

<論 文>

薄肉 립 內接齒車의 強度設計†

—應力計算式 作成—

鄭 泰 亨*

(1985年 4月 23日 接受)

Strength Design of Thin-Rimmed Internal Gear

—Formulation of Stress Calculation—

Tae Hyong Chong

Key Words: Gear(치차), Thin-Rimmed Internal Gear(박육림내접치차), Stress Calculation Formulae(응력계산식), Root Fillet Stress(이뿌리응력)

Abstract

The strength calculation for thin-rimmed internal gear design is carried out according to the design method of external gear, although the state of stress at fillet and root areas has difference between the two types of gears. With regard to this state of situation, it is the purpose of this research to develop a new strength calculation method for a thin-rimmed internal gear. Generalizing a lot of FEM calculated results, a set of approximation formulae is derived for the calculation of tooth fillet and root stresses. Also a method is introduced to apply the formulae to the calculation of the stress state of a thin-rimmed internal gear supported by different methods. The measured stress values by strain survey investigations have shown good agreement with those obtained by the calculation method developed in this research. And the validity and reliability of this calculation method have shown. It will contribute to the strength calculation of thin-rimmed internal gear design.

기 호 설 명

- | | |
|--|--|
| <p>b : 치폭</p> <p>c_k : 이끝틀새</p> <p>d : 이뿌리중앙부분의 길이</p> <p>h : 총이높이</p> <p>h_{P1} : 하중점 $P1$ 에서 이의 위험단면까지의 이높이</p> <p>m : 모듈</p> <p>r : 내접치차의 상당원환림 평균반경</p> <p>r_r : 내접치차 이뿌리원 반경</p> <p>s_p : 위험단면 현이두께(치형곡선 연장선과 이뿌리원 교점간의 거리)</p> | <p>s_{P1} : 하중점 $P1$ 에서의 현이두께</p> <p>t : 립두께</p> <p>t_s : 상당원환림두께</p> <p>x : 전위계수</p> <p>x_i : 내접치차 전위계수</p> <p>x_o : 외접치차 전위계수</p> <p>z : 잇수</p> <p>z_i : 내접치차 잇수</p> <p>z_o : 외접치차 잇수</p> <p>$F_i(F_r, F_h, F_m)$: 립단면에서의 내력(반경방향, 원주 방향, 회전방향)</p> <p>E : 종탄성계수</p> <p>I : 상당원환림 단면 2차 모우멘트</p> <p>H : 내접치차의 상당원환림 평균반경에서 이뿌리원</p> |
|--|--|

† 1985년도 대한기계학회 고체역학부문 학술강연회 (5.11)에서 발표

* 正會員, 漢陽大學校 理工大學 機械工學科

- 반경까지의 거리
- L : 치형중심선을 따라서 부하점으로부터 상당원환림 평균반경까지의 거리
- K : 강성매트릭스
- P_n : 치면법선하중
- α : 압력각
- ρ : 필렛(fillet) 곡선의 곡률반경
- ϕ : 이 또는 이뿌리 위치를 지정하는 각도
- ϕ_0 : 절점간의 중심각도
- θ : 치형중심선과 필렛곡선과의 접선이 만드는 각, 필렛의 위치를 지정하는 각도
- $\sigma(\theta)$: 각 θ 위치의 이뿌리에 발생하는 진응력(actual stress)의 크기
- $\sigma_i(\theta)$: 진응력에 대한 응력성분
- $\sigma_{l.nom}$: 이의 위험단면과 립단면에 발생하는 공칭응력(nominal stress)
- ω : 치면부하각도
- ψ : 인벌류우트곡선과 필렛곡선의 절점에서 경사각

1. 서 론

현재 내접치차의 굽힘강도설계는 외접치차에 준하여 이루어지고 있으나, 내접치차의 이(tooth)의 형상은 외접치차와 다르고 또 내접치차의 본체형상은 원환이며 지지방법도 서로 달라 이뿌리에 발생하는 응력상태가 외접치차와는 다르다^(1,2). 특히 유성치차장치에서는 각 유성치차에 하중을 균일하게 분담시키기 위해 내접치차의 립(rim) 두께를 얇게 만들어 탄성변형을 이용하는 경우가 많다. 이런 경우 박육 립 내접치차는 하중을 받는 이의 변형뿐만 아니라 본체의 변형도 크게되어 외접치차의 설계방법을 그대로 적용하기에는 문제가 있다. 이러한 얇은 립 내접치차에 관한 연구는 상당히 이루어지고 있으나⁽²⁻⁴⁾, 지금까지도 이뿌리응력의 정량적인 크기 및 분포를 구하는 일반적인 응력식이 작성되어져 있지 않아 내접치차 강도설계상 하나의 문제점이 되어 있다. 본 연구는 이러한 점에 대처하고 얇은 립 내접치차의 강도설계법을 개발하기 위해 유한요소법(FEM)에 의해 이뿌리응력을 해석, 이 결과를 종합하여 얇은 립 내접치차의 이뿌리응력을 간편하게 계산할 수 있는 근사계산식을 작성한다. 또 스트레인 게이지에 의한 이뿌리응력의 실측치와 이계산식에 의한 계산응력치를 비교검토하여 이 계산식의 계산정밀도 및 신뢰성을 검토하기로 한다.

2. 내접치차 이뿌리응력에 미치는 치형의 영향

치차의 유효치형(working or active toothprofile) 이 치차 이뿌리응력에 미치는 영향을 알아보기 위해 Fig. 1에 보이는 바와 같이 ϕ , 직선, ψ 의 3종류의 치

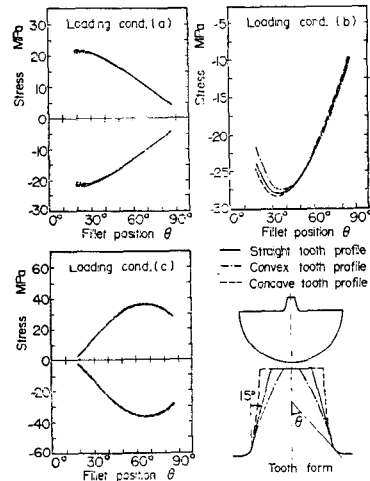


Fig. 1 Differences of tooth fillet and root stress distributions due to differences of working tooth profiles

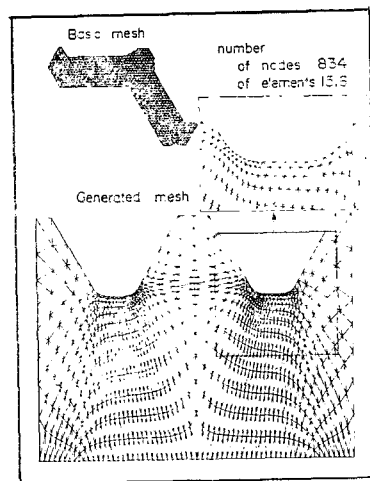


Fig. 2 An example of mesh division in one block for the FEM calculation of tooth fillet and root stresses ($s_f=15\text{mm}$, $t=20\text{mm}$)

형에 대해 필렛(fillet) 부위에서의 응력분포를 검토하였다. 응력에 치형이외의 영향이 들어가지 않도록 하기 위해 이뿌리 위험 단면에서의 이두께, 필렛 곡선의 곡률반경은 3개치형 모두 같게 하였다. 즉 $\phi=15^\circ$, $h=2.25m$, $\rho=0.2m$ 의 치형이다.

응력해석은 유한요소법에 의하여 2차원 탄성평면응력문제로 해석하였고 3개 치형에 대한 유한요소분할은 Fig. 2에 상당하는 계산정밀도를 가진 분할정도로 분할하였다. 치차의 지지는 기초부의 반원호상의 절점을 고정지지하였다. 부하는 Fig. 3에 보이는 부하조건 (a), (b), (c)와 같은 조건의 하중을 이끝(tooth tip)에

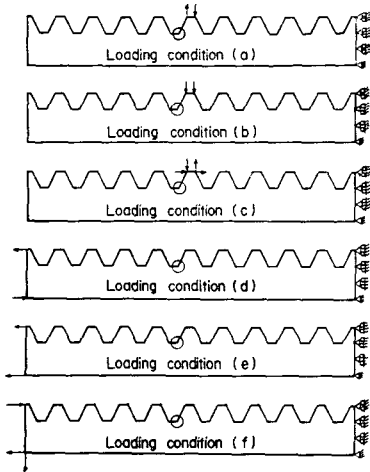


Fig. 3 Basic loading conditions and boundary conditions to investigate the relation between nominal stresses and the stress distributions induced at tooth fillet and root areas of a thin-rimmed internal gear

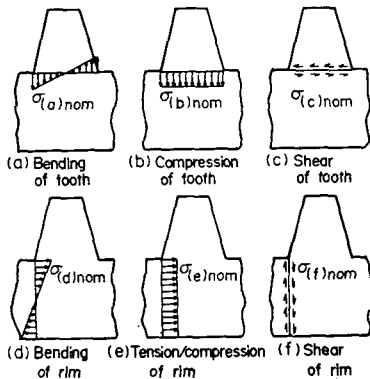


Fig. 4 Nominal stresses of thin-rimmed internal gear

주었다. 부하조건 (a)는 이끝에 모우멘트가 작용하는 경우로 이때 이뿌리위험단면상에는 모우멘트에 의한 공칭 굽힘응력이 발생한다. 즉 Fig. 4-(a)와 같은 공칭굽힘 응력이 발생한다. 부하조건 (b)는 이끝에 압축력이 작용하는 경우로 이뿌리위험단면상에는 Fig. 4-(b)와 같은 공칭압축응력이 일어난다. 부하조건 (c)는 이뿌리 위험단면상에 순수한 공칭전단응력만이 발생하도록 이끝에 접선력과 모우멘트를 동시에 작용시킨 것이다. 즉 접선력에 의해 이뿌리위험단면에 발생하는 굽힘응력을 상쇄하기 위해 모우멘트를 작용시켜 Fig. 4-(c)와 같은 공칭전단응력을 발생하도록 하는 부하조건이다. 치차의 치면에 임의의 하중이 작용할 때의 이뿌리응력 상태는, 림두께가 충분히 두꺼울 경우, 이뿌리위험단면상에서 같은 크기의 공칭굽힘, 압축, 전단응력을 발생토록 하는 부하조건 (a)~(c)의 결과를 중첩(superposition)함으로써 얻을 수 있다. 부하는 이뿌리위험단면에서의 공칭응력이 각각 $9.8MPa(1kgf/mm^2)$ 이 되도록 하는 크기의 하중을 가했다.

이뿌리위험단면상의 공칭굽힘, 압축, 전단응력을 모든 치형에 대해 같게 되도록 부하한 Fig. 1의 경우에는, 부하조건 (b) 경우 이뿌리응력분포가 3자간에 약간의 차이를 나타낸다. 부하조건 (a), (c)에 대해서는 치형(유효치형)이 서로 다르다 하더라도 이뿌리응력의 차이는 거의 없음을 알 수 있다. 전체적으로 보아 이뿌리응력의 크기 및 분포는 필렛 부분의 치수가 같을 경우에는 유효치형 형상의 차이는 실제로 이뿌리응력 상태에 거의 영향을 미치지 않는다고 보아도 좋다. 따라서 이후의 내접치차 이뿌리 응력계산식 유도를 위한 해석에는 인벌류우트 치형 모델의 내접치차가 아니고 직선치형 모델에 대해 해석하여도 충분한 정밀도의 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

3. 박육 림 내접치차의 이뿌리응력계산식

박육 림 내접치차는 부하를 받는 이의 변형뿐만 아니라 림의 변형도 크게되므로, 이뿌리응력상태를 파악하기 위해서는 하중을 받는 이뿐만 아니라 이 이를 포함하여 이웃하고 있는 여러개의 이에 대해서 동시에 응력상태를 해석할 필요가 있다. 따라서 Fig. 3에 보이는 래크모델을 채택하여 응력해석한다. 얇은 림 내접치차의 이뿌리응력분포 및 크기는 치형의 기하학적 형태, 치차본체(rim), 치면상의 하중조건 및 림부분의 지지조건(경계조건)의 함수로 생각하여 해석할 수 있다.

얇은 립 내접치차의 치면에 부하가 작용하면 이뿌리 위험단면상에서 이의 공칭굽힘, 압축, 전단응력 및 이 단면에 수직인 립 단면상에서 립의 공칭굽힘, 인장·압축, 전단응력의 6개 공칭응력(Fig. 4 참조)이 복합하여 발생한다. Fig. 3은 위험단면위치(○표치 부분)에서 이와같은 각각의 공칭응력 $\sigma_{i, nom}(l=(a), \dots, (f))$ 을 발생시키는 기준부하조건 및 경계조건을 나타낸다. 이러한 각각의 기준부하조건에 대한 진응력의 분포 및 크기(응력성분) $\sigma_i(\theta)$ 는 유한요소법응력해석에 의해 구한다. 임의의 부하가 치면에 작용할 때 이뿌리에 발생하는 종합적인 이뿌리진응력의 분포 및 크기 $\sigma(\theta)$ 는 이러한 각각의 응력성분 $\sigma_i(\theta)$ 를 중첩함으로써 얻을 수 있다. 즉,

$$\sigma(\theta) = \sum_{i=(a)}^{(f)} \sigma_i(\theta), \quad l=(a), \dots, (f). \quad (1)$$

각 응력성분 $\sigma_i(\theta)$ 의 해석에는 $s_f=15\sim 40\text{mm}$, $t=20\sim 40\text{mm}$, $\rho=2\text{mm}$, $d=2\text{mm}$, $\psi=30^\circ$, $s_{P1}=s_f/4$ 값을 가진 모델을 채택하였다. 유한요소법에 이용한

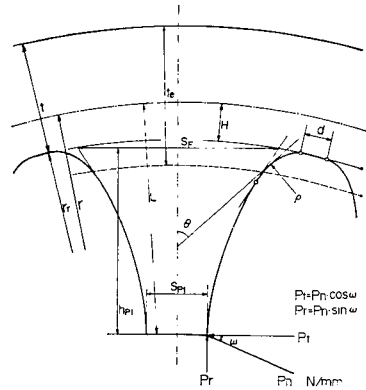


Fig. 5 Notations to show dimensions of tooth and rim of internal gear and a loading condition for calculating tooth fillet and root stresses of internal gear

유한요소분할의 한 예를 Fig. 2에 나타낸다. 응력해석은 2차원탄성응력문제에 취급하였다. Fig. 5는 얇은

Table 1 The values of coefficients A_i and B_{ji}

For stress component	B_{ji}	B_{1i}	B_{2i}	B_{3i}	B_{4i}	B_{5i}	B_{6i}	B_{7i}	B_{8i}	B_{9i}	B_{10i}
	A_i										
$\sigma_{(a)}(\theta)$	A_1	0.1868	0.1424	-0.6379	0.1917	-1.3585	2.4053	-0.4578	-0.2591	-0.6955	2.3180
	A_2	-0.8473	-0.2305	2.0945	-0.8091	5.3016	-8.8757	2.5594	0.4562	0.6635	-6.3258
	A_3	1.0845	-0.0302	-1.8799	0.9714	-6.1152	9.0098	-3.6615	0.9436	1.4223	3.3808
	A_4	-0.3126	-0.0894	0.3521	-0.3462	1.8958	-1.3353	1.3593	-2.1284	-1.2730	1.6254
$\sigma_{(b)}(\theta)$	A_1	0.2673	-5.7444	2.3881	-3.9081	9.7032	7.8069	15.7366	-22.0673	-28.3284	25.7134
	A_2	-1.9383	18.6058	-7.6689	12.5287	-26.8121	-25.9919	-49.7557	66.5725	88.7455	-79.4101
	A_3	3.2617	-18.5263	7.9246	-12.8521	21.2401	25.0307	50.4025	-58.6969	-87.6421	73.9576
	A_4	-1.5128	5.4080	-2.7137	3.9972	-4.1367	-5.4413	-15.5893	12.2824	26.1241	-18.3672
$\sigma_{(c)}(\theta)$	A_1	0.3655	-0.9218	0.0451	-0.0318	-0.0406	3.1892	-0.2759	-3.7370	-1.1378	3.6523
	A_2	-1.0656	3.5478	-0.7172	0.0910	-1.6231	-10.1119	1.8559	16.0303	0.6084	-13.2737
	A_3	0.7988	-3.9218	1.4375	-0.0879	3.9352	8.5824	-2.8251	-19.7806	3.3036	14.0271
	A_4	0.0066	0.6983	-0.3390	-0.0206	-1.7018	-1.1776	0.7225	5.2598	-1.0315	-3.3872
$\sigma_{(d)}(\theta)$	A_1	0.2225	-0.1840	-0.0370	-0.7931	-0.9099	0.7304	3.4874	1.5676	-5.6424	0.5196
	A_2	-0.9175	0.6881	0.2903	2.2467	3.8661	-3.3922	-9.9699	-6.0022	16.7452	-2.3729
	A_3	1.1217	-0.9062	-0.4776	-1.8273	-4.5659	4.9418	8.1076	5.8940	-14.3624	4.1745
	A_4	-0.2958	0.4022	0.0699	0.4311	0.8002	-1.5446	-1.8206	-0.3042	3.3032	-1.4195
$\sigma_{(e)}(\theta)$	A_1	0.1931	-0.1946	-0.0062	0.4596	-0.7343	0.7966	-2.5303	0.7581	3.9979	-4.7973
	A_2	-0.6682	0.4952	0.0910	-1.9652	3.0365	-2.4925	10.2018	-4.4715	-15.8097	15.6538
	A_3	0.7043	-0.3480	-0.1035	2.6622	-3.6605	2.1601	-13.2523	6.7919	20.3354	-15.1151
	A_4	-0.1527	0.1011	-0.0333	-1.0964	0.7590	-0.3493	5.3051	-1.4589	-8.0797	4.8203
$\sigma_{(f)}(\theta)$	A_1	-0.6294	3.8093	0.6164	2.1790	-3.6879	-13.5460	-8.7069	20.0825	16.4098	-13.2669
	A_2	1.4308	-12.7030	-1.7298	-5.8289	15.1932	43.8744	21.7471	-70.8828	-41.1713	35.6949
	A_3	-0.5483	12.0913	2.3017	4.3347	-17.8994	-43.1852	-15.3446	73.2989	29.7858	-28.2001
	A_4	-0.3750	-2.5038	-1.5236	-0.6530	5.6203	11.5341	2.9441	-17.9756	-6.6693	6.3046

림 내접치차의 이뿌리응력상태에 영향을 미치는 기본 인자를 보여주고 있다. 이 가운데서 이뿌리에서의 응력집중에는 s_f/ρ , t/ρ 가 특히 큰 영향을 미치는 점에 주목하여, 각 응력성분을 치형중심선과 필렛곡선에 접하는 접선과 이루는 각도 θ 의 3차 함수

$$\sigma_i(\theta) = (A_1\theta^3 + A_2\theta^2 + A_3\theta + A_4) \cdot \sigma_{i,nom} \quad (2)$$

로 근사시키고, 계수 A_i 는 s_f/ρ , t/ρ 의 3차함수

$$A_i = B_{1i}S^3 + B_{2i}S^2T + B_{3i}ST^2 + B_{4i}T^3 + B_{5i}S^2 + B_{6i}ST + B_{7i}T^2 + B_{8i}S + B_{9i}T + B_{10i} \quad (3)$$

로 표현하기로 한다. 여기에서

$$S = 0.1(s_f/\rho), \quad T = 0.1(t/\rho) \quad (4)$$

이다. Table 1은 Fig. 3의 각각의 기본부하 조건에 대해 공칭응력 $\sigma_{i,nom}$ 이 9.8MPa(1kgf/mm²)일 때의 이뿌리응력분포를 s_f 와 t 의 값을 여러가지로 변화시켜 해석한 결과를 최소자승법에 의해 구한 것으로 식 (2), (3)의 계수치 A_i , B_{ji} 를 나타낸다.

4. 박육 림 내접치차의 이뿌리응력 계산법

4.1. 내접치차 림부의 등가원환두께

Fig. 5와 같은 제원을 가진 얇은 림 내접치차의 이뿌리응력의 분포 및 크기는 식 (1)~(4)에 의해 계산 되어진다. 이때 이의 기하학적 형상 및 치면상의 부하조건에 대해서는 이의 공칭응력(식 (2)의 $\sigma_{(a),nom}$, $\sigma_{(b),nom}$, $\sigma_{(c),nom}$)을 통하여 고려되어지고, 내접치차 림의 곡률반경, 지지조건등은 림의 공칭응력($\sigma_{(d),nom}$, $\sigma_{(e),nom}$, $\sigma_{(f),nom}$)을 통하여 고려되어진다. 그러나 림의 공칭응력은 지지조건에 크게 영향을 받아 간단히 구하기가 어렵다. 따라서 여기에서는 림의 공칭응력, 즉 여러가지의 크기 및 지지조건에 내접치차에 복수개의 유성치차가 맞물리고 있을 때 림의 공칭응력을 구하는 방법에 대해 간단히 논하기로 한다.

림의 공칭응력은 내접치차를 동등한 강성(stiffness)을 갖는 원환으로 치환하여 구한다. 이때 등가원환두께 t_e 는 보정계수 $A(A_{ie}, A_{0e})$ 를 고려한 식^(5,6)

$$t_e = t + Am \quad (5)$$

$$A \begin{cases} A_{ie} = 0.19[1 + c_k/m + \{2 + 17(c_k/m)\}/z] \\ \quad + (0.01x + x/z) \\ A_{0e} = 0.19[1 + c_k/m - \{2 + 17(c_k/m)\}/z] \\ \quad + (0.02x + x/z) \end{cases} \quad (6)$$

을 이용하기로 한다. 식 (6)의 A_{ie} , A_{0e} 는 각각 내접치와 외접치에 대한 보정계수이다. 따라서

$$r = r_r + 0.5\{t + m(A_{0e} - A_{ie})\} \quad (7)$$

$$t_e = t + m(A_{0e} + A_{ie}) \quad (8)$$

로 된다(Fig. 5 참조).

4.2. 림부에 발생하는 내력의 계산

내접치차 림부에 발생하는 변위와 내력의 관계는 Fig. 6에 보이는 바와 같이 내접치차 림부를 유한개

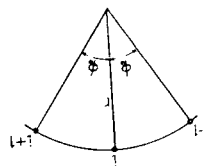


Fig. 6 A continuous curved beam model of internal gear and nodes of curved beam

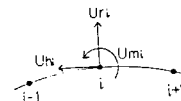


Fig. 7 Displacements in the radial, circumferential, and rotational directions at node i.

의 절점으로 연결되어 있는, 등가원환두께 t_e 를 갖는 곡선보의 연속으로 생각하여 구한다. 어떤 절점 i 에 힘이 작용할 때 절점 i 에서의 반경방향, 원주방향, 회전방향의 변위(Fig. 7 참조)를 각각 U_{ri} , U_{hi} , U_{ni} , 또 같은 방향의 외력을 W_{ri} , W_{hi} , W_{ni} 라고 하면, 변위 및 외력은

$$U_i = \begin{pmatrix} U_{ri} \\ U_{hi} \\ U_{ni} \end{pmatrix} \quad W_i = \begin{pmatrix} W_{ri} \\ W_{hi} \\ W_{ni} \end{pmatrix} \quad (9)$$

로 표현된다. 이때 F_{li} , F_{ri} 를 절점 i 로부터 각각 좌측, 우측의 곡선보가 받는 힘(내력)이라고 하면,

$$\left. \begin{aligned} F_{li} &= B_i^{-1}U_i - B_i^{-1}c_i U_{i-1} \\ F_{ri} &= B_r^{-1}U_i - B_r^{-1}c_r U_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

이고, 3개의 연속하는 절점 $i-1$, i , $i+1$ 의 변위와 절점 i 에 작용하는 외력과의 사이에는

$$B_1 U_{i-1} + B_2 U_i + B_3 U_{i+1} = W_i \quad (11)$$

의 관계이다. 식 (10), (11)에서

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -B_i^{-1}c_i, \quad B_2 = B_i^{-1} + B_r^{-1}, \\ B_3 &= -B_r^{-1}c_r, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$B_i = \frac{r^3}{EI} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b_{11}=0.5(1+k_e)(\phi_0-\sin\phi_0\cos\phi_0), \\ b_{12}=0.5\{(\cos\phi_0-1)^2-k_e\sin^2\phi_0\}, \\ b_{13}=1-\cos\phi_0 \\ b_{22}=0.5\{(3\phi_0-4\sin\phi_0+\sin\phi_0\cos\phi_0) \\ +k_e(\phi_0+\sin\phi_0\cos\phi_0)\}, \\ b_{23}=\phi_0-\sin\phi_0, \quad b_{33}=\phi_0, \quad b_{21}=b_{12}, \\ b_{31}=b_{13}, \quad b_{32}=b_{23}, \end{cases}$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$c_i = \begin{pmatrix} \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 & \sin\phi_0 \\ \sin\phi_0 & \cos\phi_0 & 1-\cos\phi_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad c_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$k_e = (1/3)(t_e/2r)^2 + (1/5)(t_e/2r)^4 + (1/7)(t_e/2r)^6 + \dots$$

n 개의 절점에 대해서는

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_i \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix} \quad (13)$$

로 표현되며, 힘과 변위의 관계로부터

$$W = K U \quad (14)$$

를 얻는다. 여기에서 K 는 강성매트릭스이다.

많은 절점이 존재하고 n 절점마다 같은 변위상태가 반복되며, 어느 절점도 고정하지 않을 경우의 강성매트릭스 K 는

$$K = \begin{pmatrix} B_2 & B_3 & (0) & (0) \cdots (0) & B_1 \\ B_1 & B_2 & B_3 & (0) \cdots (0) & (0) \\ (0) & B_1 & B_2 & B_3 \cdots (0) & (0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0) & (0) & (0) & (0) \cdots B_2 & B_3 \\ B_3 & (0) & (0) & (0) \cdots B_1 & B_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

이다.

내접치차를 기어커플링이나 또는 이와 유사한 핀커플링으로 지지할 경우의 K 는 커플링부의 이를 단순탄성보로 생각하여, 이탄성보의 강성매트릭스 B_i 를 고려함으로써 구할 수 있다. 절점 i 가 U_i 변위했을 때 탄성보가 절점 i 로부터 받는 힘을 F_{ii} 라고 하면

$$F_{ii} = B_i U_i \quad (16)$$

로 되고, 절점 i 에서의 힘의 균형으로부터

$$F_{ii} + F_{ri} + F_{si} = W_i \quad (17)$$

이 얻어진다. 여기에서 식 (12)의 B_2 에 식 (16)의 B_i 를 합한 성분 B'_2 를

$$B'_2 = B^{-1}_i + B^{-1}_r + B_i, \quad (18)$$

라고 하면, 절점 i 의 좌우의 $i-1, i+1$ 절점을 포함한 힘의 균형은

$$B_1 U_{i-1} + B'_2 U_i + B_3 U_{i+1} = W_i \quad (19)$$

와 같이 된다. 어떤 절점도 고정되지 않은 경우의 관계식 (11)과 식 (19)를 비교하면, 내접치차의 지지조건을 고려하여 강성매트릭스를 구하는데에는 식 (15)의 K 의 성분 가운데서 지지점에 대응하는 B_2 성분은 B_2 를 합하면 된다는 것을 알 수 있다.

또 내접치차를 보울트등으로 고정하는 경우는 고정보울트의 강성매트릭스 B_b 를 고려하여 식 (15)의 K 의 성분중에서 고정점에 대응하는 성분은 B_b 를 합하면 강성매트릭스 K 를 구할 수 있다. 또는 보울트를 강체로 생각하면 보울트고정 절점 i 의 변위를 $U_i \approx 0$ 으로 놓아 강성매트릭스를 구하여도 된다.

한편, 치면에 작용하는 외력 W_i 는

$$W_i = \begin{pmatrix} P_n \sin\omega \\ P_n \cos\omega \\ -LP_n \cos\omega + 0.5s_{p1} P_n \sin\omega \end{pmatrix} \quad (20)$$

이고, 맞물리고 있지 않은 내접치차의 이에 대해서는 $W_i = 0$ 이다.

4. 3. 공칭응력의 계산

Fig. 4는 얇은 립 내접치차의 이부리응력상태를 구하는데 필요한 6개의 공칭응력 $\sigma_{l, \text{nom}} (l=(a), \dots, (f))$ 을 나타낸다. 이중에서 이의 위험단면에 생기는 이의 굽힘, 압축, 전단 공칭응력은 외접일체치차의 경우와 똑같이 구할 수 있다. 립의 굽힘, 인장·압축, 전단 공칭응력은 식 (10) 등에서 구한 내력 F_i 를 이용하여 구할 수 있다. 즉 단위치폭에 대해,

이의 공칭굽힘응력 :

$$\sigma_{(a), \text{nom}} = \pm 6(P_n/s_F^2)(h_{P1} \cos\omega - 0.5s_{p1} \sin\omega) \quad (21)$$

이의 공칭압축응력 :

$$\sigma_{(b), \text{nom}} = -P_r/s_F = -P_n \sin\omega/s_F \quad (22)$$

이의 공칭전단응력 :

$$\sigma_{(c), \text{nom}} = \pm P_t/s_F = \pm P_n \cos\omega/s_F \quad (23)$$

림의 공칭굽힘응력 :

$$\sigma_{(d), \text{nom}} = F_n/(tr)[1-H/\{k(r-H)\}] \quad (24)$$

림의 공칭인장·압축응력 :

$$\sigma_{(e), \text{nom}} = F_h/t \quad (25)$$

림의 공칭전단응력 :

$$\sigma_{(f), \text{nom}} = F_r/t \quad (26)$$

이고, 부호 +, -는 인장축, 압축축 응력을 구할 때

사용하며, $k=(1/3)(t/2r)^2+(1/5)(t/2r)^4+(1/7)(t/2r)^6+\dots$, 이다.

5. 박육 립 내접치차 이뿌리응력계산법 검토

5.1. 이뿌리응력 실측실험

내접치차는 용도에 따라 여러가지 지지 방법이 채용되고 있으나, 보울트로 립부를 고정하거나, 기어커플링 또는 이와 유사한 커플링으로 립의주부를 지지하는 방법이 많이 쓰이고 있다. 이러한 내접치차의 경우 본 연구에서 제안한 응력계산식에 의해 이뿌리응력을 어느 정도 정확히 계산할 수 있는가를 검토하기 위해 스트레인게이지를 사용하여 이뿌리응력 실측실험을 하였다. 실험은 3개의 유성치차와 맞물리는 내접치차를 대상으로, Fig. 8 과 같이 내접치차를 보울트(3개 또는 6개)로 고정하는 경우(보울트고정)와 Fig. 9 와

같이 내접치차 립 외주부를 외부프레임으로 롤러를 통하여 지지하는 경우(롤러지지 또는 핀커플링)의 두가지지를 하였다. 핀커플링이란 Fig. 9 에 보이는 바와 같이 내접치차와 외부프레임 사이에 핀구멍(롤러구멍)을 내접치차 잇수와 같은 수만큼 만들어, 이 가운데 롤러를 넣어 지지하는 방법으로 롤러구멍직경을 8.25mm로 하고 8mm의 롤러를 사용하였다. 롤러구멍은 내접치차 이의 바로 뒷편에 설치하였다.

스트레인게이지를 사용하여 이뿌리응력을 측정 한 시험내접치차는 $m=4mm$, $\alpha=20^\circ$, $z_i=66$, $h=2.25m$, 0.45% 탄소강으로된 표준평치차이다. 립두께는 27mm(6.75m), 18mm(4.5m), 12mm(3m), 8mm(2m)의 4 종류이다. 응력측정에는 0.5mm 길이의 스트레인게이지를 사용하였고, 측정위치는 핀랫곡선상의 $\theta=45^\circ$ 지점과 이뿌리중앙부분(center of bottom of tooth space)이며 부하를 받는 이를 포함하여 내접치차 전체에 대해 각각의 이뿌리에서 응력을 동시에 측정하였다.

내접치차의 부하는 Figs. 8, 9 에 보이는 바와 같이 유성치차기구를 이용한 정적내접치차 시험기를 사용하여 한쌍물림상태 및 2쌍물림상태에서 하중을 가하였다. 이시험장치는 3개의 유성치차를 가진 유성치차장치로서 하중을 가할 수 있는 아암이 태양치차축에 부착되어 있다. 부하토크는 부하아암에 주어져 태양치차축으로 전달되고, 이어서 태양치차의 이, 유성치차의 이, 내접치차의 이의 순으로 힘이 전달된다.

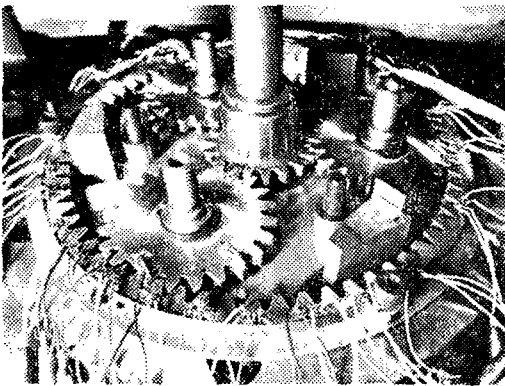


Fig. 8 A statically loading apparatus using simple epicyclic gear train for internal gear

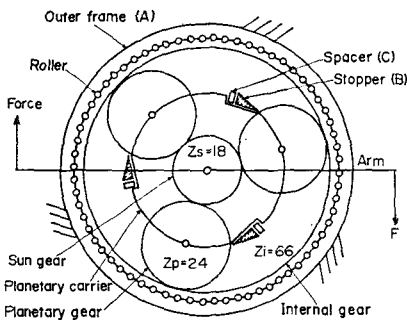
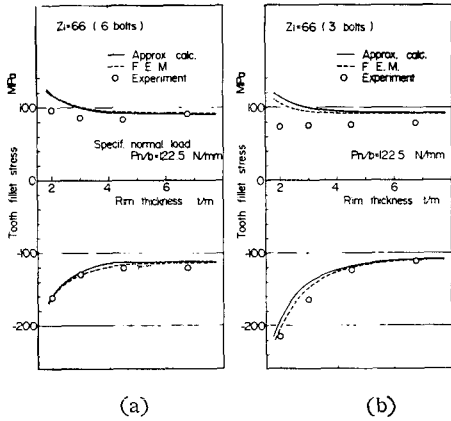


Fig. 9 Test setup schema when an internal gear is supported by rollers(pinned coupling)

5.2. 이뿌리응력 실측치와 계산치의 비교검토

Figs. 10, 11 은 한쌍물림상태에서 이끝에 부하되었을 때 부하를 받는 이의 핀랫응력을 립두께에 따라 변화하는 모양을 인장축, 압축축에 대해 보여주고 있다. Fig. 10 에서 부하를 받는 이의 위치는 고정보울트간 중앙에 위치한다. 그림들로부터 립두께가 얇아질수록 이뿌리압축응력은 크게 증가하나 인장응력은 지지조건에 따라 약간 증가하거나 거의 증가하지 않는 것을 알 수 있다. 이 이유는 립두께가 얇아짐에 따라 변형이 커져서 립의 굽힘에 의한 압축응력이 부하가 작용하는 이의 이뿌리에서 커지기 때문이다. 즉, 인장축에서는 이용력과 이의 굽힘응력성분이 상쇄되어 전체적으로 인장응력이 거의 증가하지 않으나, 압축축에서는 이와반대로 양자가 합하여져 압축응력이 급격히 증대하는 것으로 생각할 수 있다. 또 립두께가 $t>6m$ 이상이면 지지조건에 관계없이 거의 일정한 응력치를 가지는 것을 알 수 있다. 실측응력치와 본연구에서 제안한 계산응력치를 비교검토하여 보면 양자는 비교적 잘 일치하고



(a) Internal gear fixed by 6 bolts
(b) Internal gear fixed by 3 bolts
Fig. 10 Fillet stresses of a loaded tooth of internal gear fixed by bolts (at $\theta=45^\circ$)

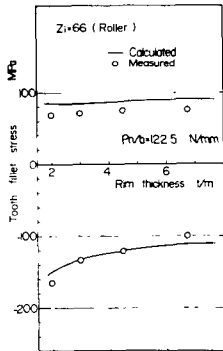


Fig. 11 Comparison between measured and calculated fillet stresses of a loaded tooth when an internal gear is supported by rollers (at $\theta=45^\circ$)

있으나, 인장측에서 특히 립두께가 얇을 때 양자간에 약간의 차이가 있음을 알 수 있다. 이차이의 이유로는 실제의 실험에서는 하중이 가해지면 립과 이의 변형 때문에 이끝에서의 부하각도 ω 와 치면상의 부하위치가 약간 변화하나, 계산에서는 이점을 고려치 않았고 또 보울트고정점에서는 회전변형까지 포함하여 완전고정하는 조건으로 계산한 이유등이라고 생각된다. 또 Fig. 10에서 유한요소해석응력치와 본계산법에 의한 계산응력치가 거의 일치하고 있음을 알 수 있다.

Figs. 12, 13은 부하를 받는 이를 포함하여 내접치차 전체의 1/3 스패에 대해 각각의 이의 이뿌리중앙에서 발생하는 응력치를 실측치와 계산치(선)를 립두께

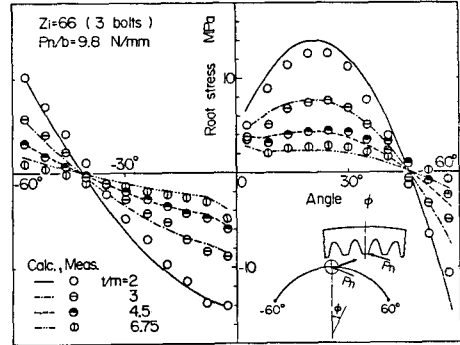


Fig. 12 Root stresses at bottoms of tooth spaces over 1/3 of span of internal gear fixed by bolts under single tooth pair meshing

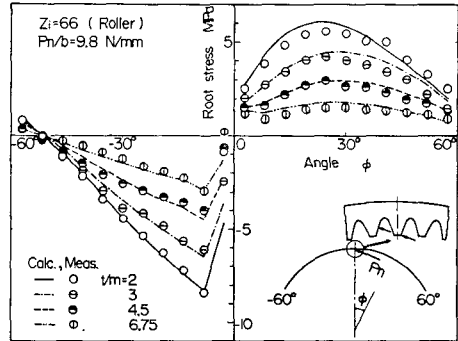


Fig. 13 Root stresses at bottoms of tooth spaces over 1/3 of span of internal gear under double tooth pair meshing when an internal gear is supported by rollers

에 따라 비교하여 나타낸 것이다. 그림의 횡축은 각각의 이 또는 이뿌리 위치를 부하가 작용하는 이의 중심선으로부터의 각도 ϕ 로 나타내고 있다. 실측응력치와 계산응력치는 좋은 일치를 보여주고 있으며, 따라서 본 계산법의 실제사용에서의 신뢰도는 매우 높다고 할 수 있다. 그림으로부터 립 두께가 얇아짐에 따라 응력치는 인장측, 압축측 어느 쪽에서나 증가하고 있음이 인정된다. 인장측에서는 립두께가 얇아짐에 따라 부하를 받는 이의 응력치보다 이 이로부터 상당히 떨어져 있는 이($\phi=25^\circ$ 부근)의 이뿌리응력치가 더욱더 크게 나타나는 데 비해, 압축측에서는 항상 부하를 받는 이의 응력이 가장 크게 나타남을 알 수 있다. 즉 립두께 변화에 따라 최대인장응력 발생위치가 변화하고 있음을 알 수 있으며, 립 지지 조건에 따라 발생응력치의 절대치가 달라지고 있음을 알 수 있다.

6. 결 론

(1) 얇은 림 내접치차의 이에 부하가 작용할 때, 이 부하에 의해 이뿌리에 발생하는 여섯 가지 공칭응력을 기본으로 하여 이뿌리에 발생하는 진응력의 크기 및 분포를 구하는 이뿌리응력계산식을 작성하였다.

(2) 내접치차 림부에 발생하는 공칭응력을 구하는 계산법을 밝혔다. 이계산법은 내접치차를 보울트로 고정하는 경우 뿐만 아니라 기어커플링등으로 지지하는 경우에도 이용된다.

(3) 본 계산법에 의해 구한 얇은 림 내접치차의 이뿌리응력치는 유한요소법에 의해 구한 계산치와 또 이뿌리실측응력치와도 잘 일치하였다. 따라서 이 식은 얇은 림 내접치차 이뿌리응력을 간편하게 계산할 수 있는 유효한 실용적 수단임이 밝혀졌다.

(4) 내접치차에서는 림두께가 두꺼울 때 최대인장응력 발생위치는 부하가 작용하는 이의 필렛부근이나 림두께가 얇아지면 부하가 작용하는 이로부터 떨어진 이의 이뿌리중앙에서 최대인장응력이 발생한다. 한편 최대압축응력은 언제나 부하가 작용하는 이의 이뿌리에서 발생한다.

후 기

본 연구는 1984년도 한국과학재단의 연구지원에 의

하여 수행되어 졌다. 이에 깊은 감사의 뜻을 표한다.

참 고 문 헌

- (1) 정태형, 내접치차의 강도에 관한 연구, 자동차공학회지, Vol. 6, No. 3, pp.45~54, 1984
- (2) Chong, T.H. et al., Bending Stresses of Internal Spur Gear, Bull. Japan Soc. Mech. Engrs., Vol. 25, No. 202, pp.676~686, 1982
- (3) 日高 外 2 名, 内齒平齒車の曲げ強度に及ぼす内齒車圓環部の厚さと齒數の影響, 日本機械學會論文集 C編, 第 49 卷 第 441 號, pp.803~810, 1983
- (4) Oda, S. et al., Effects of Rim Thickness on Root Stress and Bending Fatigue Strength of Internal Gear Tooth, Bull. Japan Soc. Mech. Engrs., Vol. 27, No. 230, pp.1759~1764, 1984
- (5) Sinkevich, Yu. B. and Sholomov, N.M., Effect of Toothed-Ring Geometry on the Stiffness of its Rim, Russian Engng. J., 51-6, pp.25~28, 1971
- (6) Dinovich, M. Ya., Rigidity of the Toothed Rim on Spur Gear, Russian Engng. J., pp.26~29, 1975