한 實驗을 하여 線型解와 比較하였으며, 그 結果는 그리 만족하지 못하였다.

本 研究는 正解를 구하기 어려운 異質의 세계의 層으로 된 非被壓帶水層內에서의 물의 非定常流動에 대한 理論 및 實驗에 대하여 研究하고자 한다.

被壓帶水層(confined aquifer)內의 非定常 地下水流動은 數學적으로 線型이므로 取扱이 간단하나 非被壓帶水層(unconfined aquifer)內의 地下水流動은 數學적으로 非線型이므로 解를 구하기가 어렵다.

이 論文에서는 非線型偏微分方程式을

- (1) 線型化하여 理論解를 구하고
- (2) 常微分方程式으로 變換시켜서 Runge-Kutta 方法으로 구한 解를 實驗結果와 比較檢討하였다.

2. 이 론

2.1. 가정 및 기본방정식

多孔質媒體內의 流體流動速度는 Darcy의 法則에 따

른다. 즉 流體의 流動速度  $V$ 는

$$V = -k\gamma h \tag{1}$$

이다. 여기서  $k$ 는 帶水層 또는 媒體의 透水係數(permeability coefficient)이며,  $h$ 는 水頭이다. 一부호는 流體流動方向이 水頭가 감소하는 方向과 一致함을 의미한다.

非被壓帶水層內의 單位幅當水水平方向의 流量  $Q$ 는

$$Q = -\frac{\partial h}{\partial x} \int_0^h k(z) dz \tag{2}$$

이다.

Fig. 1과 같이 세계 層으로 된 非被壓帶水層內에서의 非定常流動의 解를 구하기 위하여 다음과 같은 假定을 한다.

- (1) 帶水層은 無限히 넓고 各層은 均質(homogeneous)이다.
- (2) 帶水層은 不浸透性의 水平臺 위에 있다.
- (3) 流體의 平均速度는 Darcy의 法則에 따르며, 速度의 垂直成分은 無視된다. 즉 一次元流動으로 假定한다.
- (4) 帶水層에서 나온 물은 즉시 排出되어 貯水池로 흘러 들어가며, 저수지와 水位는 一定하게 유지된다.
- (5) 最初의 水位는 一定하다.
- (6) 각각의 층의 媒體의 透水係數( $k$ )와 比收率( $m$ )의 값은 一定하다.

帶水層內에서의 물의 質量保存에 의하여

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} = m \frac{\partial h}{\partial t} \tag{3}$$

여기서  $h$ 는 位置  $x$ 와 時間  $t$ 에서 不浸透性 水平臺 위의 물 表面의 높이이며,  $m$ 은 帶水層의 比收率(specific yield)이다.

세계 層(잔모래, 중간모래, 굵은모래)에 대하여 식 (2)를 식 (3)에 대입하여 정리하면 각각의 층에 대하여

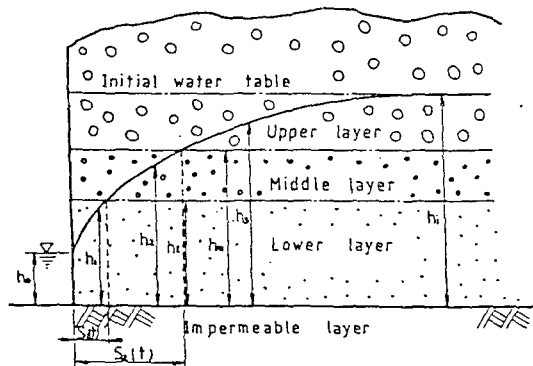


Fig. 1 Groundwater flow in a 3-layer aquifer(unsteady flow)

다음과 같은 기본방정식을 얻을 수 있다<sup>(5)</sup>(Fig. 1 참조).

- 下層인 경우

$$0 < x < S_{1(t)}, t > 0 \text{ 일 때}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) = m_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad (4)$$

- 中間層인 경우

$$S_{1(t)} < x < S_{2(t)}, t > 0 \text{ 일 때}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \{ (k_1 - k_m) h_1 + k_m h_2 \} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right] = m_m \frac{\partial h_2}{\partial t} \quad (5)$$

- 上層 ( $x > S_{2(t)}, t > 0$ )인 경우

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \{ (k_1 - k_m) h_1 + (k_m - k_u) h_m + k_u h_3 \} \frac{\partial h_3}{\partial x} \right] = m_u \frac{\partial h_3}{\partial t} \quad (6)$$

初期條件과 境界條件은 다음과 같다.

$$t=0, x > 0 \text{ 일 때 } h_3 = h_i \quad (7)$$

$$x=0, t > 0 \text{ 일 때 } h_1 = h_0 \quad (8)$$

$$t > 0, x \rightarrow \infty \text{ 일 때 } h_3 = h_i \quad (9)$$

$$x = S_{1(t)}, t > 0 \text{ 일 때 } h_1 = h_2 = h_i \quad (10)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial x} \quad (11)$$

$$x = S_{2(t)}, t > 0 \text{ 일 때 } h_2 = h_3 = h_m \quad (12)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{\partial h_3}{\partial x} \quad (13)$$

여기서

$S_{1(t)}$ 는  $h_1 = h_2 = h_i$  인 지점이고,

$S_{2(t)}$ 는  $h_2 = h_3 = h_m$  인 지점이다.

### 2.2. 常微分方程式으로의 變換

偏微分方程式을 常微分方程式으로 變換하기 위하여 無次元變數  $\eta \left( = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{m_1}{k_1 h_1 t}} \right)$  를 定義하고  $h(x, t)$  를  $\eta$  만의 함수라고 가정하면 식 (4)~(6)은 다음과 같은 常微分方程式으로 變換시킬 수 있다.

- 下層의 경우 ( $0 < \eta < \lambda_1, f_0 < f_1 < f_i$  일 때)

$$\frac{d}{d\eta} \left( f_1 \frac{df_1}{d\eta} \right) + 2\eta \frac{df_1}{d\eta} = 0 \quad (14)$$

- 中間層의 경우 ( $\lambda_1 < \eta < \lambda_2, f_1 < f_2 < f_m$  일 때)

$$\frac{d}{d\eta} \left\{ (f_2 + \alpha_2) \frac{df_2}{d\eta} \right\} + 2\eta \beta_2 \frac{df_2}{d\eta} = 0 \quad (15)$$

- 上層의 경우 ( $\eta > \lambda_2, f_m < f_3 < f_i$  일 때)

$$\frac{d}{d\eta} \left\{ (f_3 + \alpha_3) \frac{df_3}{d\eta} \right\} + 2\eta \beta_3 \frac{df_3}{d\eta} = 0 \quad (16)$$

여기서  $\lambda_1$  과  $\lambda_2$  는 各各

$$S_{1(t)} = 2\lambda_1 \sqrt{k_1 h_1 t / m_1} \quad (17a)$$

$$S_{2(t)} = 2\lambda_2 \sqrt{k_1 h_1 t / m_1} \quad (17b)$$

로 定義되는 다음에 결정되는 常數이다. 식 (14)~

(17)은 다음과 같은 一般式으로 表示할 수 있다.

$$\frac{d}{d\eta} \left\{ (f_j + \alpha_j) \frac{df_j}{d\eta} \right\} + 2\beta_j \eta \frac{df_j}{d\eta} = 0, j=1, 2, 3 \quad (18)$$

이다.

식 (14)~(17), 또는 식 (18)은 非線型이며, Runge-Kutta 方法으로 數值的인 解를 구할 수 있으며, 그 結果는 Fig. 3~5에 實線으로 表示하였다.

### 2.3. 線型化方法

식 (4)~(6)은 非線型 偏微分方程式이며, 各 式을 線型化하기 위하여 平均透水係數를 사용하면

$$f_1 = f_0 + (f_i - f_0) \frac{\text{erf}(c_1 \eta)}{\text{erf}(c_1 \lambda_1)}, \quad 0 < \eta < \lambda_1 \quad (19)$$

$$f_2 = f_m - (f_m - f_i) \frac{\text{erf}(c_2 \eta) - \text{erf}(c_2 \lambda_2)}{\text{erf}(c_2 \lambda_1) - \text{erf}(c_2 \lambda_2)}, \quad \lambda_1 < \eta < \lambda_2 \quad (20)$$

$$f_3 = 1 - (1 - f_m) \frac{\text{erf}(c_3 \eta)}{\text{erf}(c_3 \lambda_2)} \quad (21)$$

여기서

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{f_0 + f_i}} \quad (22)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{2\beta_2}{2\alpha_2 + f_i + f_m}} \quad (23)$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{2\beta_3}{2\alpha_3 + f_m + 1}} \quad (24)$$

이고

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1 \quad (25)$$

$$\alpha_2 = \frac{(k_1 - k_m)}{k_m} f_i, \beta_2 = \frac{k_1}{k_m} \frac{m_m}{m_1} \quad (26)$$

$$\alpha_3 = \frac{(k_1 - k_m) f_i + (k_m - k_u) f_m}{k_u}, \beta_3 = \frac{k_1}{k_u} \frac{m_u}{m_1} \quad (27)$$

이다. 식 (19)~(21)을 境界조건 式 (10)~(13)에 代入하고 定理하면

$$\frac{c_2}{c_1} \frac{e^{(c_2^2 - c_1^2)\lambda_2^2} \text{erf}(c_1 \lambda_1)}{\{ \text{erf}(c_2 \lambda_2) - \text{erf}(c_2 \lambda_1) \}} = \frac{f_i - f_0}{f_m - f_i} \quad (28)$$

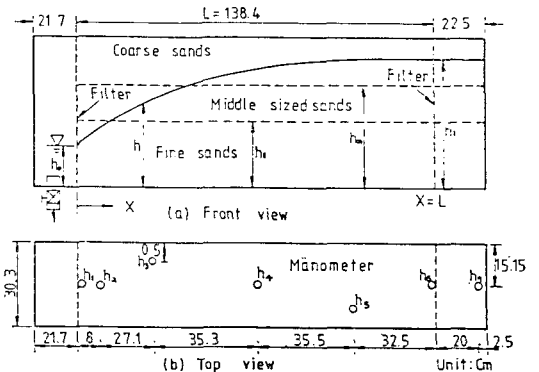


Fig. 2 Experimental setup(3-layer aquifer)

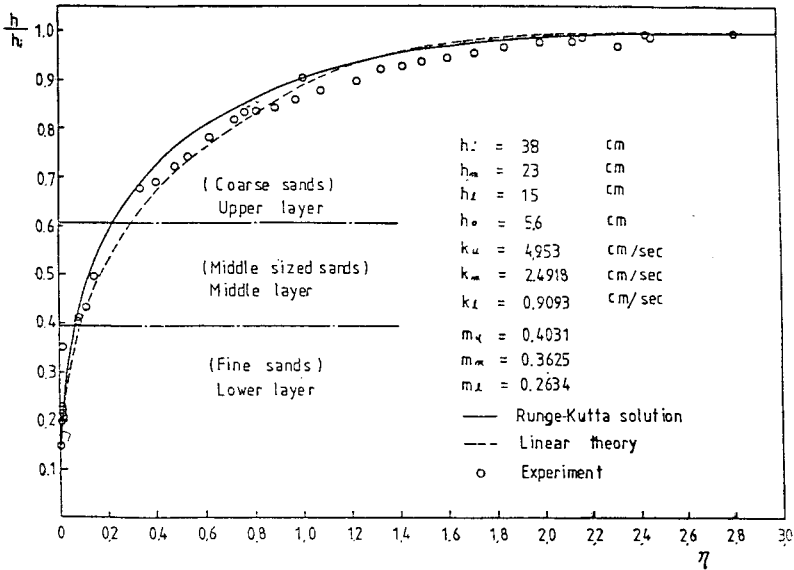


Fig. 3 Unsteady groundwater flow in a 3-layer aquifer

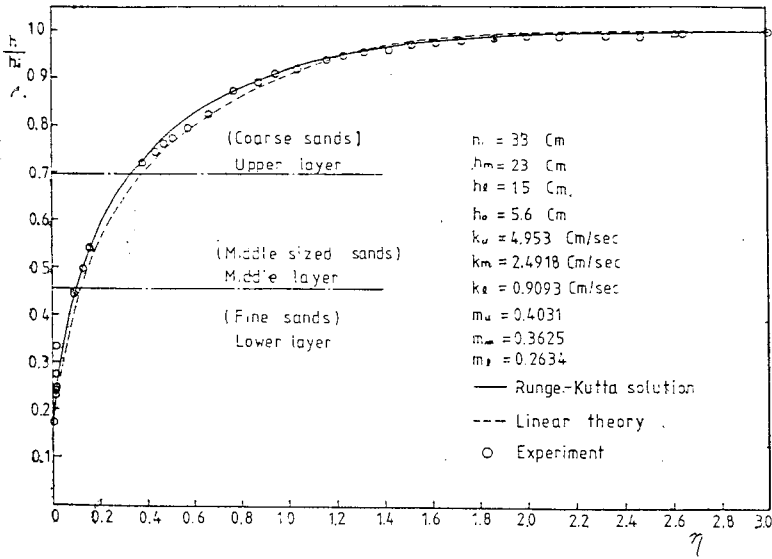


Fig. 4 Unsteady groundwater flow in a 3-layer aquifer

$$\frac{c_3}{c_2} \frac{\{ \text{erf}(c_2 \lambda_2) - \text{erf}(c_2 \lambda_1) \}}{e^{(c_2^2 - c_3^2) \lambda_2^2} \text{erf}(c_3 \lambda_2)} = \frac{f_m - f_i}{1 - f_m} \quad (29)$$

을 얻으며, 이 두식을 連立하여 풀어서 常數  $\lambda_1$  과  $\lambda_2$  구하고 식 (19)~(21)에 代入하여 水頭를 구하며, 그 結果가 Fig. 3~5에 點線으로 表示하였다.

### 3. 실험

#### 3.1. 실험장치

실험에 使用된 장치는 총 길이 182.6cm(L=138.4

cm), 幅 30.3cm, 높이 45.6cm로 두께가 0.5cm인鐵板으로 水槽를 만들고, 前面은 0.5cm의 유리판으로 되어 있어서 各層의 帶水層과 물의 流動狀態를 관찰할 수 있게 하였고, 右側端에서 22.5cm와 左側端(게이트가 있는 쪽)에서 21.7cm씩, 안쪽의 모래가 나가지 못하도록 60mesh의 필터(filter)를 交替하여 끼울 수 있도록 만들었으며, 물의 流出口는 直徑 5.08cm의 슬루우스 밸브(slucive valve)를 부착하였다.

水槽의 下層에는 10~20mesh, 中間層에는 8~10mesh,

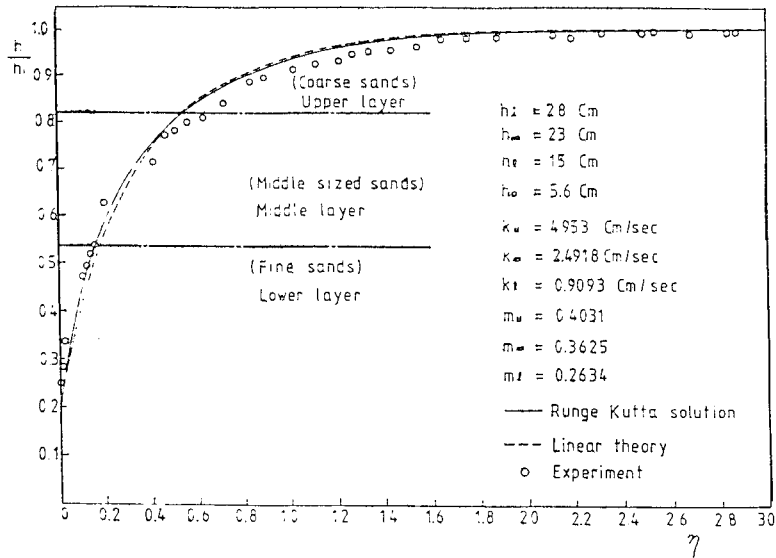


Fig. 5 Unsteady groundwater flow in a 3-layer aquifer

上層에는 4~8mesh 사이의 試料(모래)를 使用하였다. 下層은 15cm, 中間層은 8cm, 上層은 15cm이며 이 세 가지 試料의 比數率( $m$ )과 透水係數( $k$ )는 實驗前後에 別途로 各各 測定하였으며, 測定方法은 참고문헌 (5)에 說明되어 있고, 實驗裝置의 概略圖는 Fig. 2에 있다.

3.2. 실험방법

세가지의 試料를 水平으로, 全體높이 38cm, 33cm, 28cm로 하고, 슬루우스 밸브를 닫고 上記의 全體높이 까지 各各 물을 채운 후 갑자기 슬루우스 밸브를 열어 서 물의 流入 쪽의 높이  $h_i$ 가 降下하기 前까지의 各 各 各 測定하여 2초 간격으로 3회씩 測定하여 平均值를 使用하였다[참고문헌 (5) 참조].

4. 결과 및 토의

Fig. 3, 4, 5에 세개 층에 대한 實驗結果를 偏微分方程式을 各層에 線型化한 식 (19)~(21)과 常微分方程 (14)~(16)을 Runge-Kutta 方法으로 구한 解를 比較한 것이다.

Fig. 3, 4, 5에서 點線은 偏微分方程式을 線型化한 값이고, 實線은 常微分方程式을 Runge-Kutta 方法에 의한 理論 값을 나타내고 있다.

線型化한 理論値와 實驗値는 一般적으로 一致하고 있으며 最初水位( $h_i=38cm$ )가 높은 경우에는 게이트(gate)에 가까운 쪽( $\eta < 0.6$  범위)에서 잘 一致하고

$\eta > 0.8$ 에서는 약간의 誤差가 있으며, 實驗値에 比하여 높은 水頭를 나타내고 있다.

또한 線型化한 理論値는 Runge-Kutta 解에 比하여  $\eta=0.2$  범위에서 最大相對誤差를 나타내며, 그 誤差는 最初水位가 38cm일 때 11.67%, 33cm일 때 6.38%, 28cm일 때 3.55%이다. 따라서 最初水位가 낮을수록 誤差가 작음을 알 수 있다.

常微分方程式의 理論値는 實驗値와 잘 一致하고, 특히  $\eta < 0.2$  범위에서 實驗値와 잘 一致하고 있다.

一般적으로 實驗値가 理論値보다 水頭가 빨리 降下하였으며, 線型化한 값보다 Runge-Kutta 解가 實驗結果와 잘 一致하고 있음을 알 수 있다. 따라서 水頭( $h$ )를  $\eta$ 만의 函數로 가정하고 계산한 결과 잘 맞으므로  $h$ 는  $\eta$ 만의 函數임을 알 수 있다.

理論値와 實驗値 사이의 오차발생의 중요한 이유는 다음과 같이 생각할 수 있다.

- (1) 필터( $x=0$ ) 근처에서 垂直方向의 물의 速度成分이 비교적 크기 때문에 오차가 발생할 수 있다.
- (2) 帶水層이 無限하다고 가정하였으나 실제의 실험 장치의 길이가 有限( $L=138.4cm$ )하므로 실험결과가 理論値보다 작게 나타나고 있다.

本 論文에서는 세개 층으로 된 帶水層의 경우만을 다루었으나 그 以上の 多層에서 서로 다른 종류의 性質을 가진 媒體의 帶水層內에서의 流體流動에 대해서도 같은 方法으로 解析할 수 있다.

## 5. 결 론

性質이 서로 다른 多層多孔質媒體內的 流體流動에 대하여 理論 및 實驗의인 研究에서 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 非定常流動에서 實驗結果에 比하여 線型化한 理論値는  $\eta=0.19$  범위에서 10.54%, 常微分方程式의 解는 6.39%의 最大相對誤差를 나타낸다.

(2) 線型化한 값은  $x/\sqrt{t}$ 가 작을 때 ( $\eta < 0.6 \sim 0.8$  범위)에는 實驗値보다 작은 水頭,  $x/\sqrt{t}$ 보다 클 때 ( $\eta > 0.6 \sim 0.8$  범위)에는 實驗値보다 큰 水頭 값이 됨을 알 수 있다.

(3) 常微分方程式의 解는 一般的으로 上層 境界面 以下( $\eta < 0.3$ )에서 實驗値와 잘 一致하며, 그 以上( $\eta > 0.3$ )의 범위에서는 약간의 誤差가 있으나 대체적으로 一致함을 알 수 있다.

(4) 流速의 垂直成分을 無視하고 一次元으로 解析한 結果는 實驗値와 工學적으로 만족할 만큼 잘 一致한다. 따라서 流速의 垂直成分을 고려하지 않아도 된다.

(5) 非線型 偏微分方程式을 線型化한 解보다는 常微分方程式으로 變換하여 Runge-Kutta 方法에 의하여 구

한 理論解가 正確하며, 一般的으로 그 方法을 使用하는 것이 더 바람직하다.

## 참 고 문 헌

- (1) J. Bear, D. Zaslavsky and S. Irmay(eds), "Physical Principles of Water Percolation and Seepage", UNESCO, 1968
- (2) W.G. Yeh, "Nonsteady Flow to Surface Reservoir", J. Hydraulics Div., Proc. ASCE. Vol. 96, No. HY 3, pp. 609~618, 1970
- (3) S.H. Cho, "Unsteady Groundwater Flow in a Two-Layer Aquifer", 陸軍士官學校論文集, Vol. 10, pp. 286~301, 1972
- (4) R.E. Kidder, "Unsteady Flow of Gas Through a Semi-Infinite Porous Medium", J. of Appl. Mech, Trans. ASME, Vol. 24, pp. 329~332, 1957
- (5) 李忠求, 趙星煥, "多孔質媒體內的 流體流動", 大韓機械學會誌, 第16卷 第1號, pp. 49~53, 1976
- (6) C.G. Lee, J.Y. Seo and S.H. Cho, "A Study of Liquid Flow in a Porous Medium", CANCAM, 85, 1985