18 大韓機械學會論文集 第9卷 第1號 pp. 18~23 1985.

<論 文>

편심 경사균열을 가진 판이 순수굽힘을 받는 경우의 응력확대계수†

최 선 호*·조 상 봉**

(1984년 7월 9일 접수)

Stress Intensity Factors of a Sheet with an Eccentrically Inclined Crack Subjected to Pure Bending

Sun Ho Choi and Sang Bong Cho

Key Words; 편심경사균열, 순수굽힘, 등각사상함수, 복소응력함수, 응력확대계수

Abstract

In the fracture mechanics, the determination of the stress intensity factor value is vital for the prediction of a material fracture behavior. So many data concerning to the S.I.F. have been presented by many investigators to meet endless requrement. In this paper, the stress intensity factors of a sheet with an eccentrically inclined crack subjected to the pure bending moment were investigated theoretically by using of the complex mapping function to determine the Muskelishvili's complex stress functions.

Moreover, the theoretical value was compared with the result obtained from photoelastic experiment. As a result, it was confirmed that both values coincided with satisfactorily within the margin of 2~3% devition; The results theoretically derived are right.

1. 서 론

파괴역학에서 균열 주위의 응력상태를 연구하는 것이 중요하다는 것은 잘 알려진 사실이며 2차원 문제에서 여러가지 형상 및 하중상태 등을 고려한 많은 연구가 있고[1,2,3,5], 또한 연구되고 있는 상태이다.

지금까지의 연구 동향을 보면 순수굽힘을 받는 판에 몇가지 모양의 구멍이 있는 경우 응력집중현상을 해석한 것[4]과 균열 경사각이 90°인 내부균열을 가진 판을 연구한 것[5]은 발견하였다.

그런데 임의의 균열 경사각을 가지며 순수 굽힘을 받는 판에 대한 연구는 많은 자료 조사 결과[2,3,5]에서 볼 수 없었으며 균열 경사각이 90°인 경우는 개구형(opening mode)이지만 임의의 균열 경사각일 때는 혼합형(mixed mode)으로 되어 응력확대계수 K_I, K_{II}가 존

†1984년도 대한기계학회 춘계학술대회(4.28)에서 발표

*정회원, 영남대학교 공과대학 기계설계학과
**정회원, 경남대학교 공과대학 기계설계학과

재하게 되며 이 경우의 해석은 응력확대계수의 기본자료가 될 수 있다고 생각되어 진다.

그런데, 응력을 해석하는 방법으로는 복소응력함수를 사용하는 방법[6,7,8], 실험적으로 광탄성법[9]등이 있으며, 본 논문에서는 편심 경사진 균열을 가진 판이 순수굽힘을 받는 경우에 등각사상함수를 발견하고 등각사상법에 의한 복소응력함수를 사용하여 응력확대계수의 근사이론식을 구하고 광탄성 실험을 통하여 비교고찰하였다.

2. 기초이론

평면문제의 응력을 해석하는데 Muskhelishvili의 복소응력함수 $\phi(z)$, $\psi(z)$가 많이 사용되고 있고, $Z=w(\varphi)$라는 등각사상함수를 사용하는 경우에 $\phi(z)\equiv\phi[w(z)]$은 $\phi(\varphi)$로 되고 $\phi'(z)=\phi'(\varphi)/w'(\varphi)$등으로 표시될 수 있다. 여기서 프라임(prime)은 미분표시이다. 복소응력함수의 미분치와 복소응력함수등으로 응력, 변위, 외력을 다음과 같이 표시할 수 있다[8].

응력은

$$\sigma_x+\sigma_y=4R_e[\phi'(\varphi)/w'(\varphi)] \tag{1}$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=\frac{2}{w'(\varphi)}\left[\overline{w(\varphi)}\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{\phi'(\varphi)}{w'(\varphi)}\right\}+\psi'(\varphi)\right] \tag{2}$$

이고, 변위는 다음과 같다.

$$2G(u+iv)=\eta\phi(\varphi)-\frac{w(\varphi)}{\overline{w'(\varphi)}}\overline{\phi'(\varphi)}-\overline{\psi(\varphi)} \tag{3}$$

여기서

$$\eta=\begin{cases}3-4v & \text{(평면 변형율)}\\ (3-v)/(1+v) & \text{(평면 응력)}\end{cases}$$

이고, 경계에 작용하는 외력의 표현은

$$\phi(\varphi)+\frac{w(\varphi)}{\overline{w'(\varphi)}}\overline{\phi'(\varphi)}+\overline{\psi(\varphi)}=f_1+if_2=i\int_s(X_n+iY_n)ds \tag{4}$$

이고, 여기서 X_nds와 Y_nds는 경계요소 ds에 작용하는 외력의 수평(x), 수직(y) 성분이다.

그리고 앞에서 사용한 bar는 공액복소함수를 뜻한다.

그리고, 균열변에 외력이 없음을 표현하는데 Muskhelishvili의 확장 개념을 사용할 수 있고 S_φ^+와 S_φ^-가 φ평면에서 단위원의 외부와 내부라면 함수 $\phi(\varphi)$는 다음과 같이 정의하므로서 S_φ^-에 확장 되어질 수 있다[10].

$$\phi(\varphi)=-w(\varphi)\overline{\phi}'(1/\varphi)\overline{w}'(\varphi)-\overline{\psi}(1/\varphi)\quad\varphi\in S_\varphi^- \tag{5}$$

여기서 bar는

$$\overline{f}(1/\varphi)\equiv\overline{f(1/\overline{\varphi})} \tag{6}$$

과 같다.

그리고 함수 $\psi(\varphi)$는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\psi(\varphi)=-\overline{\phi}(1/\varphi)-\overline{w}(1/\varphi)\phi'(\varphi)/w'(\varphi)\quad\varphi\in S_\varphi^+ \tag{7}$$

그리고, Mode Ⅰ, Ⅱ의 혼합형 균열의 응력확대계수를 Sih가 Muskhelishvili의 복소응력함수로 표현하였으며 다음과 같다[11].

$$K_\text{Ⅰ}-iK_\text{Ⅱ}=2\sqrt{\pi}\,\phi'(r_e)/[e^{i\delta}w''(r_e)]^{1/2} \tag{8}$$

여기서 r_e는 φ평면에서 균열첨단이고, 식 (6)의 응력확대계수는 Fig. 1과 같은 좌표계 균열의 경우에 해당한다.

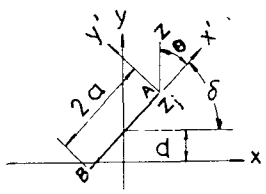


Fig. 1 Crack on the Z plane

3. 사상함수

Fig. 2에서와 같이 해결하고자 하는 실제 물리평면을 φ평면에 다음식으로 사상할 수 있다.

$$Z=w(\varphi)=\frac{a}{2}\left(\varphi+\frac{1}{\varphi}\right)e^{i\alpha}+id \tag{9}$$

이 때에 균열경계는 단위원상에 균열 외부는 단위원 외부에 사상된다. 여기서 α는 x축과 균열방향이 이루는 각이고, d는 중립축에서 균열중심이 편심된 길이며, a는 균열길이의 반이다.

그런데 유한판의 경우에 변의 영향을 고려하는 것은 상당히 복잡하게 되므로 변의 영향을 무시할 수 있는 정도로 충분히 큰 판의 경우로 생각하여 무한판으로 등각사상시키도록 한다.

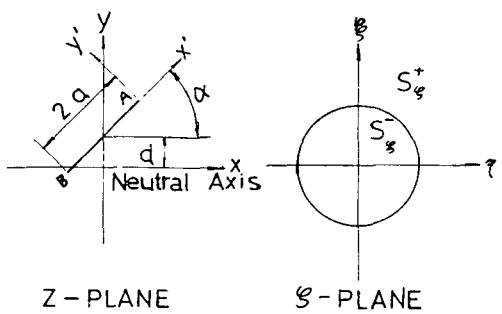


Fig. 2 Mapping

4. 해 석

4.1. 복소응력함수의 결정

Fig. 3과 같이 편심 경사진 균열을 가진 판이 순수 굽힘을 받는 경우의 복소응력함수는 결함이 없는 판의 응력함수에 균열의 응력함수를 더한 것과 같으므로 다음과 같이 표현할 수 있다[6].

$$\phi(\varphi)=\phi_0(\varphi)+i\frac{M}{8I}[w(\varphi)]^2 \tag{10}$$

$$\psi(\varphi)=\psi_0(\varphi)-i\frac{M}{8I}[w(\varphi)]^2 \tag{11}$$

여기서 M는 굽힘모우멘트이고 I는 단면 2차모우멘트이다. 그리고 $\phi_0(\varphi)$와 $\psi_0(\varphi)$는 균열에 의해 생기는 응력함수로서 해석적이라야 한다. 따라서 다음과 같은 정칙함수로 잡을 수 있다.

$$\phi_0(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\varphi^{-n} \tag{12}$$

$$\psi_0(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\varphi^{-n} \tag{13}$$

여기서 A_n와 B_n는 복소계수이다.

φ평면의 단위원상 $\varphi=e^{i\theta}=\sigma$에서는

$$\phi(\sigma)+\frac{w(\sigma)}{w'(\sigma)}\overline{\phi'(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}=f_1+if_2 \tag{14}$$

이 되고 식 (10)(11)과 식 (14)에서

$$\begin{aligned}\phi_0(\sigma)+\frac{w(\sigma)}{w'(\sigma)}\overline{\phi_0'(\sigma)}+\overline{\psi_0(\sigma)}&=f_1+if_2-i\frac{M}{8I}[w(\sigma)-\overline{w(\sigma)}]^2\\&=f_1^0+if_2^0\end{aligned} \tag{15}$$

이 된다. 여기서 균열 경계에서 외력이 없으므로 즉, $f_1+if_2=0$이므로

$$\begin{aligned}f_1^0+if_2^0=\phi_0(\sigma)+\frac{w(\sigma)}{w'(\sigma)}\overline{\phi_0'(\sigma)}+\overline{\psi_0(\sigma)}\\=-i\frac{M}{8I}[w(\sigma)-\overline{w(\sigma)}]^2\end{aligned} \tag{16}$$

이 되고 공액함수는

$$\begin{aligned}f_1^0-if_2^0=\overline{\phi_0(\sigma)}+\frac{\overline{w(\sigma)}}{w'(\sigma)}\phi_0'(\sigma)+\phi_0(\sigma)\\=i\frac{M}{8I}[\overline{w(\sigma)}-w(\sigma)]^2\end{aligned} \tag{17}$$

이 된다.

식 (16)(17)로부터 다음식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\phi_0(\varphi)-\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\frac{w(\sigma)}{w'(\sigma)}\overline{\phi_0'(\sigma)}\,\frac{d\sigma}{\sigma-\varphi}\\=-\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\frac{f_1^0+if_2^0}{\sigma-\varphi}d\sigma\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\phi_0(\varphi)-\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\frac{\overline{w(\sigma)}}{w'(\sigma)}\phi_0'(\sigma)\,\frac{d\sigma}{\sigma-\varphi}\\=-\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\frac{f_1^0-f_2^0}{\sigma-\varphi}d\sigma\end{aligned} \tag{19}$$

식 (18)(19)에서 $\phi_0(\varphi)$와 $\psi_0(\varphi)$를 구할 수 있으며 φ에 관한 계수를 비교하여 다음 결과를 얻는다.

$$\phi_0(\varphi)=i\frac{M}{8I}\left(4ad\frac{1}{\varphi}\sin\alpha+a^2\frac{1}{\varphi^2}\sin^2\alpha\right) \tag{20}$$

식 (20)을 식 (10)에 대입하여

$$\begin{aligned}\phi(\varphi)=i\frac{M}{8I}\Big[4ad\frac{1}{\varphi}\sin\alpha+a^2\frac{1}{\varphi^2}\sin^2\alpha\\+\left\{\frac{a}{2}\left(\varphi+\frac{1}{\varphi}\right)e^{i\alpha}+id\right\}^2\Big]\end{aligned} \tag{21}$$

이 된다.

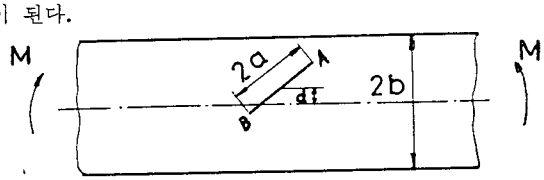


Fig. 3 Sheet configuration

4.2. 응력확대계수의 계산

φ평면에서 A점은 $\varphi=r_e=1$이고, $\delta=\alpha$일 때이므로 이 점의 응력확대계수는

$$K_{IA}-iK_{IIA}=2\sqrt{\pi}\,\phi'(1)/[e^{i\alpha}w''(1)]^{1/2} \tag{22}$$

이 되고, K_{IA}와 K_{IIA}를 분리하면 각각

$$K_{IA}=-\frac{M}{2I}\sqrt{\pi a}(2d+a\sin\alpha)\sin^2\alpha \tag{23}$$

$$K_{IIA}=\frac{M}{2I}\sqrt{\pi a}(2d+a\sin\alpha)\cos\alpha\sin\alpha \tag{24}$$

이고, B점의 응력확대계수는 $\varphi=r_e=-1$이고, $\delta=\pi+\alpha$일 때이므로

$$K_{IB}=-\frac{M}{2I}\sqrt{\pi a}(2d-a\sin\alpha)\sin^2\alpha \tag{25}$$

$$K_{IIB}=\frac{M}{2I}\sqrt{\pi a}(2d-a\sin\alpha)\cos\alpha\sin\alpha \tag{26}$$

을 얻는다.

5. 고 찰

균열 경사각 α가 90°이고 편심길이 d가 0(零)인 판의 응력확대계수는 식 (23),(25)에서

$$K_{IA}=-\frac{M}{2I}\sqrt{\pi a}\cdot a \tag{27}$$

$$K_{IIB}=\frac{M}{2I}\sqrt{\pi a}\cdot a \tag{28}$$

로 된다. 여기서 K_{IA}는 압축부의, K_{IB}는 인장부의 응력확대계수이다. 여기서 판두께를 단위 두께로 폭을

$2b$ 로 하면 $b \gg a$ 일 때 참고문헌 (5)에서와 같은 Isida 및 Savin의 결과식을 식 (28)에서 얻을 수 있으며 다음과 같다.

$$K_0 = 3\sqrt{\pi}\, Ma^{3/2}/(4b^3) \tag{29}$$

그리고, $\alpha = 90°$ 이고, $d \fallingdotseq 0$ 인 판의 경우는 무차원으로 표시하면 압축부쪽 변에 가까운 균열첨단에서

$$K_{IA}/K_0 = -(2d/a+1) \tag{30}$$

이 되고, 그 다른 반대쪽은

$$K_{IB}/K_0 = -(2d/a-1) \tag{31}$$

로 되어 참고문헌 (5)의 Savin의 결과식과 일치하는 식을 얻게된다.

여기서 $d>0$ 이면 균열 중앙부가 압축부쪽에 있으며 $d<0$ 이면 인장부쪽에 있다.

그리고 일반적인 경우로 d/a의 변화와 α의 변화에 대한 응력확대계수를 K/K_0로 무차원화하여 표시하면

$$K_{IA}/K_0 = -(2n+\sin\alpha)\sin^2\alpha \tag{32}$$

$$K_{IIA}/K_0 = (2n+\sin\alpha)\cos\alpha\sin\alpha \tag{33}$$

$$K_{IB}/K_0 = -(2n-\sin\alpha)\sin^2\alpha \tag{34}$$

$$K_{IIB}/K_0 = (2n-\sin\alpha)\cos\alpha\sin\alpha \tag{35}$$

이 되고, 여기서 n는 d/a이다.

Fig. 4, 5는 n가 양(+)쪽으로 변화할 때 각각 A와 B점의 응력확대계수를 무차원 값으로 나타낸 것이다.

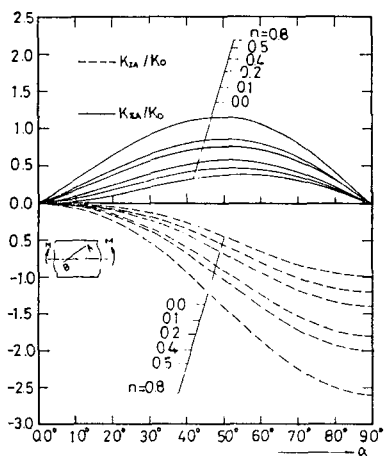


Fig. 4 Nondimensionalized stress intensity factors of the crack tip A

그리고, A와 B점에서 응력확대계수비 K_{II}/K_I는 식 (23)에서 식 (26)으로부터

$$K_{IIA}/K_{IA} = K_{IIB}/K_{IB} = -\cot\alpha \tag{36}$$

을 얻을 수 있고 식 (37)에 대입하여 Fig. 6과 같이 최대전단응력 τ_{max}이 최소로 되는 각도 θ_0를 α에 대해 이론적으로 구할 수 있다.

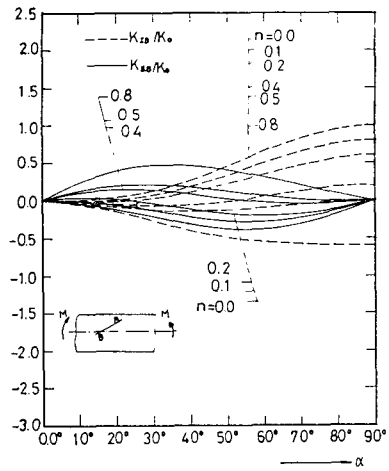


Fig. 5 Nondimensionalized stress intensity factors of the crack tip B

$$(K_I/K_{II})^2 - 4/3\left(\frac{K_{II}}{K_I}\right)\cot 2\theta_0 - \frac{1}{3} = 0 \tag{37}$$

여기서 θ_0는 Fig. 7에서 보는 것과 같다. 이 이론치와 비교하기 위하여 α가 30°, 45°, 60°의 경우를 광탄성 실험하였고 Fig. 8은 광탄성 사진의 일부이다.

이 광탄성 사진에서 θ_0를 측정하였고 θ_0의 이론치와 실험치는 Table 1에서 볼 수 있는 바와 같이 거의 잘 일치하며 이 두 값의 일치는 근사이론식에서 구한 K_{II}/K_I가 정확하다는 의미이며 근사이론식이 타당하다는 간접적 증명이 된다.

직접적으로 광탄성 실험에서 K_I, K_{II}를 구하고 이론치와 비교하는 것은 변의 효과를 무시한 근사이론식이므로 오차가 생기게 될 것이며 별 의미가 없는 것으로 생각된다.

또한, 균열 경사각이 90°인 경우는 본 논문에서 유도한 근사이론식과 Isida 및 Savin의 결과식과 일치하였으므로 임의의 균열 경사각에서도 간접적으로 타당성이 있음이 유추될 수 있고 균열 경사각이 0°인 경우는 Figs. 4, 5에서 볼 수 있듯이 특이응력이 발생되지 않았으며, Fig. 4에서 K_I은 α가 0°에서 90°로 될수록 절대치가 커지며 K_{II}는 0에서 커지다가 다시 작아져서 0으로 된다. 이것은 모두 논리에 맞으며 또한 n

Table 1 Comparision with theoretical and experimental value θ_0

θ_0 \ α	30°	45°	60°
Theoretical value	69.56°	58.28°	45°
Experimental value	68°~72°	56°~60°	44°~47°

가 커지면 즉 A점이 변에 가까와 질수록 응력확대계수가 커지는 것 또한 논리에 잘 맞으므로 이상의 고찰에서 근사이론식은 타당함을 알 수 있다.

그런데 앞서 구한 식 (23)(25)(27) 등에서 보면 K_I이 음(−)이 된다. 이것은 균열이 압축되는 것을 의미하므로 이상적인 균열이라면 균열변이 밀착되게 되므로 있을 수 없는 경우이다. 그러나 균열간격이 있어 서로 밀착되지 않는 경우라면 특이응력이 광탄성 실험에서와 같이 나타나게 된다. 균열진전과 같은 이상적 균열인 경우에는 K_I의 음은 있을 수 없는 무의미한 것이 될 것이며 사용될 수 없으나 순수굽힘외에 다른 인장이 동시에 걸려 균열을 열게 될 때에는 사용할 수 있을 것이다. 즉 순수굽힘응력만 작용하고 이상적 균열을 가진 판이라면 A점, B점의 K_I 값이 양(+)일 때만 의미가 있게 되어 실제 문제에 적용할 수 있다.

그리고, 유한판을 해석하려면 변의 경계조건을 고려해야만 하며 보정예로써 균열 경사각 α가 90°이고 순수굽힘을 받는 판의 경우에 Isida의 연구 결과가 Fig. 9에서와 같다[5].

그러나, $b \gg a$인 경우는 본 논문에서 유도한 근사이론식이 충분한 정도를 가질 것으로 생각된다.

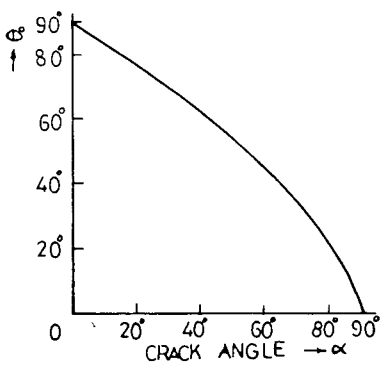
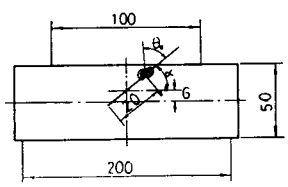


Fig. 6 Crack angle versus angle which the maximum shearing stress has a minimum value



Dimension(mm)

Fig. 7 Specimen

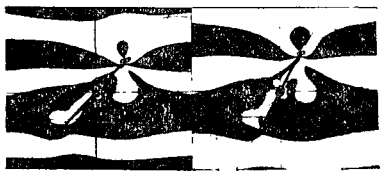


Fig. 8 Isochromatic fringe patterns

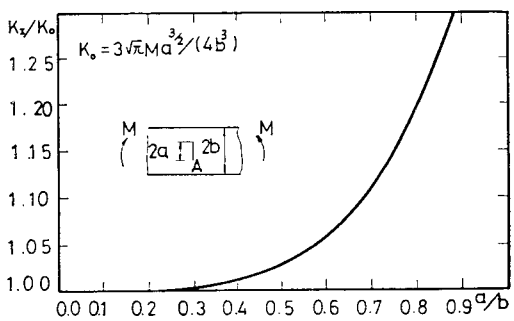


Fig. 9 K_I for tip A of a central crack in a finite width sheet subjected to a uniform bending moment

6. 결 론

(1) 편심 경사진 균열을 가진 판이 순수굽힘을 받는 경우 응력확대계수의 근사이론식을 구하였다.

(2) 이 결과식에서 균열 경사각 α가 90° 인 경우는 Savin의 결과와 일치하였고

(3) 임의의 균열 경사각 α에서도 근사이론식을 적용할 수 있음을 실험을 통하여 알 수 있었다.

(4) 판의 크기가 균열길이에 비해 그다지 크지 않는 판에서는 보정이 필요하다.

(5) 순수굽힘만 작용하는 경우에서는 본 논문에서 유도한 근사이론식의 K_I 값이 모두 양(+)일 때만 유용하다.

참 고 문 헌

(1) H. Liebowitz, Fracture, Vol. 2, chap. 2,3, pp. 67~311, Academic Press, 1968

(2) 岡村弘之, 線形破壞力學入門, pp. 212~222, 培風館, 1976

(3) 石田誠, き裂の彈性解析と應力擴大係數, pp. 132～223, 培風館, 1976

(4) G.N. Savin, Stress Concentration Around Holes, pp. 41～204, Pergamon Press, 1961

(5) D.P. Rooke & D.J. Cartwright, Compendium of Stress Intensity Factors, p. 12, Her Majesty's Stationery Office, 1976

(6) N.I. Muskhelishvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, pp. 104～570, Noordhoff, 1963

(7) 結城良治, 等角寫像によるき裂の解析とき裂形態論の研究, 東京大學 博士學位論文, 1976

(8) O.L. Bowie, Rectangular Tensile Sheet with Symmetric Edge Cracks, J. of Applied Mechanics, pp. 208～212, 1964

(9) E.E. Gdutos & P.S. Theocaris, A Photoelastic Determination of Mixed Stress Intensity Factors, Exp. Mechanics, SESA, pp. 87～96, 1978

(10) Peter G. Tracy, Elastic Analysis of Radial Cracks Emanating from the Outer and Inner Surfaces of a Circular Ring, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 11, pp. 291～300, 1979

(11) H. Andersson, Stress Intensity Factors at the Tips A Star Shaped Contour in an Infinite Tensile Sheet, J. Mech. Physics of Solids, Vol. 17, pp. 405～417, 1969