

<論 文>

유한해석법에 의한 비대칭 급확대 채널에서의  
층류 유동 해석

李宗信\* · 孟柱星\*\* · 孫炳鎭\*\*

(1985년 2월 5일 접수)

Analysis of Laminar Flow in Asymmetric Sudden  
Expansion Channel by F.A.M.

Jong Sin Lee, Joo Sung Maeng and Byung Jin Son

**Key Words:** Finite Analytic Method(유한해석법), Separation(박리), Laminar Flow(층류유동), Reattachment Point(재부착점), Recirculation Region(재순환영역)

Abstract

This analysis of numerical procedure is the prediction of the laminar flow at two dimensional and steady flow in an asymmetric sudden expansion channel. Numerical solutions for the flow field are obtained by the finite analytic numerical method applied to the full Navier-stokes equations expressed in terms of vorticity and stream function. The finite analytic numerical method differs from other numerical methods in that it utilizes a local analytic solution in an element of the problem to construct the total numerical solution.

Results of this finite analytic method is in good agreement with the given experimental study. It is shown that the finite analytic method is promising as a numerical method of viscous flows.

기 호 설 명

<p><math>A, B</math> : 와도 수송방정식(vorticity transport equation)에서의 선형화된 <math>x, y</math> 성분계수.</p> <p><math>a_i, b_i</math> : 방정식 (12)식에서 <math>\xi(x, y)</math>를 나타내는 2차다항식의 계수(<math>i=0, 1, \dots, 9</math>)</p> <p><math>a_{sub}, b_{sub}</math> : (sub=E, W, N, S-4 sides) 와도 수송방정식과 Poisson 방정식에서 경계근사에 사용된 2차다항식</p> <p><math>B_{sub}</math> : (sub=EC, WC, NC, ...) Poisson 방정식 식 (13)의 비제차항해에 대한 유한해석계수</p> <p><math>C_{sub}</math> : (sub=NE, NW, SW, ...) 와도 수송방정식에 대한 유한해석계수</p>	<p><math>D_{sub}</math> : (sub=EC, NW, SC, ...) Poisson 방정식의 제차항해에 대한 유한해석계수</p> <p><math>H</math> : 스텝높이</p> <p><math>h</math> : <math>x</math> 방향의 무차원격자간격</p> <p><math>k</math> : <math>y</math> 방향의 무차원격자간격</p> <p><math>Re</math> : Reynolds 수</p> <p><math>u</math> : 무차원화된 <math>x</math> 방향의 속도</p> <p><math>\bar{u}</math> : 유한해석요소에서의 총합평균속도</p> <p><math>u^*, v^*</math> : <math>x, y</math> 방향의 속도성분</p> <p><math>\bar{v}</math> : 유한해석요소에서의 법선방향의 총합평균속도</p> <p><math>X_r</math> : 재부착점의 길이</p> <p><math>X, x</math> : 수평방향의 유차원, 무차원화된 좌표변수</p> <p><math>Y, y</math> : 법선방향의 유차원, 무차원화된 좌표변수</p>
---	--

\* 한양대학교 대학원

\*\*정회원, 한양대학교 공과대학 기계공학과

- $\beta_0$  : 유량함수에 대한 외부반복 이완계수  
 $r_0$  : 유량함수에 대한 내부반복 이완계수  
 $\nu$  : 동점성계수  
 $\xi$  : 와도  
 $\rho$  : 밀도  
 $\psi$  : 유량함수

### 상첨자

- $m$  : 수치계산에서 바로 전단계의 내부반복값  
 $m+1$  : 수치계산에서 현재 내부반복값  
 $k$  : 수치계산에서 바로 전단계의 외부반복값  
 $k+1$  : 수치계산에서 현재 외부반복값

## 1. 諸 論

유동과 열전달을 지배하는 Navier-stokes 방정식과 에너지 방정식은 방정식의 비선형성 및 기하학적 구조의 복잡성등으로 인하여 해석적 해를 구하는 것이 불가능하다. 따라서 오늘날 유한차분법과 유한요소법이 널리 사용되고 있으나 이 방법들의 단점 중 하나는 높은 Reynolds 수 및 Peclet 수에서의 불안정성과 부정확성의 발생이다. 이러한 점들을 개선하기 위하여 Chen & Li 등에 의해 개발된 유한 해석법은 편미분 방정식의 수치해에서 선형화된 해석해를 사용한 점이 유한차분법이나 유한요소법과 다르다. 이와같은 방법은 선형 편미분 방정식의 수치해를 구하기 위해 이미 Hockney, Williams 등이 사용해 왔으나, Navier-stokes 방정식 및 에너지 방정식과 같은 비선형 편미분 방정식의 해를 구하기 위한 시도는 Chen 등에 의해 처음으로 시도되었다. 지금 개발되는 단계에 있지만 Chen & Li<sup>(1)</sup>, Chen & Obasih<sup>(2)</sup>, Chen & Chang<sup>(3)</sup> 등은 유한해석법이 안정하며 정확하고 수렴이 잘 되는 사실을 알아내고 Manohar<sup>(4)</sup> 등은 경계조건으로 고계의 다항식을 사용하여 유한해석법의 정확성을 높이려고 시도하였다.

유동장내에서 유체가 흐르는 표면에 불연속적인 변화가 있을 경우, 압축성 유동장내에 충격파가 존재할 경우에 비행체나 유체기계에 항력을 증대시키고, 압력강하, 에너지손실등 바람직하지 못한 현상을 수반하는 박리현상이 발생한다. 이러한 박리현상은 유체유동장내에서 박리 영역을 형성하여 와류를 일으킬 뿐만 아니라 열전달에도 박리영역의 크기에 따라 커다란 영향을 미치므로 이러한 박리현상을 예측하는것은 항력과 열전달현상을 이해하는데 도움을 준다.

본 연구에서는 내류(internal flow)에서 유로가 비대칭으로 급확대될 경우의 박리현상과 유동현상을 고찰

하였다.

비대칭 급확대 채널에서의 층류영역에서 난류영역까지의 유동현상을 B.F. Armaly<sup>(5)</sup>, C.E. Thomas<sup>(6)</sup>는 실험적 해석과 유한요소법을 사용하여 이론적 해석을 하였고 Donald. M. Kuehn<sup>(7)</sup>, Denham & Patrick<sup>(8)</sup>, Kwon<sup>(9)</sup>, Patrick J. Roache<sup>(10)</sup>, Anand Kumar<sup>(11)</sup> 등은 같은 모델에 대해서 실험적 해석과 유한차분법을 사용하여 이론적 해석을 하였으며 지금까지의 유한해석법에 의한 연구는 입구와 출구조건이 같은 경우 및 밀폐공간 혹은 한면의 속도가 주어지는 밀폐공간등에 대해 수행되어 왔으나 본 연구에서는 입구와 출구조건이 같지 않은 2차원, 비대칭 급확대 채널에서의 유동현상을 유한해석법으로 해석하여 실험치와 비교하였다.

## 2. 이론 해석

### 2.1. 연구 모델 및 가정

본 연구에서 사용한 채널의 기하학적 형태는 Fig. 1과 같다.

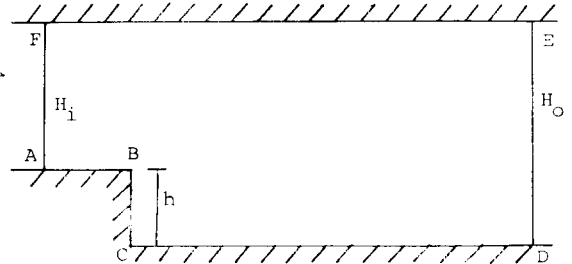


Fig. 1 Schematic diagram of sudden expansion channel

Fig. 1에서  $H$ 는 채널입구의 높이이고  $h$ 는 스텝의 높이이다.

이론해석에 사용한 가정은 다음과 같다.

- (1) 2차원 정상유동을 하는 비압축성 유체이다.
- (2) 유체유동은 층류유동이다.
- (3) 모든 유체의 물성치는 일정하다.
- (4) 부력은 점성력과 압력에 비하여 무시할 만큼 작다.
- (5) 채널입구에서의 유동은 완전히 발달된 속도분포로 유입된다.

### 2.2. 지배방정식 및 경계조건

비압축성 2차원 정상층류유동에 대한 연속방정식과 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (1)$$

$$\rho^* \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu^* \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2)$$

$$\rho^* \left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \mu^* \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3)$$

지배방정식을 무차원화 하기위해 다음과 같은 무차원 수들을 도입하였다.

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{L}, \quad u = \frac{u^*}{\bar{u}}, \quad v = \frac{v^*}{\bar{v}}, \quad P = \frac{P^*}{\rho \bar{u}^2} \quad (4)$$

유량함수  $\phi$  와 와도  $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  를 도입하면 무차원화된 지배방정식은

$$\nabla^2 \phi = -\xi \quad (5)$$

$$Re[u \xi_x + v \xi_y] = \xi_{xx} + \xi_{yy} \quad (6)$$

지배방정식에 사용된 경계조건은 다음과 같다.

(1) 수평벽면(AB, CD)

$$\phi = u = v = 0$$

$$\xi = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

(2) 수직벽면(BC)

$$\phi = u = v = 0$$

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x}$$

(3) 입구조건 (OA)

$$\phi = 1 - \int_0^y u_e dy$$

$$\xi = - \frac{\partial u_e}{\partial y}$$

$$u_e = 6y(1-y)$$

$$v = 0$$

(4) 평행윗면에서 (EF)

$$\phi = 1$$

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$u = v = 0$$

(5) 출구조건(ED)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

### 2.3. 지배방정식에 대한 유한해석법의 전개

式 (6)으로 표시되는 와도 수송방정식 및 Poisson 방정식의 해를 구하기 위해 Fig. 2와 같은 유한해석요소를 생각한다.

유한해석요소내에서의 式 (6)의 해석적 해를 구하기 위해서는 먼저 式 (6)을 선형화시켜야 한다. 하나의 유한해석요소에 대한 속도의 적분평균값  $\bar{u} = \int u ds / ds$ ,  $\bar{v} = \int v ds / ds$  를 도입하여

$$A = \frac{1}{2} Re \bar{u} = \frac{1}{2} Re \int_{-h}^h u dx dy / 4hk$$

$$B = \frac{1}{2} Re \bar{v} = \frac{1}{2} Re \int_{-h}^h v dx dy / 4hk$$

( $\phi$  는  $\phi$  와  $\xi$ )

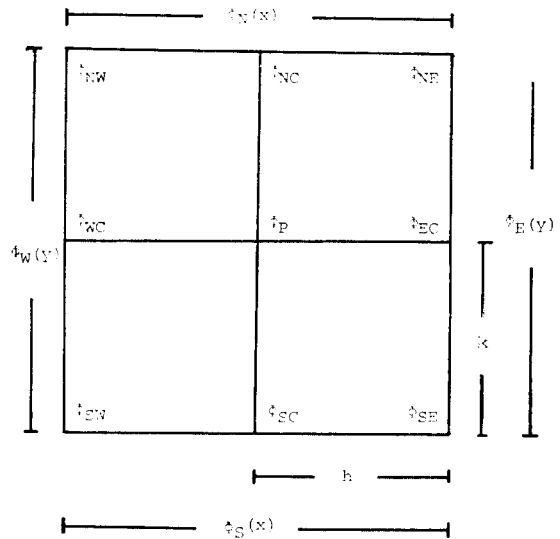


Fig. 2 FA element

와 같이  $A, B$  를 정의하면 式 (6)을 다음과 같이 선형화시킬 수 있다.

$$2A\xi_x + 2B\xi_y = \xi_{xx} + \xi_{yy} \quad (7)$$

여기서 경계조건은 ( $h=k$  인 경우)

$$x=h; \quad \xi_E = \xi_E(h, y)$$

$$x=-h; \quad \xi_W = \xi_W(-h, y)$$

$$y=k; \quad \xi_N = \xi_N(x, k)$$

$$y=-k; \quad \xi_S = \xi_S(x, -k)$$

이때

$$\xi_E(y) = a_E + b_E y + c_E y^2$$

$$a_E = \xi_{EC}$$

$$b_E = (\xi_{NE} - \xi_{SE}) / 2k$$

$$c_E = (\xi_{NE} - 2\xi_{EC} + \xi_{SE}) / 2k^2 \text{ 이며}$$

같은 방법으로  $\xi_N(x), \xi_S(x), \xi_W(y)$ 도 2차식으로 근사시킬수 있다.

式 (7)에  $\xi = \xi e^{Ax+By}$ 를 써서 변환시키면 Modified Helmholtz 방정식을 얻어 변수분리가 가능하게 된다.

$$(A^2 + B^2)\xi = \xi_{xx} + \xi_{yy} \tag{8}$$

이때 경계조건은

$$x = h; \xi(h, y) = \xi_E(y)e^{-(Ah+By)}$$

$$x = -h; \xi(-h, y) = \xi_W(y)e^{-(Ah-By)}$$

$$y = k; \xi(x, k) = \xi_N(x)e^{-(Ax+Bk)}$$

$$y = -k; \xi(x, -k) = \xi_S(x)e^{-(Ax-Bk)}$$

수정된 Helmholtz 방정식을 경계조건을 이용하여 변수분리법으로 풀어 유한해석 요소내에서 해석적 해를 구하면 다음과 같다.

$$\xi_P = C_{EC}\xi_{EC} + C_{WC}\xi_{WC} + C_{NC}\xi_{NC} + C_{SC}\xi_{SC} + C_{NE}\xi_{NE} + C_{NW}\xi_{NW} + C_{SW}\xi_{SW} + C_{SE}\xi_{SE} \tag{9}$$

여기서  $h=k$  이면

$$C_{NE} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cosh f_n} [e^{-Ah}(E_2 + E_3) + e^{-Bh}(\bar{E}_2 + \bar{E}_3)]$$

$$C_{EC} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cosh f_n} e^{-Ah}[E_1 - E_3]$$

$$C_{SE} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cosh f_n} [e^{-Ah}(-E + E_3) + e^{Bh}(\bar{E}_2 + \bar{E}_3)]$$

$$C_{SC} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cosh f_n} e^{Bh}[\bar{E}_1 - \bar{E}_3]$$

$$C_{SW} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cosh f_n} [e^{Ah}(-E_2 + E_3) + e^{Bh}(-\bar{E}_2 + \bar{E}_3)]$$

$$C_{WC} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cosh f_n} e^{Ah}(E_1 - E_3)$$

$$C_{NW} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cosh f_n} [e^{Ah}(E_2 + E_3) + e^{-Bh}(-\bar{E}_2 + \bar{E}_3)]$$

$$C_{NC} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cosh f_n} e^{-Bh}(\bar{E}_1 - \bar{E}_3)$$

단,  $E_j = \int_{-1}^1 x^{j-1} e^{-Bhx} \cos a_n x dx$  ( $j=1, 2, 3$ )

$$\bar{E}_j = \int_{-1}^1 y^{j-1} e^{-Byy} \cos a_n y dy$$

$$f_n = \sqrt{(Ah)^2 + (Bh)^2 + a_n^2}$$

$$a_n = \pi \left( n - \frac{1}{2} \right)$$

Poisson 방정식의 유한해석 해를 구하기 위해 Fig. 2와 같은 유한해석요소를 사용한다.

$$\nabla^2 \phi = -\xi(x, y) \tag{10}$$

유한해석요소에 대한 경계조건은

$$x = h; \phi_E = \phi_E(h, y) \tag{11}$$

$$x = -h; \phi_W = \phi_W(-h, y)$$

$$y = k; \phi_N = \phi_N(x, k)$$

$$y = -k; \phi_S = \phi_S(x, -k)$$

유한해석요소에 대한 경계조건 유량함수  $\phi_E(y), \phi_W(y), \phi_N(x), \phi_S(x)$ 를 2차식을 사용하여 근사시킨다.

式 (10)의 비제차항  $\xi(x, y)$ 는  $x, y$ 에 대한 2차식으로 근사시킬수 있다.

$$\xi(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^2y^2 \tag{12}$$

式 (10)을 경계조건 式 (11, 12)를 사용하여 변수분리법으로 해석적 해를 구하고 내부점  $P(x=0, y=0)$ 에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$\phi(x, y) = D_{NE}\phi_{NE} + D_{EC}\phi_{EC} + \dots + D_{WC}\phi_{WC} + B_P\xi_P + B_{NE}\xi_{NE} + B_{EC}\xi_{EC} + \dots + B_{WC}\xi_{WC} \tag{13}$$

여기서  $h=k$  인 경우

$$D_{EC} = D_{WC} = D_{NC} = D_{SC} = 0.205315$$

$$D_{NE} = D_{NW} = D_{SW} = D_{SE} = 0.044685$$

$$B_{EC} = B_{WC} = B_{NC} = B_{SC} = 0.018522 h^2$$

$$B_{NE} = B_{SE} = B_{SW} = B_{NW} = 0.01895 h^2$$

$$B_P = 0.21289 h^2 \text{을 얻는다.}$$

또 속도성분  $u, v$ 는 유량함수를 미분하여 얻을 수 있다.

$$u(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y}$$

$\phi(x=0, y=0)$ 에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$u_P = D_{y,NE}\phi_{NE} + D_{y,EC}\phi_{EC} + \dots + D_{y,NC}\phi_{NC} + B_{y,P}\xi_P + B_{y,EC}\xi_{EC} + \dots + B_{y,NC}\xi_{NC} \tag{14}$$

$$D_{y,NW} = D_{y,NE} = -D_{y,SW} = -D_{y,SE} = 0.07468 h^{-1}$$

$$D_{y,WC} = D_{y,EC} = 0$$

$$D_{y,NC} = -D_{y,SC} = 0.35063 h^{-1}$$

$$B_{y,NE} = B_{y,NW} = -B_{y,SW} = -B_{y,SE} = 0.00451 h$$

$$B_{y,WC} = B_{y,EC} = B_{y,P} = 0$$

$$B_{y,NC} = -B_{y,SC} = 0.06554 h$$

같은 방법으로 속도  $v$ 를 구할수 있다.

$$v(x, y) = -\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x}$$

$$v_P = D_{x,EC}\phi_{EC} + D_{x,NE}\phi_{NE} + \dots + D_{x,NC}\phi_{NC} + B_{x,P}\xi_P + B_{x,NE}\xi_{NE} + \dots + B_{x,NC}\xi_{NC} \tag{15}$$

여기서  $h=k$  인 경우

$$D_{x,NW} = D_{x,SW} = -D_{x,NE} = -D_{x,SE} = 0.07468 h^{-1}$$

$$D_{x,NC} = D_{x,SC} = 0$$

$$D_{x,WC} = -D_{x,EC} = 0.35063 h^{-1}$$

$$B_{x,NW} = B_{x,SW} = -B_{x,NE} = -B_{x,SE} = 0.00451 h$$

$$B_{x,WC} = -B_{x,EC} = 0.06554 h$$

$$B_{x,NC} = B_{x,SC} = B_{x,P} = 0$$

2.4. 해석 방법

각 절점의 간격은  $x, y$  방향으로  $\Delta x = \Delta y$  로서 균일하게 나누었으며 그 크기는 벽에 인접한 경계층 영향을 고려하여  $1/\sqrt{Re}$  의 크기 이하가 되도록 결정하였다.

式 (9, 13, 14, 15)는 한 유한해석요소에서 서로 연결된 연결방정식이다.  $\xi_P, \phi_P, u_P, v_P$  는 절점  $P$  주위의 8개

의 절점에서의 각각의 값으로 표시되며 이것을 전체 해석영역에 분포된  $M \times N$ 개의 절점에 확장하면 각각  $(M-1) \times (N-1)$ 개의 연결방정식이 형성된다. 이 연결방정식을 각각 Gauss Seidel 방법이나 line by line implicit 방법으로 해를 구할 수 있다.

본 연구에서 사용한 Program 의 유동도는 Fig. 3에 나타나 있다.

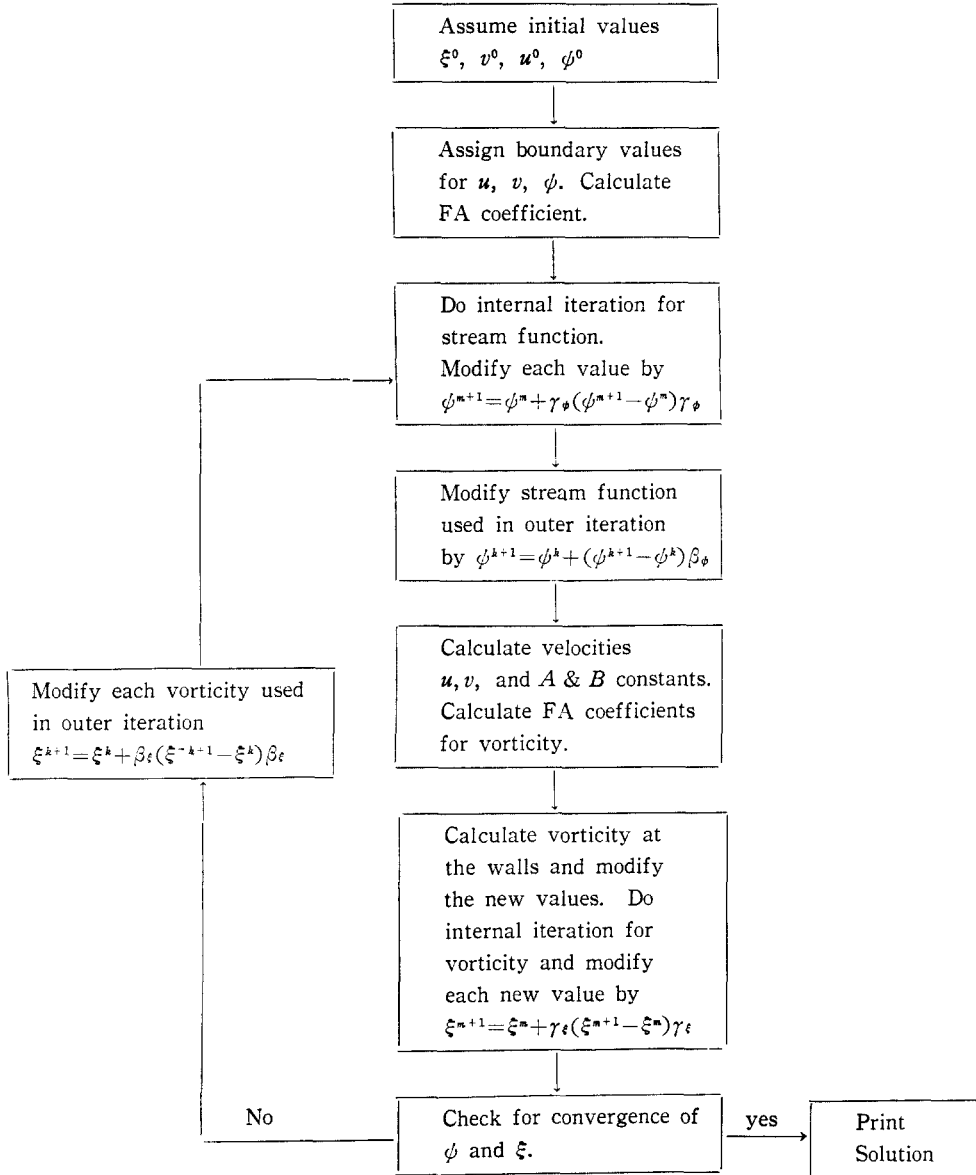


Fig. 3 Numerical solution flow chart for flow field

3. 해석결과 및 고찰

본 연구에서는 유한해석법을 사용하여 채널입구에서 완전히 발달된 유동형태의 속도분포를 갖는 층류영역의 유동현상을 예측하였다. Denham 과 M.A. Patrick<sup>(6)</sup>은 Laser anemometer 를 사용하여  $H_i/h$ 의 값이 2인 비대칭 급확대 채널에서의 유동현상을 Reynolds 수를 변화시키며 각각 측정하였다. Fig. 4는 Reynolds 수가

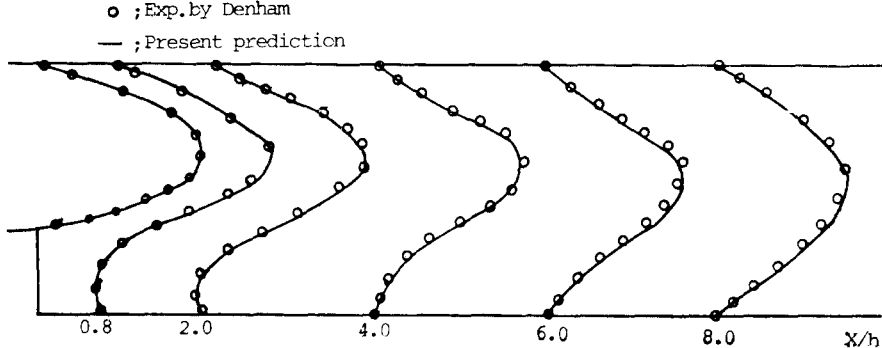


Fig. 4 Comparison of the predicted and measured velocity profiles for  $Re_h=73$

소한다. Fig. 5는 Reynolds 수를 125 까지 변화시킬 때 재부착점의 길이를 나타낸 것으로 Goldstein, R.J.<sup>(13)</sup>의 실험치와 비교하였다. 층류유동에서 재부착점의 길이는 Reynolds 수에 비례하여 증가한다. 그러므로 저 Reynolds 수인 경우에는 경계층방정식과 Flare 가정<sup>(9)</sup>의 도입이 가능한 것으로 생각된다. Fig. 6은 Reynolds 수가 73인 경우의 유량함수의 분포를 나타내고 있고 박리영역의 길이는 스텝길이의 4 배정도에 이르는 것을 알 수 있다. 재순환영역내에서 하류쪽으로 갈수록 일정한  $\Delta\phi$  사이의 간격이 증가하고 있는 것은 음의 속도와 질량유동의 크기가 점점 줄어들고 있는 것을 보여주고 있다. Fig. 7은 Reynolds 수 73인 경우의 와도의 분포를 나타내고 있다. sharp corner(A) 부근에서 높은 와도구배를 보여주고 있다. Fig. 8은 Reynolds

73인 경우에 Denham의 실험치와 유한해석법으로 얻은 이론치를 비교한 것으로 박리박의 영역에서 뿐만 아니라 박리영역내에서도 상당히 잘 일치하고 있음을 보여주고 있다. 스텝이 존재하는 채널에서는 박리영역이 역압력구배에 의해서 존재하게 되는데 역방향의 속도가 스텝으로부터 x 방향으로 어느정도까지 증가하다가 감소되어 재부착점(reattachment point)에 이르게 되며 박리영역의 두께는 x 방향으로 진행됨에 따라 작

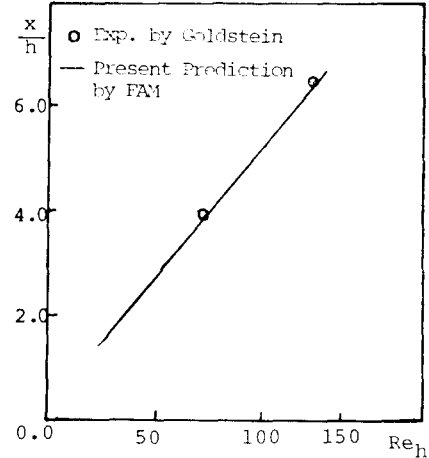


Fig. 5 Comparison of reattachment position at various Reynolds number

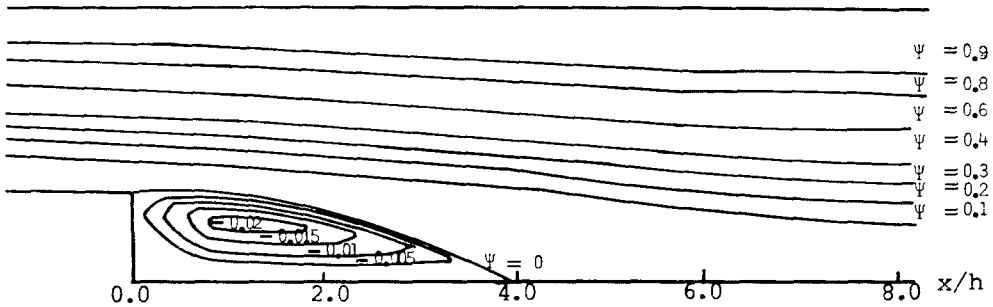


Fig. 6 Stream line for  $Re_h=73$

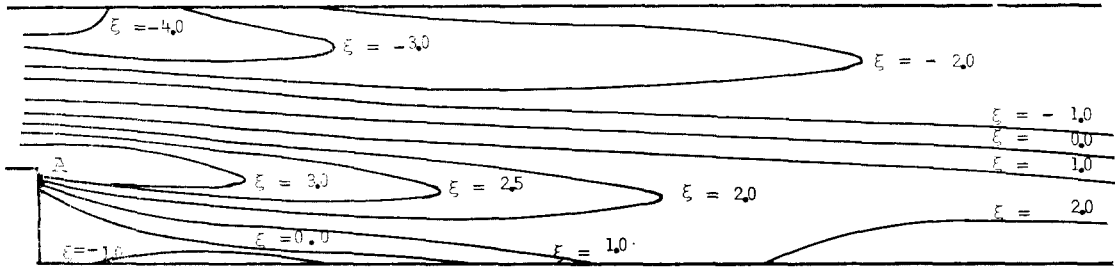


Fig. 7 Vorticity contour for  $Re_h=73$

수가 73 인 경우의 무차원 최대 속도분포를 나타내고 있다. 재부착점까지는 최대속도가 급격히 감소하나 재부착점 이후에는 재순환 유동의 영향이 없어지므로 그 감소폭이 완만해진다. 재순환 질량유동율은 주류와 재순환영역사이의 상호영향을 고려하면 대단히 중요한 특성의 하나이다. Fig. 9 는 하류  $x/x_r$  에서의 재순환 질량유동율의 변화를 나타내고 있고 최소 재순환질량유동율은  $-0.023$  정도인 것을 알 수 있다. Fig. 10 은 Reynolds 수를 125 까지 변화시킬 때의 재순환질량유동

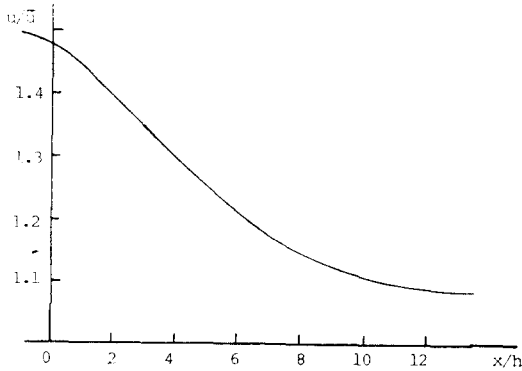


Fig. 8 Prediction of the maximum velocity for  $Re_h=73$

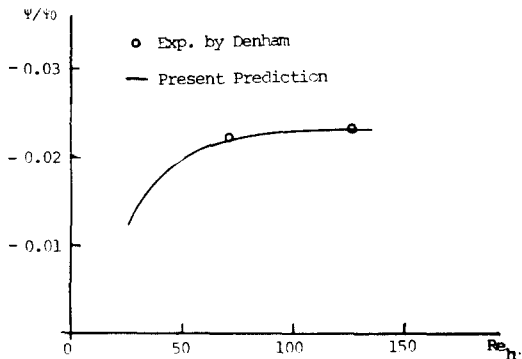


Fig. 9 Variation of recirculated mass flow rate with downstream distance

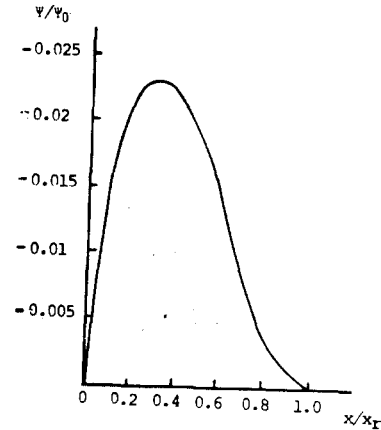


Fig. 10 Comparison of measured and predicted total mass flow rate within the recirculation region

량의 변화를 나타내고 있다.

본 연구에서는 일반적으로 유량함수에 대해서는 1 보다 큰 값을 와도에 대해서는 1 보다 작은 값을 사용하는 것이 바람직하다는 것을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

- (1) 유한해석법으로 얻은 속도장은 기존의 실험치와 잘 일치한다.
- (2) 저 Reynolds 수에서 재부착점길이는 Reynolds 수와 거의 선형적인 관계를 갖는다.
- (3) C.P.U. time 을 줄이기 위해서는 계수의 계산방법이나 유한해석요소를 불균일하게 분포시킬 때의 유한해석법의 확장에 대한 연구가 필요하다고 생각한다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Chen, C.J. and P. Li, The Finite Analytic Method for steady and Unsteady Heat Transfer Problems, A.S.M.E. paper 80-HT-86, 1980
- (2) Chen, C.J. and Obasih, K., The Finite Analytic

- Method-The Finite Analytic Numerical Solution of Heat Transfer and Flow Past a Square Channel Cavity. Vol. 2, The Finite Analytic Method Technical Report, Iowa Institute of Hydraulic Research, The Univ. of Iowa, 1981
- (3) Chen, C.J. and Chang, S.M., Finite Analytic Method-Finite Analytic Numerical Solutions for Steady Two Dimensional Heat Transfer and Flow in Bends. Vol. 4, The Finite Analytical Method Technical Report, Iowa Institute of Hydraulic Research, The Univ. of Iowa, 1981
- (4) R. Manohar and J.W. Stephenson. Optimal Finite Analytic Methods. Journal of Heat Transfer, Vol. 104, pp. 432~437, 1982
- (5) B.F. Armaly, F. Durst and J.D.F. Pereira., Experimental and Theoretical Investigation of Backward-facing flows. J. Fluid Mechs., Vol. 127, pp. 473~496, 1983
- (6) C.E. Thomas, K. Morgan and C. Taylor., A Finite Element Analysis of Flow over a Backward-facing Step. Computers and Fluids, Vol. 9, pp. 265~278, 1981
- (7) Donald M. Kuehn., Effects of Adverse Pressure Gradients on the Incompressible Reattaching Flow over a Reaward Facing Step. AIAA Journal, Vol. 18, No. 3, pp. 343~344, 1980
- (8) M.K. Denham and M.A. Patrick, Laminar Flow Over a Down-Stream-Facing Step in a Two Dimensional Flow Channel, Trans. INSTN DHEM-ENGRS, Vol. 52, pp. 361~367, 1974
- (9) Kwon, O.K. Prediction of the Incompressible Flow Over a Reaward Facing Step, Ph. D. Thesis, Iowa State Univ., 1981
- (10) Patrick J. Roache and Thomas J. Mueller, Numerical Solutions of Laminar Separated Flows, AIAA Journal, Vol. 8, No. 3, 1970
- (11) Anand Kumar and Kirst S. Yajnik, Internal Separated Flows at Large Reynolds Number, J. Fluid Mech., Vol. 97, Part 1, pp. 27~51, 1980
- (12) D.J. Atkins, S.J. Maskell and M.A. Patrick, Numerical Prediction of Separated Flows, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, pp. 129~144, 1980
- (13) Goldstein, R.J., Eriksen, V.L., Olson, R.M., and Eckert, E.R.G., Laminar Separation, Reattachment and Transition of the Flow Over a Downstream-Facing Step, J. Basic Engineering Vol. 92, pp. 732~741, 1970