

<論 文>

4 角斷面의 180° 曲管에서의 亂流流動과 熱傳達解析

崔 英 惇* · B.E. Launder**

(1984年 11月 27日 接受)

Analysis of Turbulent Flow and Heat Transfer
in a Square Duct with a 180° Bend

Young Don Choi and B.E. Launder

Abstract

Turbulent flow and heat transfer in the 180° bend with square cross section were analyzed numerically by using $k-\epsilon$ 2 equation model with applications of QUICK scheme and PSL method.

Results with PSL method show the more agreements with experimental data than those with wall function. However these results also show that it is very difficult to predict the 3-dimensional turbulent flow with strong secondary flow accurately by standard $k-\epsilon$ equation model, and therefore it is necessary to introduce the higher order turbulent model or to correct the standard $k-\epsilon$ model for the more accurate predictions of these types of flow.

記 號 說 明

C_{ϵ_1} : 모델常數

C_{ϵ_2} : 모델常數

C_{μ} : 모델常數

D_H : 水力直徑

k : 亂流運動에너지

P : 局所平均壓力

P_k : 亂流運動에너지의 生成率

r : 半徑方向座標

U : x 方向 局所平均速度

u : x 方向 搖動速度

U_{τ} : 摩擦速度

V : r 方向 局所平均速度

v : r 方向 搖動速度

W : θ 方向 局所平均速度

w : θ 方向 搖動速度

x : 側壁에 垂直한 方向의 座標

y : 內壁으로부터의 거리

y^+ : 無次元거리 ($= \frac{yU_{\tau}}{\nu}$)

z : 流線方向

그리이스文字

ϵ : 亂流運動에너지의 等方性消滅率

θ : 主流動方向 座標, 座標系의 回轉角度

κ : Von Karman 의 常數

ν : 動粘性係數

ν_{eff} : 等價動粘性係數 ($= \nu + \nu_t$)

*正會員, 高麗大學校 工科學

**University of Manchester Institute of Science and Technology

- ν_t : 渦粘性係數
- ρ : 流體의 密度
- σ : 프란틀수
- σ_t : 亂流프란틀수
- σ_ε : 모델常數
- σ_k : 모델常數

1. 序 論

요즈음 복잡한 3次元 亂流流動의 數值解析에 관한 研究가 활발히 進行되고 있다. 그것은 대부분의 熱流體機械 內의 流動이 3次元 亂流流動이어서 熱流體機械의 性能을 數值解析의 方法으로 分析하기 위해서는 3次元 亂流流動을 解析하지 않으면 안되기 때문이다.

180° 曲管에서의 亂流流動은 여러 면에서 試金石이 되는 代表的인 模型流動이다. 왜냐하면 이 流動은 Fig. 1과 같이 강력한 2次元流動이 發生하는 3次元流動이며 파악이 어렵지 않게 數值解析模型을 만들 수 있어서 지금까지 發展되어온 亂流模型이 3次元流動의 解析에 適用 가능한 方法을 試驗해줄 수 있을 뿐 아니라 이 流動의 解析方法은 熱交換器, 가스터어빈, 壓縮機 등의 熱流體機械 內部的 流動을 解析하는데 쉽게 應用 될 수 있기 때문이다⁽¹⁾.

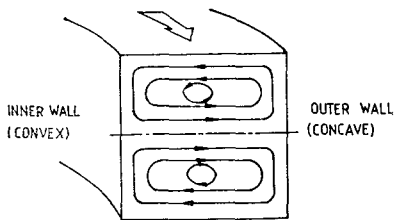


Fig. 1 General flow pattern of secondary flow in a curved square duct

90° 曲管流動은 1981年 Stanford 學術會議에서 試驗 流動이었다. 이 學術會議에 發表된 4角斷面의 90° 亂流 曲管流動의 數值解析에 관한 研究로는 Humphrey 등⁽²⁾, McDonald⁽³⁾, Abdelmeguid 등⁽⁴⁾, Rodi 등⁽⁵⁾, Moore 와 Moore⁽⁶⁾, Chang 등⁽⁷⁾의 研究가 있다. 前 3者의 研究에서는 모든 方程式들을 완전히 橢圓形(elliptic) 方法으로 解析하였고, 後 2者에서는 壓力만을 橢圓形으로 풀고 다른 量들은 行進形(marching) 方法으로 푸는 部分拋物形(partially parabolic) 方法을 使用하였다. 그러나 이들의 解析結果는 모두 實驗結果에

定性的으로 一致하는 程度의 成果를 보여 주었다. 그 中에서 部分拋物形 方法을 使用한 解析의 結果는 완전히 橢圓形 方法을 使用한 경우보다 實驗結果에 더 一致하였다. 그것은 制限된 電算機의 記憶容量에서 壓力만을 橢圓形으로 풀면 모든 量을 橢圓形으로 푸는 경우보다 數值解析을 위한 格子의 數를 많이 增加시킬 수 있었기 때문이다.

Stanford 學術會議 後에 Chang 등⁽⁸⁾과 Johnson⁽⁹⁾은 4角斷面의 180° 曲管의 亂流流動을 部分拋物形 方法으로 解析하여 Chang 등⁽⁸⁾의 實驗結果와 比較하였다. Johnson의 解析結果는 Chang 등의 結果보다 Chang 등의 實驗值에 더 接近된 것이었지만 아직도 實驗結果와는 큰 差異가 있다. Johnson은 壁面函數(wall function)의 差異가 流動解析結果에 미치는 影響과 主流動 方向 曲率半徑에 따른 ε 方程式 消滅項의 修正이 流動 解析結果에 미치는 影響을 細密히 分析한 結果 그러한 影響이 解析結果에 큰 影響을 미치지 않음을 發見하였다. 따라서 그는 4角斷面의 180° 曲管流動의 解析에서 더 正確한 數值解를 얻기 위해서는 다음과 같은 研究가 必要하다고 提案하였다.

(1) 壁面附近의 流動場 解析에서 壁面函數를 쓰는 대신 流動場을 層流低層까지 微細한 格子로 잘라서 解析하는 方法.

(2) 運動量方程式 속의 레이놀즈 應力項에 Boussinesq 모델을 대입하는 대신 Algebraic Stress Model(ASM)로 구한 레이놀즈 應力을 대입하는 方法.

本 研究에서는 위에 提案한 研究들을 段階的으로 進行하고 있으며 이 論文은 이 中에서 주로 (1)項에 關하여 研究한 것이다.

壁面附近의 亂流流動을 解析할 때 壁面附近의 格子를 層流低層까지 가늘게 자르는 方法은 壁面函數를 使用할 때보다 正確한 解를 얻을 수 있으나 電算機의 記憶容量과 計算時間이 많이 所要되어서 3次元流動의 解析에는 適用하기 어려운 方法으로 認識되어 왔다. 그러나 Iacovides 와 Launder⁽¹⁰⁾은 壁面函數를 使用할 때보다 약간의 記憶容量과 電算時間을 增加시키므로써 層流低層까지 微細格子로 解析할 수 있는 Parabolic Sublayer(PSL)法을 考案하여 圓形斷面의 180° 曲管의 亂流流動解析에 適用한 結果 Agrawal의 實驗結果⁽¹¹⁾에 잘 一致하는 解를 얻었다. 따라서 本 解析에서도 이 PSL 法을 4角斷面의 180° 曲管 流動解析에 適用하였다.

本 解析에서는 4角斷面의 180° 曲管 流動에 PSL 法을 導入하는 문제 이외에 ε 方程式에서 生成項의 變化가 流動解析結果에 미치는 影響과 3次元 亂流流動의 解

析에 ASM의 導入 必要性에 關係해서도 考察하였다.

2. 亂流流動과 熱傳達의 數值解析

2.1. 基本方程式

本 解析에서 解析하고자 하는 4 角斷面의 180°曲管은 Fig. 2와 같다. 이 그림에서 x, r 은 4 角斷面에서의 座標系이고 θ 는 管路를 따른 流動의 進行角度이다. 이와 같은 系의 基本方程式들은 圓筒座標系로 標示하면 편리하다. 定常, 非壓縮性 亂流流動에 대한 連續方程式, 運動量方程式, 에너지方程式은 다음과 같다.

連續方程式

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} + \frac{\partial W}{r\partial\theta} = 0 \tag{1}$$

x -運動量方程式

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{r\partial\theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\nu \frac{\partial U}{\partial x} - \bar{u}^2 \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[\nu \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \bar{u}\bar{v} \right] + \frac{\partial}{r\partial\theta} \left[\nu \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{r\partial\theta} \right) - \bar{u}\bar{w} \right] \tag{2}$$

r -運動量方程式

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{W^2}{r} + W \frac{\partial V}{r\partial\theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \bar{u}\bar{v} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[2\nu \frac{\partial V}{\partial r} - \bar{v}^2 \right] + \frac{\partial}{r\partial\theta} \left[\nu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) + \frac{\partial V}{r\partial\theta} \right) - \bar{v}\bar{w} \right]$$

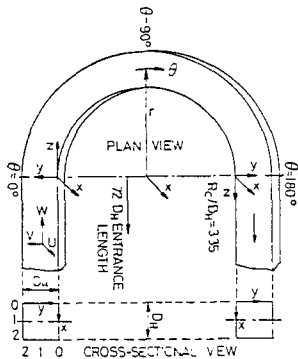


Fig. 2 Schematic showing the bend and tangents, the two coordinate systems and the velocity components of the flow

$$-\frac{2\nu}{r} \left(\frac{\partial W}{r\partial\theta} + \frac{V}{r} \right) \tag{3}$$

θ -運動量方程式

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{VW}{r} + W \frac{\partial W}{r\partial\theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{r\partial\theta} + \left[\nu \left(\frac{\partial U}{r\partial\theta} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \bar{u}\bar{w} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left[\nu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) + \frac{\partial V}{r\partial\theta} \right) - \bar{v}\bar{w} \right] + \frac{\partial}{r\partial\theta} \left[2\nu \left(\frac{\partial W}{r\partial\theta} + \frac{V}{r} \right) - \bar{w}^2 \right] \tag{4}$$

에너지方程式

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial r} + W \frac{\partial T}{r\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial T}{\partial x} - \bar{u}t \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[\frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial T}{\partial r} - \bar{v}t \right] + \frac{\partial}{r\partial\theta} \left[\frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial T}{r\partial\theta} - \bar{w}t \right] \tag{5}$$

여기서 U, V, W 는 x, r, θ 方向의 局所平均速度이고 $\bar{v}^2, \bar{u}\bar{w}$ 등은 레이놀즈應力이며 T 는 局所平均溫度이고 t 는 搖動溫度이다. 레이놀즈應力和 亂流熱流動率項에 圓筒座標系에서의 Boussinesq의 亂流 모델을 適用하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{u}^2 &= \frac{2}{3} k - 2\nu_t \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \bar{v}^2 = \frac{2}{3} k - 2\nu_t \frac{\partial V}{\partial r} \\ \bar{w}^2 &= \frac{2}{3} k - 2\nu_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial\theta} + \frac{V}{r} \right); \\ \bar{u}\bar{v} &= -\nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ \bar{u}\bar{w} &= -\nu_t \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{r\partial\theta} \right); \\ \bar{v}\bar{w} &= -\nu_t \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) + \frac{\partial V}{r\partial\theta} \right) \\ \bar{u}t &= -\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \bar{v}t = -\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial T}{\partial r} \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 過粘性係數 ν_t 는 $k-\epsilon$ 모델에 의해서

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \tag{7}$$

으로 計算하였다. 式 (2), (3), (4), (5)에 式 (6)을 代入하여 정리한 식들은 附錄에 收錄하였다.

한편 本 解析에 使用된 亂流運動에너지方程式과 亂流運動에너지消滅率方程式은 다음과 같다.

亂流運動에너지方程式

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial r} + W \frac{\partial k}{r\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu + \nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\nu + \nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right) + P_k - \epsilon \tag{8}$$

亂流運動에너지消滅率方程式

$$U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + W \frac{\partial \epsilon}{r\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu + \nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} +$$

Table 1 Values of $k-\epsilon$ model coefficients

C_μ	C_{ϵ_1}	C_{ϵ_2}	σ_k	σ_ϵ	κ	σ_t
0.09	1.44, 1.54	1.92	1.0	$\frac{\kappa^2}{C_\mu^{1/2}(C_{\epsilon_2} - C_{\epsilon_1})}$	0.4187	0.9

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\nu + \nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) + C_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (9)$$

여기서 P_k 는

$$P_k = \nu_t \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial W}{r \partial \theta} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial x} \right) + 2 \left(\frac{\partial U}{r \partial \theta} \frac{\partial W}{\partial x} \right) + 2 \left(\frac{\partial V}{r \partial \theta} \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{r \partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{r \partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{V}{r} \left(2 \frac{\partial W}{r \partial \theta} + \frac{V}{r} \right) - \frac{W}{r} \left(2 \frac{\partial V}{r \partial \theta} + 2 \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \right] \quad (10)$$

이다. 이때 사용한 모델 상수들은 Launder 등⁽¹¹⁾, Launder⁽¹²⁾, Johnson⁽⁹⁾이 제안한 Table 1의 값들을 사용하였다.

본 해석에서 사용한 모델 상수 중 C_{ϵ_1} 은 이 값의 변화가 수치해에 미치는 영향을 알아보기 위해서 1.44, 1.54 두 경우에 대해서 계산하였다. 위의 기본방정식들을 미분하는 과정에서 θ 에 대한 2차 미분항은 무시하였으며 그 이외의 항들은 모두 고려하였다.

2.2. 差分方程式과 그 解法

본 해석에서 流動을 數值解析하는데 사용된 주요 방법들은 다음과 같다.

- (1) 部分拋物形解法(Partially Parabolic Procedure)
- (2) Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations(SIMPLE)
- (3) Quadratic Upstream-Weighted Interpolation for Convective Kinematics(QUICK)
- (4) Parabolic Sublayer Numerical Method for the near Wall Region(PSL)
- (5) $k-\epsilon$ 2 方程式 亂流 모델

위의 방법들에 대한 概略的인 說明은 다음과 같다.

- (1) 部分拋物形解法(Partially Parabolic Procedure)

본 해석에서 사용한 電算 프로그램은 Gosman 과 Ide-riah⁽¹³⁾의 TEACH-2 E 프로그램을 본 流動解析에 適合하도록 變形시킨 것이다. 이 프로그램에서 運動量方程式을 푸는 방법은 Patanker 와 Spalding⁽¹⁴⁾의 SIMPLE 방법을 Pratap 의 Spalding⁽¹⁵⁾이 部分拋物形流動(Partially Parabolic Flow)을 解析할 수 있도록 修正한 方

法을 使用하였다. 이 部分拋物形解法은 Spalding⁽¹⁶⁾, Abdelmeguid 등⁽¹⁷⁾과 Chang 등⁽⁸⁾ 이 主流動方向으로 再循環流動이 일어나지 않는 3次元流動을 解析할 때 使用한 方法이다. 이들의 解析結果에 의하면 이 方法은 橢圓形解法(elliptic procedure)에 비하여 所要되는 電算機의 記憶容量은 $\frac{1}{7}$ 로 減縮되나 거의 正確도가 비슷한 解를 줄 수 있음을 보여주었다. 따라서 本 解析에서도 이 方法을 使用하였다.

- (2) Quadratic Upstream-Weighted Interpolation for Convective Kinematics(QUICK)

亂流流動의 數值解析에서 基本方程式의 對流項을 差分化할 때 Central Differenc 法을 使用하면 解가 收斂하지 않으므로 그 代案으로 Upwind 法, Hybrid 法, Power Law 法 등이 使用되어 왔다⁽¹⁸⁾. 그러나 이러한 方法들을 使用할 경우 數值的인 誤謬擴散(numerical false diffusion)이 發生하여 解가 不正確해진다. 이와 같은 誤謬擴散을 防止하는 方法이 여러가지 알려져 있으나^{(19), (20)} 그중에서 가장 注目되어 온 方法은 Skew Upwind Difference Scheme(SUDS)과 Quadratic Upstream-Weighted Interpolation for Convective Kinematics(QUICK)가 있다. SUDS는 Raithby⁽²¹⁾에 의해서 提案된 方法이고 QUICK은 Leonard⁽²²⁾에 의해서 提案되어 Han 등⁽²³⁾, Quere 등⁽²⁴⁾에 의해서 試驗되었던 方法으로 Fig. 3과 같이 制御體積으로 流入되는 流體의 速度를 上流쪽으로 偏心된 拋物形內挿法으로 定하는 方法이다. Leschziner 와 Rodi⁽¹⁹⁾, Huang 과 Leschziner⁽²⁰⁾는 誤謬擴散을 防止하는 여러 方法들을 多角的으로 試驗하여 比較하였는데 그중에서 QUICK이 가장 우수하

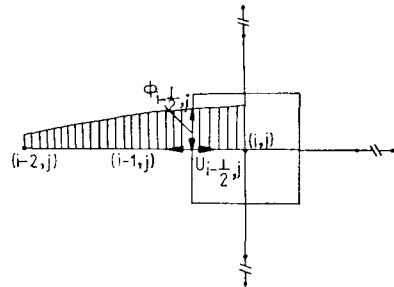


Fig. 3 Quadratic upstream-weighted interpolation for convective kinematics

여 誤謬擴散이 대단히 적으며 式이 간단하여 電算時間이 尠히 많이 들지 않는다고 하였다. 따라서 本 解析에서도 運動量方程式을 差分化할 때 2次流動의 對流項에 대해서 QUICK을 적용하였다. 그러나 主流動方向의 速度成分이나 에너지方程式, k , ϵ 方程式의 對流項에 대해서는 Hybrid法을 使用하였다.

(3) Parabolic Sublayer Numerical Method for the near Wall Region(PSL)

Johnson⁽⁹⁾는 4 角斷面의 180°曲管 流動의 解析에서 종래에 주로 使用되어온 Launder-Spalding⁽²⁵⁾의 壁面函數를 改善한 Johnson-Launder 壁面函數를 使用하여 流動을 解析하고 그 解析結果를 Launder-Spalding의 壁面函數를 使用하여 얻은 結果와 比較하였다. 그 結果 Johnson-Launder의 壁面函數를 使用한 解析結果는 종래의 壁面函數를 使用한 것보다 改善되었으나 그 改善의 程度가 적어서 만족스러운 것이 되지 못하였다. 따라서 다음으로 시도한 것이 本 研究에서의 PSL法에 의한 壁面附近의 流動場 處理方法이다.

PSL法은 壁面附近의 流動場을 層流低層까지 微細格子로 잘라서 正確히 풀지만 所要되는 電算時間이나 電算機의 記憶容量이 壁面函數를 使用한 경우보다 尠히 많이 增加되지 않는 長點을 지니고 있다. PSL方法은 Fig. 4와 같이 流動場을 거친格子區域과 微細格子區域으로 나누고 거친格子區域에서는 모든 基本方程式들을 완전히 풀고 微細格子區域에서는 壁面에 水平한 速度成分의 運動量方程式과 에너지方程式만 푸는 方法이다. 微細格子區域에서 壁面에 垂直한 速度成分은 連續方程式으로 計算하며, 壓力은 壁面이 平面일 때에는 微細格子區域 內의 壓力은 壁面에 垂直한 方向으로 一定하다고 假定하고, 壁面이 曲面일 때에는 微細格子區域과 거친格子區域의 境界線에서의 壓力에 微細格子區域

內에서 流線의 曲率에 의해 發生하는 遠必力에 의한 壓力變化를 追加하여 計算한다.

그리고 微細格子區域에서 水平方向의 速度成分에 대한 運動量方程式의 解析에 필요한 過粘性係數는 混合距離모델로 구한다. 本 解析에서는 流動場을 Fig. 4와 같이 나누었으면 거친格子區域 I에서는 모든 方程式을 완전히 풀었고, 微細格子區域 II, IV에서는 U, W, T 의 方程式만 완전히 풀었으며, 微細格子區域 III에서는 V, W, T 의 方程式만 완전히 풀었다. 이때 所要되는 過粘性係數는 Van Driest의 混合距離모델⁽²⁸⁾을 使用하여 計算하였다.

(4) ϵ 方程式의 生成項 修正

Launder와 Spalding의 $k-\epsilon$ 方程式모델은⁽²⁵⁾ 여러 形態의 亂流流動解析에서 比較的 正確한 解를 주었기 때문에 현재 가장 널리 使用되고 있는 모델의 하나이다. 그러나 과거 이 모델이 試驗되었던 流動은 주로 2次元流動이었으므로, 이 모델이 3次元流動의 解析에도 正確히 適用될 수 있을지는 의문이다. $k-\epsilon$ 方程式에서 가장 주의를 요하는 項의 하나는 ϵ 方程式의 生成項이다. Launder와 Spalding은 ϵ 方程式의 生成項에 대해서

$$-2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = C_{\epsilon_1} \frac{P_k}{k} \epsilon \tag{11}$$

여기서

$$P_k = \nu_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \tag{12}$$

와 같은 모델링을 하였는데 이것은 각 項들에 대한 모델作業 중 가장 큰 形態의 變化를 시킨 부분이다. 과거에 $k-\epsilon$ 方程式모델의 試驗에 주로 使用되었던 境界層流動이나 제트流動에서 P_k 속의 交叉項 $\nu_i \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)$ 의 크기는 제곱항 $\nu_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right)^2$ 에 比較하여 대단히 작아서

$$P_k \approx \nu_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right)^2 \tag{13}$$

로 表示되는 경우가 많았다. 그러나 再循環流動이 강력히 일어나는 3次元流動에서는 이 交叉項의 P_k 에 대한 比率이 커지게 된다. 따라서 式 (11)의 P_k 에서 交叉項이 數值解에 어떠한 影響을 미치는가를 檢討해 보는 것은 복잡한 3次元流動의 解析에 正確히 適用될 수 있는 ϵ 方程式모델을 얻는데 큰 도움이 될 것이다. 따라서 本 解析에서는 式 (11)의 P_k 에서 交叉項을 생략할 경우와 생략하지 않을 경우의 數值解의 變化를 比較檢討하였다.

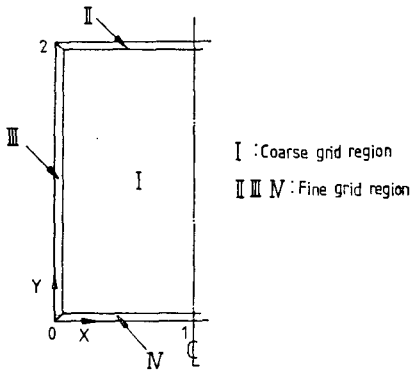


Fig. 4 Fine grid regions and coarse grid region of square sectioned duct

2.3. 電算解析의 細部事項

(1) 境界條件과 入口條件

本 解析에서 使用한 境界條件은 TEACH-2E 프로그램에서의 境界條件⁽¹³⁾과 대체적으로 같으나 서로 다른 점은 壁面函數 대신 PSL 法을 使用했다는 것과 그에 따라 微細格子區域과 거친格子區域의 境界面에서 境界條件을 주어야 하는 것이다. 이 境界面에서의 條件은 速度인 경우 連續方程式으로 計算한 速度를 使用하였고 k 와 ϵ 은 混合距離모델로 計算한 k, ϵ 을 使用하였으며, 壓力條正方程式은 境界面에서 差分方程式의 係數가 0이라는 條件을 使用하였다.

Johnson⁽⁹⁾은 流動解析을 曲管前 $7D_H$ 에서 시작하여 曲管後 $5D_H$ 까지 하였는데 本 解析에서는 曲管前 $1D_H$ 에서 시작하여 曲管後 $5D_H$ 까지 計算하였다. 이 變化는 直管部에서 發生하는 解析의 誤差를 極小化시켜서 曲管部 入口에서의 速度分布를 正確히 計算하기 위해서이다.

直管部 入口에서 主流動方向速度分布와 2次流動速度分布, 亂流運動에너지分布는 Melling과 Whitelaw⁽²⁰⁾가 測定한 資料를 使用하였다. 이들의 測定資料에 의하면 4角斷面의 直管流動에는 Fig. 5와 같은 2次流動이 發生한다. 이 2次流動速度는 主流動速度보다 훨씬 작으나, 이 流動速度를 正確히 考慮해 주지 않으면 曲管入口部의 數值解에 誤差가 크게 發生하므로 本 解析에서는 이를 正確히 考慮하였다.

本 解析에서 使用한 4角斷面曲管의 寸수와 流入되는 流動의 條件은 Table 2와 같다. 이와 같은 값을 使用

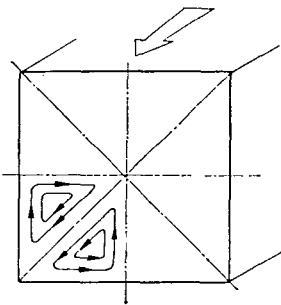


Fig. 5 General flow pattern of turbulence driven secondary flow in a straight square duct

한 것은 解析結果를 Chang 등⁽⁸⁾의 實驗結果와 比較하기 위해서이다.

(2) 格子點과 電算時間

本 解析에서는 曲管을 x, r, θ 方向으로 각각 26, 40, 140개의 格子線으로 나누었는데, Fig. 4에서 微細格子區域 II, III, IV內에는 각각 11개의 格子線을 두었다. 壁面에 隣接한 첫 格子線의 位置는 $y^+ \approx 1$ 이 되도록 定하였고, 微細格子區域과 거친格子區域의 境界面은 $y^+ \approx 50$ 이 되도록 定하였다.

本 解析에 使用된 電算機의 機種은 CDC 7600이었는데, 이 電算機를 使用하여 計算 可能한 格子點의 數는 壁面函數를 使用하는 경우 약 100,000개 정도인데 PSL 法을 使用함으로써 약 150,000개로 增加시킬 수 있었다.

本 解析에서 流動을 入口에서 出口까지 1回 解析하는데 所要되는 電算時間은 약 240초이었는데, 이 數值解를 完全히 收斂시키기 위해서는 25回 以上の 反復 計算이 必要였으므로 本 解析에 所要된 總電算時間은 약 6,000초이었다. 그러나 本 解析에서와 같은 格子 排列狀態에서 完全微細格子法을 使用하는 경우 所要되는 電算時間은 9,000초 以上으로 豫測되어서 PSL 法을 使用하므로써 電算時間이 $\frac{2}{3}$ 로 減少된 것으로 豫測 되었다.

3. 解析結果 및 考察

Fig. 6은 主流動方向速度에 대한 本 解析과 Johnson의 解析結果⁽⁹⁾를 Chang 등⁽⁸⁾의 實驗結果와 比較한 그림이고, Fig. 7, Fig. 8은 r 方向의 2次流動速度와 亂流運動에너지에 대한 比較圖이다. 主流動方向速度에 대한 解析結果와 實驗結果를 比較할 때 주의할 점은 實驗結果가 連續方程式을 만족시키지 못한다는 것이다. Fig. 6에 나타나 있는 바와 같이 測定된 速度는 대부분의 區域에서 計算된 값보다 작아서 全流動斷面에 대해 $\frac{W}{W_b}$ 를 平均해 보면 1보다 작게 되어 連續方程式이 만족되지 않는다. 이와같은 현상은 W_b 의 測定이 잘못되었거나, 實驗裝置의 流動斷面積이 不均一하거나 實驗도중 平均速度가 변했거나 하는 등에 起因된 것으로

Table 2 Duct dimensions and conditions of inlet flow

Mean velocity (m/s)	Reynolds number	Hydraulic diameter(m)	Inner radius of curvature (m)	Outer radius of curvature (m)	Inlet temperature (°C)
9.996	56,690	0.0889	0.254	0.3429	0.0

로 생각된다. 따라서 實驗結果와 解析結果를 比較할 때 速度의 絕對의 크기를 比較하는 것은 意味가 적고 그 分布의 形象을 比較하는 것이 重要하다.

本 解析結果는 $z=45^\circ$ 까지는 速度分布의 形象이 實驗結果에 比較의 잘 一致하지만 $z=90^\circ$ 以後에서는 全體의인 變化의 形態는 一致하나 細部의인 形象은 差異가 큰 곳이 많다. 이것은 實驗結果에 의하면 $z=45^\circ$ 와 $z=90^\circ$ 사이에서 2次流動의 流線 形態에 큰 變化가 일어난 것을 알 수 있는데 本 解析에서 使用한 表準 $k-\epsilon$ 方程式모델이 이 變化過程을 正確히 追跡하지 못하였기 때문으로 생각된다. 이와같이 表準 $k-\epsilon$ 方程式모델이 2次流動速度를 正確히 豫測하지 못한 것은 運動量方程式에 使用된 Boussinesq의 渦粘性係數모델이 複雜한 3次元亂流流動의 레이놀즈應力을 正確히 豫測해 주지 못한다는 것과 表準 $k-\epsilon$ 方程式모델에는 主流動方向의 曲率에 따른 渦粘性係數의 修正效果가 考慮되지 않은 것, 그리고 渦粘性係數의 方向性이 考慮되지 않은 것 등에 起因된 것으로 생각된다. 이와같은 $k-\epsilon$ 方程式모델의 缺陷은 레이놀즈 應力方程式모델이나 ASM 등의 高次亂流모델의 適用으로 克服될 수 있다.⁽¹⁾

Johnson의 解析結果와 本 解析結果를 比較해 보면 本 解析結果는 Johnson의 結果보다 實驗値에 定性的으로 더 잘 符合될을 알 수 있다. 이것은 壁面函數 대신 PSL法을 使用하였기 때문으로 생각된다. Fig. 9, Fig. 10은 本 解析으로 豫測한 $z=90^\circ$ 에서의 x 方向과 r 方向의 2次流動速度를 圖示한 것이다. 이그림에서 注目할만한 點은 2次流動의 最大速度의 位置가 壁面に 매우 隣接해 있어서 微細格子區域 內部에 있거나 그 境界線上에 있다는 것이다. 이것은 本 解析의 流動과 같이 2次流動이 強力히 發生하는 亂流流動의 解析에 壁面函數法을 適用하는 것은 대단히 위험하다는 것을 나타내어 준다. 왜냐하면 一般의으로 壁面函數는 微細格子區域內의 速度分布를 對數曲線으로 假定하여 구하기 때문이다.

Johnson의 解析結果는 $z=3^\circ$, $z=45^\circ$ 에서 速度分布의 形象이 實驗結果와 큰 差異를 보여주고 있다. 그것은 Johnson이 流動의 解析을 曲管前 $7D_H$ 인 곳부터 시작하였기 때문이다. 앞에서 說明한 바와 같이 4角斷面の 直管流動에는 Fig. 5와 같은 2次流動이 發生한다. 이것은 한 流動斷面에서 레이놀즈應力의 不均質性에 따른 레이놀즈應力의 勾配가 流動의 驅動力이 되어 運動量方程式의 源泉項에 作用하기 때문에 發生한 것이다. 그리고 이 2次流動은 Fig. 6-(a)의 速度分布의 測定結果와 같이 主流動速度에 2重極大點을 發生

시킨다. 그러나 $k-\epsilon$ 모델은 레이놀즈應力을 正確히 豫測해 주지 못하기 때문에 이 모델로 4角斷面の 直管流動을 解析하면 Fig. 5와 같은 2次流動도 發生하지 않고 主流動速度分布에 2重極大點도 發生하지 않는다. 뿐만 아니라 本 解析에 의하면 2重極大點을 갖는 正確한 速度分布를 入口速度로 代입해주어도 $k-\epsilon$ 모델로 直管流動을 解析하면 2次流動은 점점 消滅되고, 2重極大速度도 점점 消滅되어 Fig. 6(a), Fig. 7(a)의 點線과 같은 速度分布로 變하는 것을 발견하였다. 따라서 Johnson이 曲管前 $7D_H$ 부터 曲管入口까지 流動을 $k-\epsilon$ 모델로 푸는 동안 速度分布가 점차 不正確해져서 曲管部로 流入되어 曲管入口部의 速度分布 豫測에 큰 誤差가 發生하게 된 것이다. 本 解析에서는 流動解析을 曲管前 $1D_H$ 에서부터 시작함으로써 曲管入口部에서의 速度分布 豫測을 좀더 正確히 할 수 있었다.

Fig. 8은 亂流運動에너지에 대한 本 解析結果를 實驗結果와 比較한 것이다. 이 그림에서 알 수 있는 것은 本 解析에 의한 亂流運動에너지 豫測은 實驗結果와 比較의 잘 一致하는 것이다. 따라서 $k-\epsilon$ 方程式모델에서 再檢討해 보아야 할 것은 ϵ 方程式으로 생각된다. 따라서 本 解析에서는 앞에서 論한 바와 같이 ϵ 方程式의 生成項에 대해 몇가지 變化를 시도하였다.

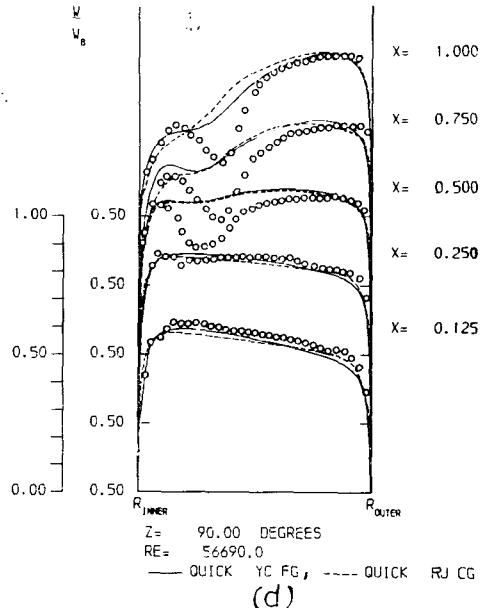
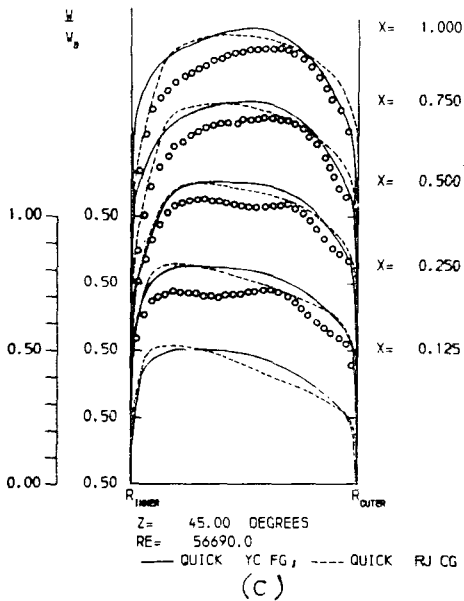
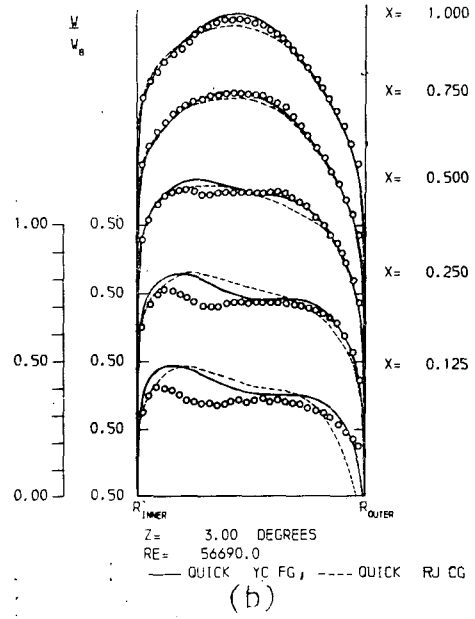
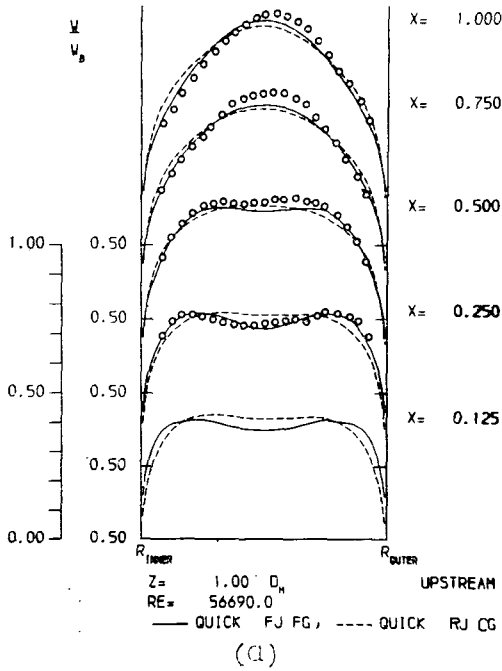
Fig. 11은 C_{ϵ_1} 을 1.44와 1.54로 變化시키며 解析한 速度分布의 比較이다. 이 解析結果에 의하면 C_{ϵ_1} 을 1.44에서 1.54로 變化시키기에 따라 數值解가 實驗値에 약간 接近했으나 그 變化의 程度는 대단히 작았다.

Fig. 12는 式 (12)의 P_1 項에서 交叉項을 생략할 때 $z=90^\circ$ 에서 豫測된 速度分布를 實驗結果와 比較한 것이다. 이 그림에서 대단히 흥미로운 것은 ϵ 方程式의 生成項에 있는 P_1 에서 交叉項을 생략하면 速度分布에 큰 變化가 일어나고, 實驗結果에서와 같이 $z=90^\circ$ 부근에서 速度分布에 2重極大點이 뚜렷이 發生하는 것이다. 이와같이 2重極大速度가 發生하는 原因은 Fig. 13과 Fig. 14의 2次速度에 대한 Vector線圖를 比較해 보면 明確해진다. Fig. 13은 交叉項을 생략하지 않았을 경우의 Vector線圖이고 Fig. 14는 交叉項을 생략했을 경우 $z=45^\circ$ 에서 $z=90^\circ$ 까지의 Vector線圖이다. $z=45^\circ$ 까지는 交叉項을 생략했을 경우와 생략하지 않았을 경우의 2次流動의 流線形態가 相似하나 $z=45^\circ$ 以後부터 交叉項을 생략했을 경우의 流線이 그림에서와 같은 屈曲이 發生한다. 이것이 2重極大速度의 原因이 된 것이다. 交叉項을 생략할 경우 이와 같은 變化가 일어난 것은 거친格子區域에서 豫測되는 渦粘性

係數의 값이 낮아졌기 때문이다. 이 解析結果는 ϵ 方程式 生成項의 모델에 대해 再檢討가 必要하다는 것을 나타내 준다. 本 流動의 解析에 ASM의 適用과 더 適合한 ϵ 方程式모델을 適用하는데 대한 研究는 현재 進行중에 있다.

Fig. 15는 式 (5)의 에너지方程式을 解析하므로써 얻

어진 누셀트수를 Johnson의 實驗結果⁽⁹⁾와 比較한 것이다. 本 解析에 의한 누셀트수는 $z=45^\circ$ 까지 實驗結果보다 높은 값을 豫測해 주고 있으나, 그 후로 流動이 進行해 감에 따라 實驗結果에 점차적으로 接近해 가고 있음을 알 수 있다. 그 原因은 아직 不分明하나 亂流 프란틀수를 0.9로 一定하다고 假定한 점, $k-\epsilon$ 모델로



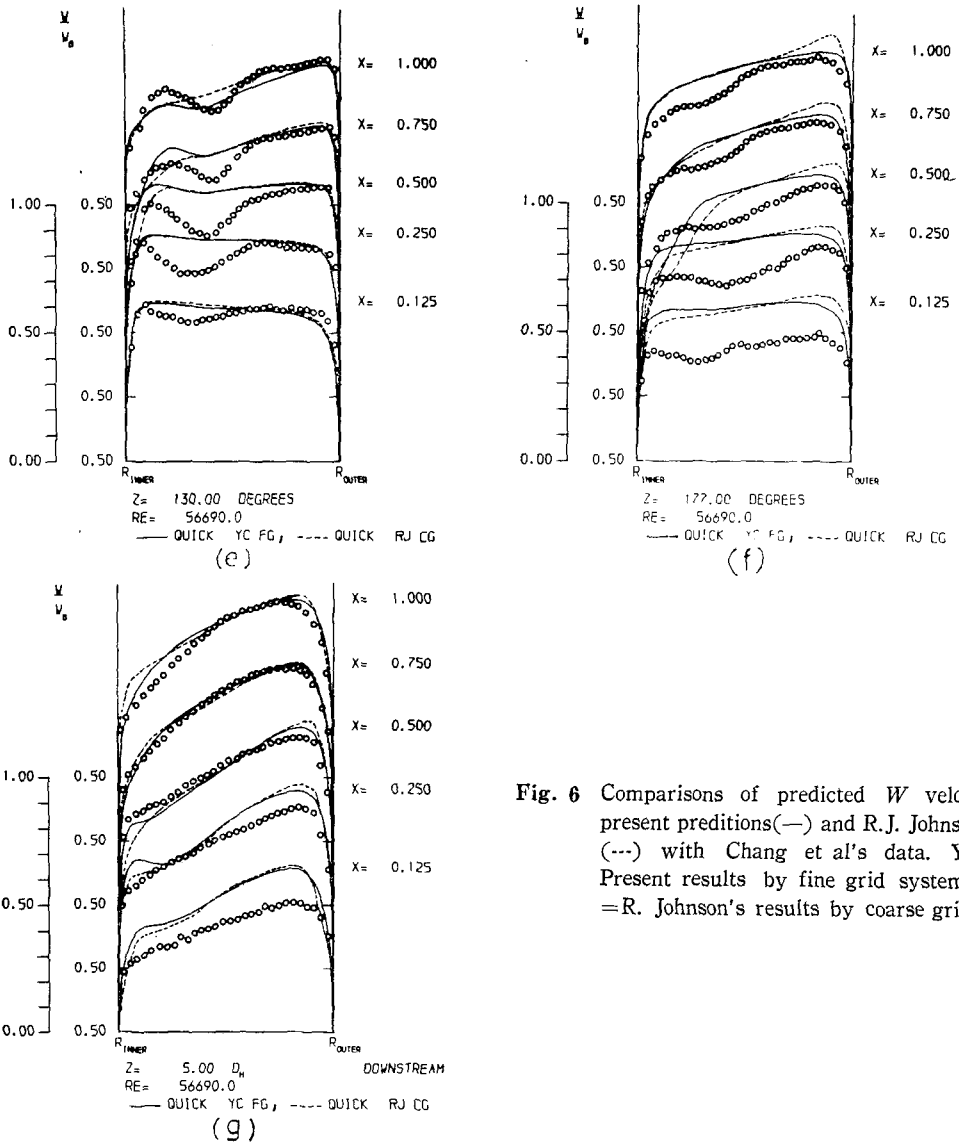


Fig. 6 Comparisons of predicted W velocities of present predictions(—) and R.J. Johnson's ones (---) with Chang et al's data. YC FG= Present results by fine grid system; RJ CG = R. Johnson's results by coarse grid system

豫測한 速度分布의 不正確性, 에너지方程式에 適用한 Boussinesq 모델의 不正確性 등에 起因된 것으로 생각된다. 그러나 本 解析에서 熱傳達問題에 대한 더 깊은 考察은 速度分布에 대한 豫測이 正確히 이루어진 후에 가능할 것으로 생각된다.

4. 結 論

本 解析에서는 4角斷面の 180°曲管에서의 亂流流動과

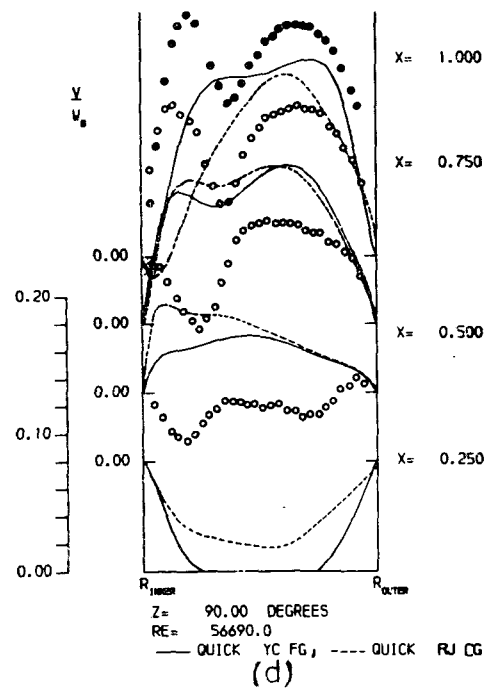
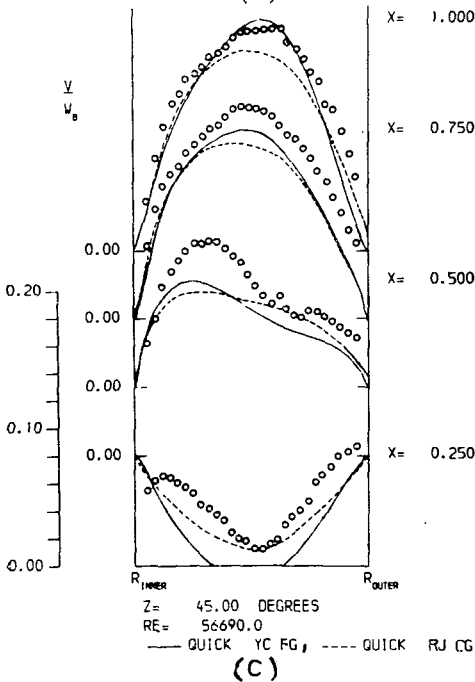
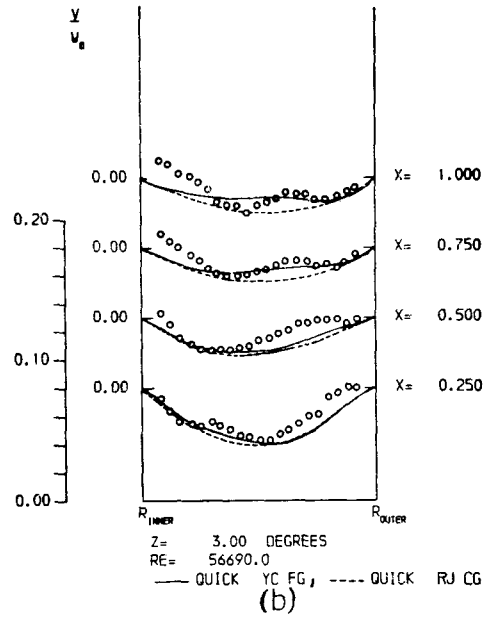
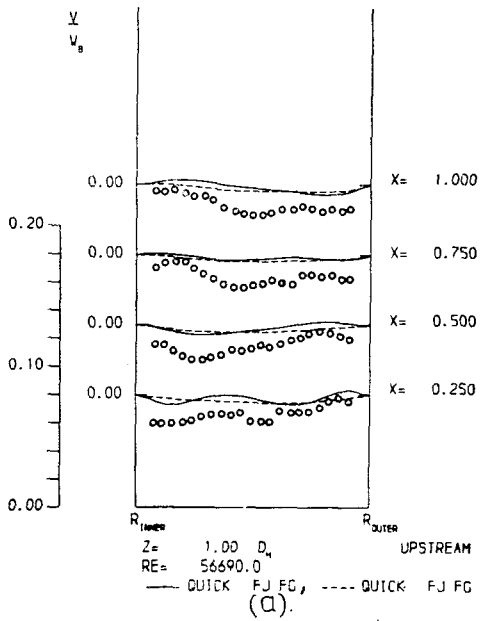
熱傳達을 $k-\epsilon$ 方程式모델에 PSL, QUICK 등의 方法을 適用하여 解析하고 Chang 등⁽⁸⁾과 Johnson⁽⁹⁾의 實驗結果와 比較하므로써 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 本 解析에서 適用한 PSL法은 壁面函數를 使用하는 것보다 速度分布를 더 正確히 해주고, 定格된 電算機의 容量에서 完全微細格子法을 使用할 때보다 格子點의 數를 약 1.5배 增加시킬 수 있게 하였고, 한 格子當의 計算時間은 약 $\frac{2}{3}$ 로 減縮시킬 수 있게 하여서 經濟的인 解析方法의 하나로 생각된다.

(2) 本 解析의 流動과 같이 最大速度가 壁面에 매우 인접해 있는 流動의 解析에 壁面函數法을 適用하면 壁面 附近의 速度分布 豫測이 대단히 不正確해질 위험이 있다. 그러나 이 경우 PSL 法을 適用하면 壁面 附近의 速度分布 豫測을 더 正確히 할 수 있다.

(3) 表準 $k-\epsilon$ 方程式모델에는 流線曲率에 의한 渦

粘性係數의 變化와 亂流에너지의 生成과 消滅의 非平衡性, 그리고 渦粘性係數의 方向性 등이 考慮되어 있지 않아서 이 모델을 複雜한 3次元亂流流動의 解析에 適用하여 正確한 解를 얻기 어렵다. 따라서 이와 같은 流動을 더 正確히 解析하기 위해서는 위의 效果들을 考慮하여 $k-\epsilon$ 方程式모델을 修正하거나 이 效果들이



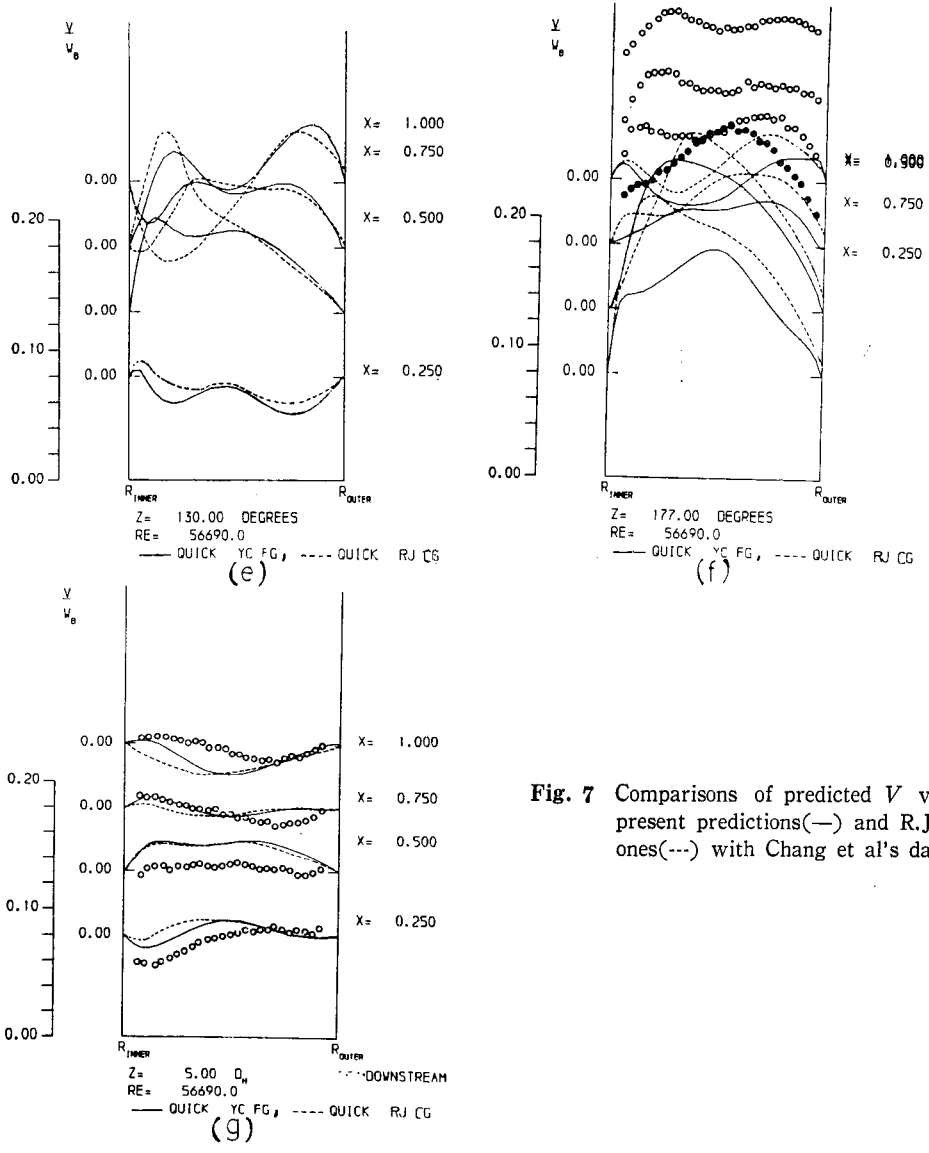
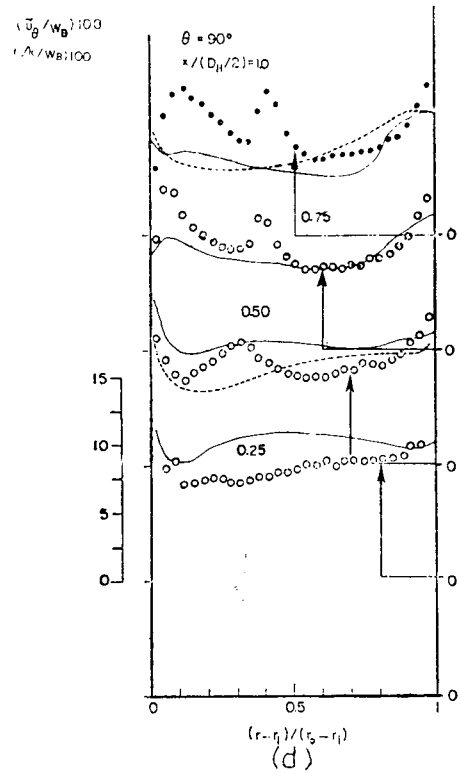
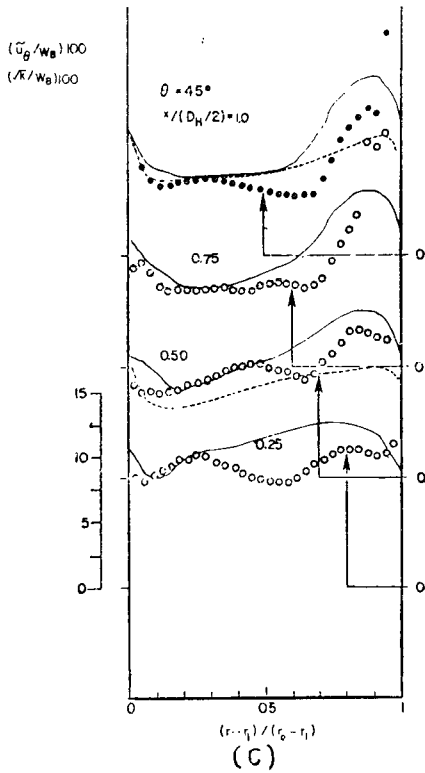
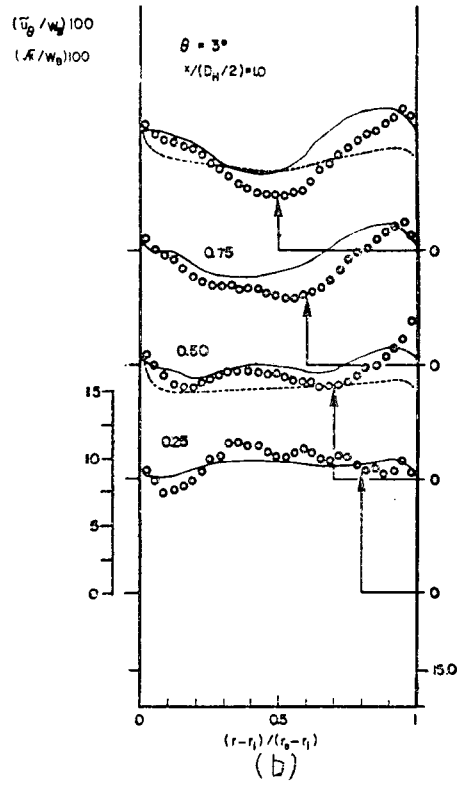
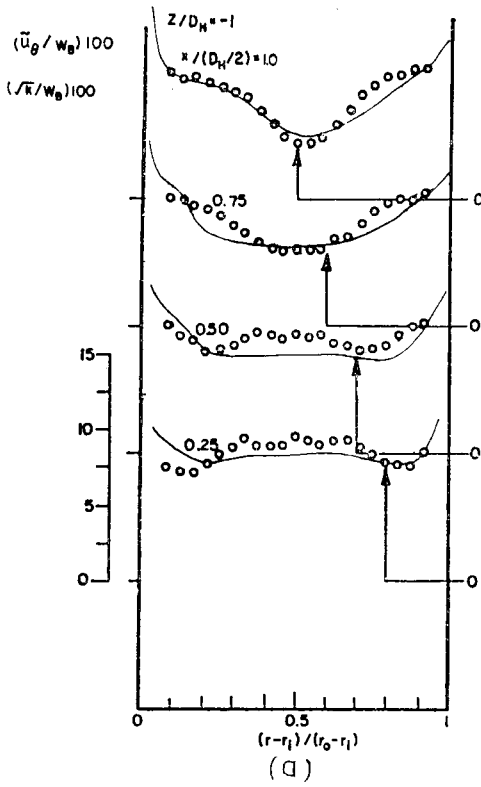


Fig. 7 Comparisons of predicted V velocities of present predictions(—) and R.J. Johnson's ones(- - -) with Chang et al's data

考慮된 高次亂流모델인 레이놀즈응력모델이나 ASM 모델 등을 適用할 必要가 있다.

(4) $k-\epsilon$ 方程式모델을 複雜한 3次元亂流流動의 解析에 使用하기 爲하여 修正해야 할 것 중 가장 重要시

되는 것은 ϵ 方程式의 生成項이다. ϵ 方程式의 生成項을 正確히 修正하기 爲해서는 生成項 중의 交叉項이 갖는 意味와 交叉項의 有無가 流動場解析에 미치는 影響에 對한 多角的인 檢討가 必要하다.



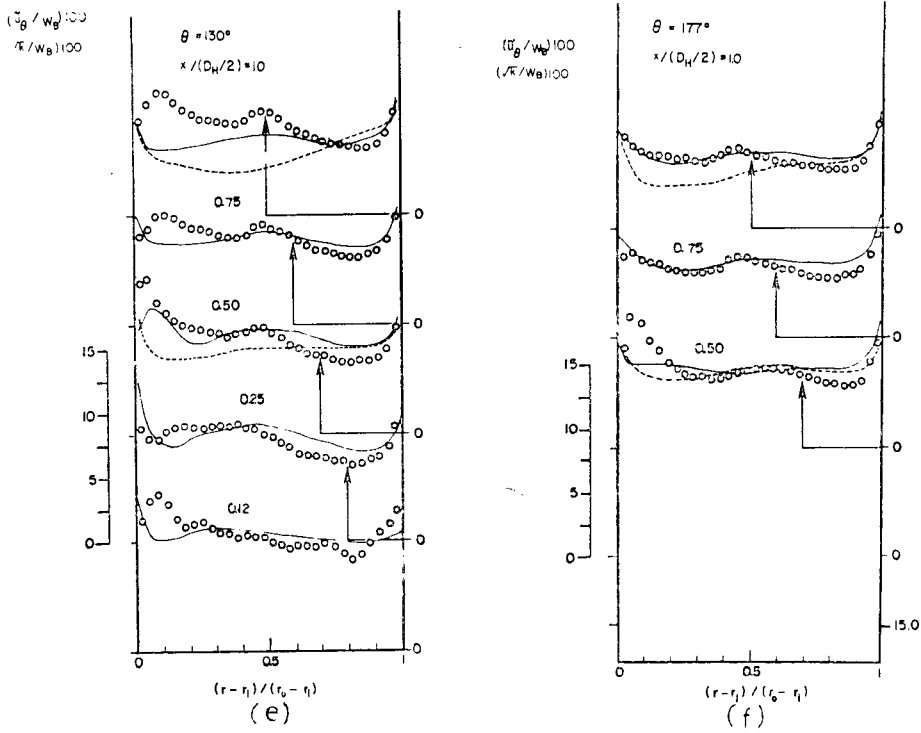


Fig. 8 Comparisons of predicted turbulent kinetic energies of present predictions(—) and Chang et al's ones(---) with Chang et al's data

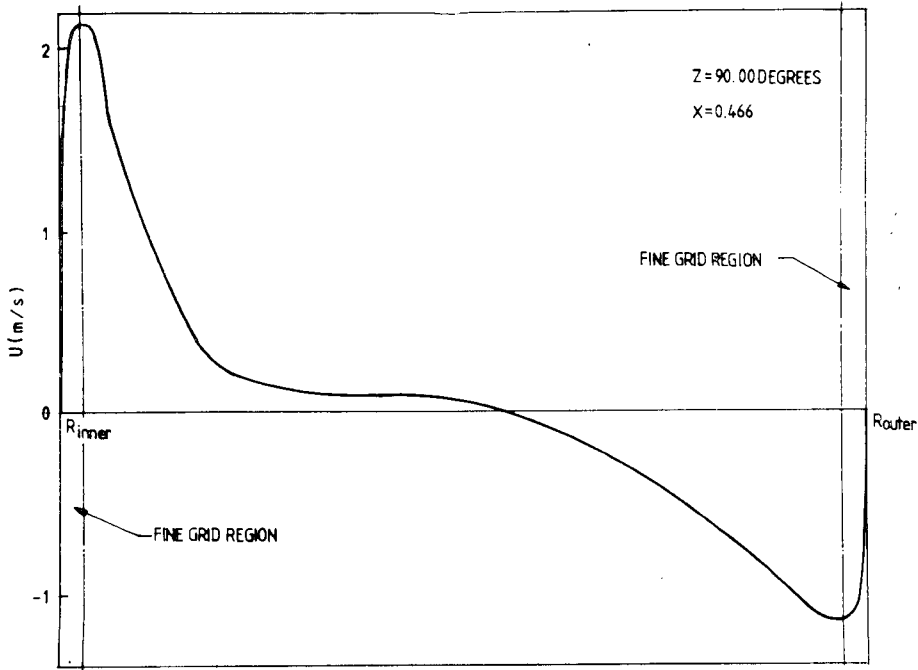


Fig. 9 Predicted U velocity for $Z=90^\circ$ and $X=0.466$

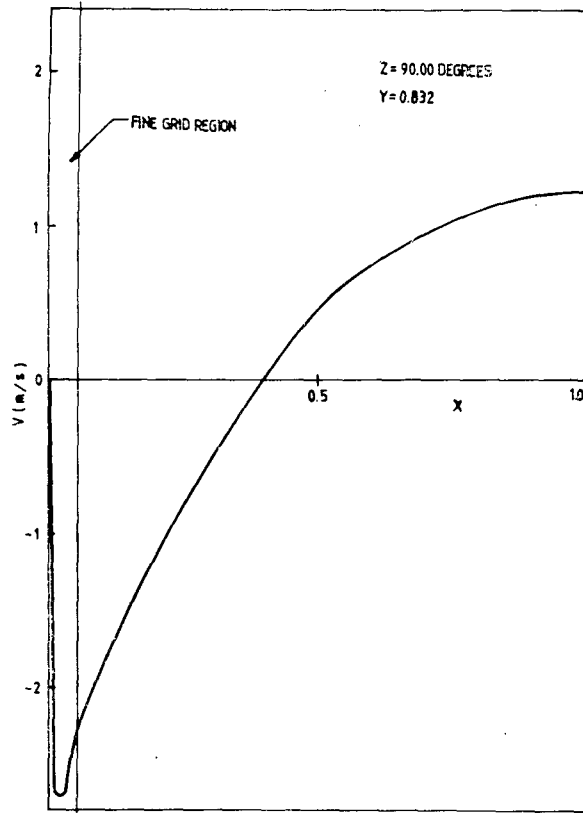


Fig. 10 Predicted V velocity for $Z=90^\circ$ and $Y=0.832$

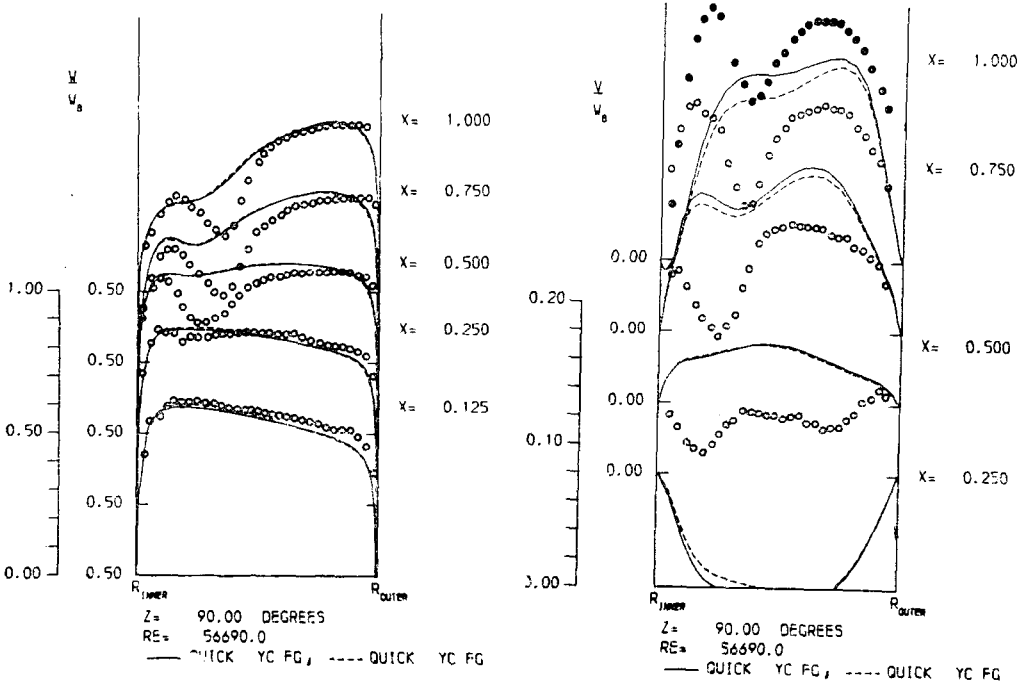


Fig. 11 Predictions of W velocities and V velocities at $Z=90^\circ$ for $C_{e1}=1.44$ (---) $C_{e2}=1.54$ (—)

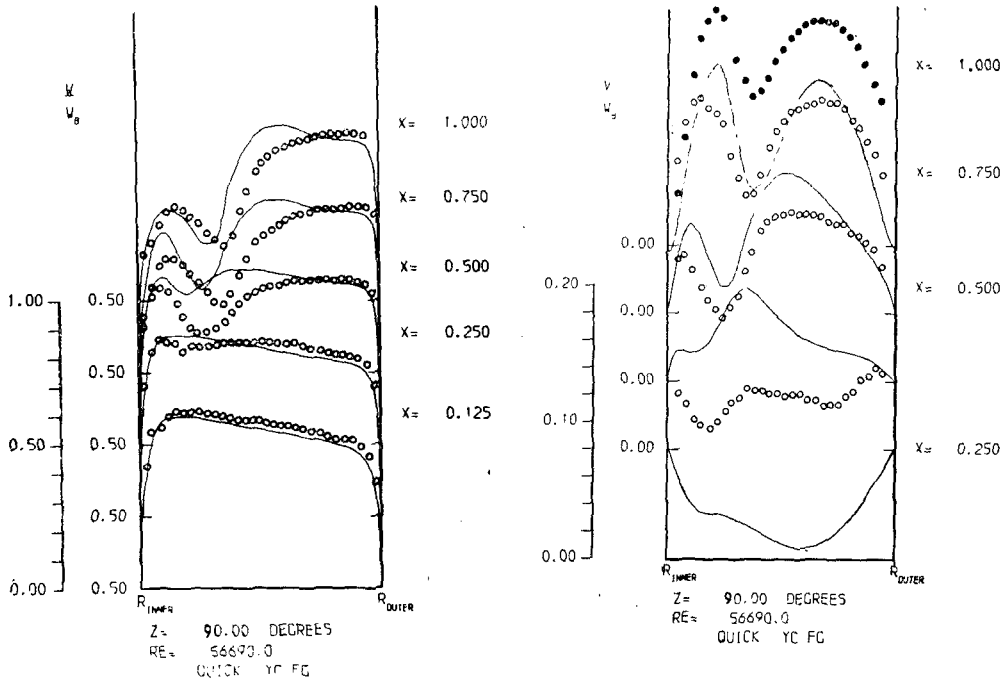


Fig. 12 Predictions of W velocities and V velocities with the neglect of cross term in the P_* of the generation of ϵ

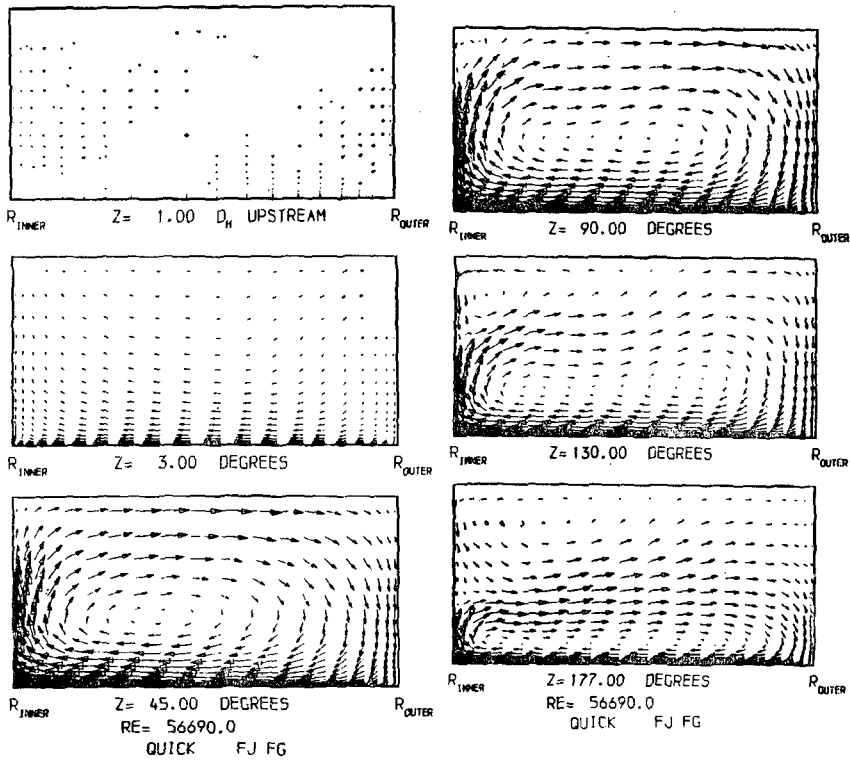


Fig. 13 Predictions for normalized mean secondary velocities in the bend with QUICK scheme; the plane of symmetry is at the top of each plot

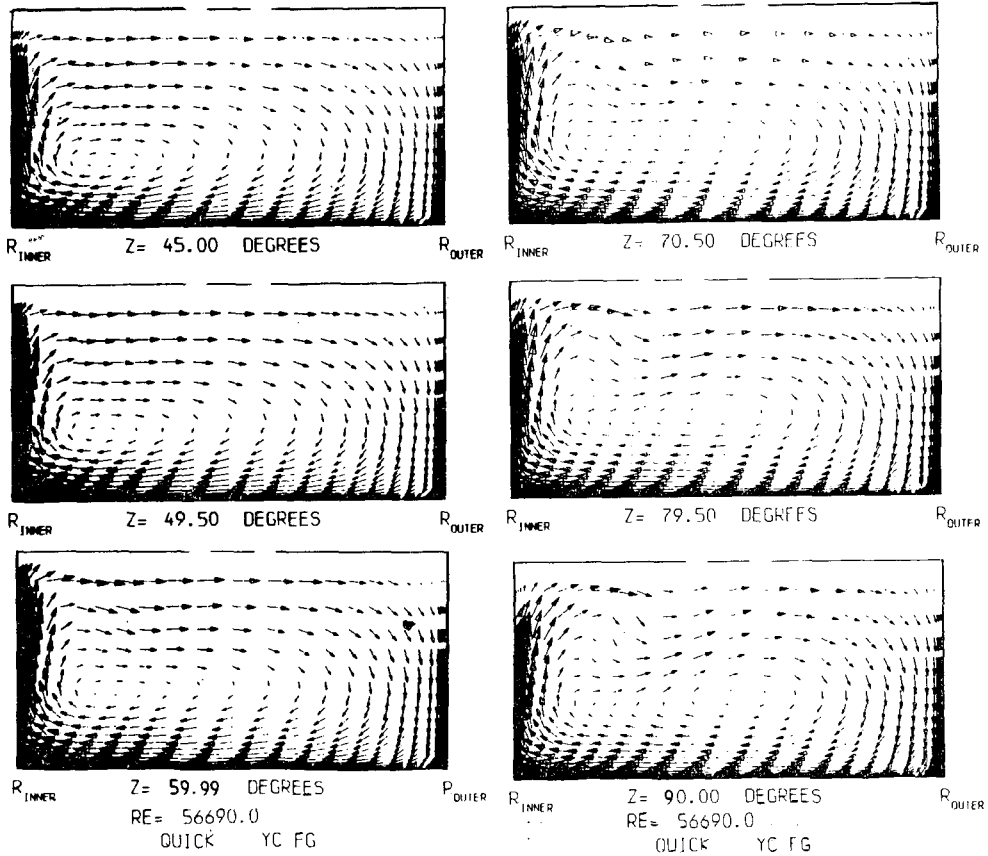


Fig. 14 Predictions for normalized mean secondary velocities in the bend with the neglect of cross term in the P_k of the generation of ϵ ; the plane of symmetry is at the top of each plot.

後 記

이 연구는 文敎部의 IBRD 海外敎授派遣計劃과 美國 海軍의 支援하에 이루어진 것이며 이에 感謝드립니다.

參 考 文 獻

- (1) B.E. Launder, Modelling of Turbulent Flow in Gas-Turbine Blading: Achievements and prospects, Int. J. Heat & Fluid Flow, Vol. 3, No. 4, pp. 171~184, 1982
- (2) J.A.C. Humphrey, J.H. Whitelaw and G. Yee, Turbulent Flow in a Square Duct with Strong Curvature, J. Fluid Mech. Vol. 103, pp. 443~463, 1981
- (3) H. McDonald, Proc. AFOSR-HTTM-Stanford Conference on Complex Turbulent Flows, Vol. 3, p. 1424, 1982
- (4) A.M. Abdelmeguid, S.Y. Goh, J. Ilegbusi and D.B. Spalding, Proc. AFOSR-HTTM-Stanford Conference on Complex Turbulent Flows, Vol. 3, p. 1521, 1982
- (5) W. Rodi et al., Proc. AFOSR-HTTM-Stanford Conference on Complex Turbulent Flows, Vol. 2, p. 1495, 1982
- (6) J. Moore and J.G. Moore, Proc. AFOSR-HTTM-Stanford Conference on Complex Turbulent Flows, Vol. 3, p. 1453, 1982
- (7) S.M. Chang, T. Han and J.A.C. Humphrey, Proc. AFOSR-HTTM-Stanford Conference on Complex Turbulent Flows, Vol. 3, p. 1375, 1982
- (8) S.M. Chang, J.A.C. Humphrey and A. Modavi, Turbulent Flow in a Strongly Curved U-bend and Downstream Tangent of Square Cross-

- Sections, PCH Physico Chemical Hydrodynamics, Vol. 4, p. 243, 1983
- (9) R.W. Johnson, Turbulent Convecting Flow in a Square Duct with a 180° Bend; An Experimental and Numerical Study, Ph. D. Thesis, University of Manchester Institute of Science and Technelagy, 1984
- (10) H. Iacovides and B.E. Launder, PSL: An Economical Approach to the Numerical Analysis of Near-Wall, Elliptic Flow, TFD/83/3, University of Manchester Institute of Science and Technology, 1983
- (11) B.E. Launder, A.P. Morse, W. Rodi and D.B. Spalding, Prediction of Free Shear Flows; A Comparison of the Performance of Six Turbulence Models, Proc. Langley Free Shear Flows Conf., NASA Rpt. SP320, p. 361, 1973
- (12) B.E. Launder, Heat and Mass Transport, Chap. 6 in Topics in Applied Physics; Vol. 12-*Turbulence*, P. Bradshaw Ed., Springer, 1976
- (13) A.D. Gosman and F.J.K. Ideriah, TEACH-2E: A General Computer Program for Two Dimensional, Turbulent, Recirculating Flows, Dept. Mech. Eng., Imperial College, London, 1976
- (14) S.V. Patank ar and D.B. Spalding, A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three Dimensional Parabolic Flows, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, p. 1787, 1972
- (15) V.S. Pratap and D.B. Spalding, Numerical Computations of the Flow in Curved Ducts, Aer Quart, Vol. 26, p. 219, 1975
- (16) D.B. Spalding, Theoretical Predicfion of Single-Phase Turbulent Flow and Heat Transfer in Ducts and Rod Bundles, *Turbulent Forced Convection in Channels and Bundles*, S. Kakac and D.B. Spalding Ed., McGraw Hill pp. 115~152, 1979
- (17) A.M. Abdelmegaid, D.B. Spalding, NCG Markatos and K. Muraoka, Comparison of Parabolic and Partially Parabolic Solution Procedures for Three-Dimensional Turbulent Flows around Ships' Hulls, *Turbulent Forced Convection in Channels and Bundels*, S. Kakac and D.B. Spalding Ed., McGraw Hill, pp. 153~174, 1979
- (18) S.V. Patankār, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw Hill, 1980
- (19) M.A. Leschziner and W. Rodi, Calculation of Annular and Twin Parallel Jets Using Various Discretization Schemes and Turbulence-Model Variations, Trans of ASME, Journal of Fluids Eng., Vol. 103, June, pp. 352~360, 1981
- (20) P.G. Huang and M.A. Leschziner, Alternative Schemes for Discretizing Steady Convection, Computational Fluid Dynamics Colloquium, UM IST, 1984
- (21) G.D. Raithy, Skew-Upwind Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 9, pp. 153~164, 1976
- (22) D.P. Leonard, A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 19, pp. 59~98, 1979
- (23) T. Han, J.A.C. Humphrey and B.E. Launder, A Comparison of Hybrid and Quadratic-Upstream Differencing in High Reynolds Number Elliptic Flows, Comp. Methods Applied Mechanics and Engineering, Vol. 29, p. 81, 1981
- (24) P.L. Quere, J.A.C. Humphrey and F.S. Sherman, Numerical Calculation of Thermally Driven Two Dimensional Unsteady Laminar Flow in Cavities of Rectangular Cross Section, Numerical Heat Transfer, Vol. 4, pp. 249~283, 1981
- (25) B.E. Launder and D.B. Spalding, The Numerical Computation of Turbulent Flows, Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, p. 269, 1974
- (26) A. Mellling and J.H. Whitelaw, Turbulent Flow in a Rectangular Duct, J. Fluid Mech., Vol. 78, p. 289, 1979
- (27) Agrawal, L. Talbot and K. Gong, J. Fluid Mech., Vol. 85, p. 497, 1978
- (28) M.E. Crawford and W.M. Kays, STAN5-A Program for Numerical Computation of Two-Dimensional Internal/External Boundary Layer Flows, Report HMT-23, Stanford University, p. 14, 1975

