

<論 文>

有孔板의 應力集中係數를 最少로하는 Hole 形狀의 最適化

林 莊 根* · 金 泰 完**

(1985年 1月 5日 接受)

Optimization of Hole Shape Minimizing Stress Concentration Factor in Plate with a Hole

Jang Keun Lim and Tae Wan Kim

Key Words: Optimization(최적화), Stress Concentration Factor(응력집중계수), Photo-Elastic Test(광탄성 실험)

Abstract

Infinite plate with a hole been under various inplane loadings, optimized hole shapes were found out for minimizing stress concentration factor occurred at hole boundary and the tangential stress distribution around that hole boundary was calculated, evaluated by photo-elastic test.

Mapping function of hole shape was assumed as a high polynomial function and after characteristics which each term of function affects to hole shapes and stress concentration factors were checked, efficient terms of mapping function were suggested according to various loading states.

In case of bi-axial loading, optimized hole shape becomes elliptic hole that short radius/longradius is same to loading factor and in case of shear and uniaxial loading, it is rounded square hole.

記 號 說 明

x, y : 荷重方向에 平行한 直角座標系

p : x 方向의 荷重

q : y 方向의 荷重

I : 目的函數

$i = \sqrt{-1}$

j, k, n : 添子

m_n : Mapping 函數의 係數($n=1, 3, 5, 7$)通稱

$z = x + iy$: 複素變數

$K = \sigma_s / p$: 應力集中係數

$s = p(1 + \xi) / 4$

$D = -p(1 - \xi) / 2$

$\xi = q/p$: 荷重係數

$\zeta = e^{\alpha + i\beta}$

ω : Mapping 函數

ρ, θ : 極座標系

$\sigma = e^{i\theta}$: 單位圓 境界上의 複素變數

Γ : 一般 hole 境界

γ : 單位圓의 hole 境界

α, β : Hole 境界에서의 曲線座標系

σ_n : 法線應力成分

σ_s : 接線應力成分

τ_{ss} : 剪斷應力成分

ϕ, ψ : 複素應力 函數

$\bar{\phi}', \bar{\psi}', \bar{\omega}'$: 共軛 複素函數

ϕ, ψ, ω : 1次微分函數

* 正會員, 漢陽大學校 工科學 機械工學科

** 漢陽大學校 大學院

1. 緒 論

平板構造物 解析의 重要問題의 하나는 hole 形狀에 의해 發生하는 應力集中現象으로 오래前부터 이를 緩化 하기위한 연구가 수행되어 왔다. 形狀을 變化시켜서 應力集中을 減少시킬 수 있다는 理論은 1958年 Heywood⁽¹⁾가 最初로 提案하였으며 그는 모서리가 둥근 4 角形狀이라는 推측을 發表한 바 있다. 1976年 Bjorkman⁽²⁾, wheeler⁽⁷⁾ 등이 調和 hole에 關한 理論을 수립하면서 이 問題의 理論의 背景이 이루어 졌다. 그러나 이들은 應力의 1次不變量을 利用하였기 때문에 荷重狀態가 兩軸引張인 境遇에 制限되었다. 1979年 Durelli와 Rajaiah⁽³⁾가 光彈性 實驗으로 그리고 Schnack⁽⁸⁾는 有限要素法으로 有限板에서 應力集中係數가 最少가 되는 hole 形狀을 發表하였으나 荷重을 加하는 條件과 幾何學的인 形狀에 따라서 많은 試行着誤를 거쳐야 하는 어려움이 있었다. 1981년에 發表된 Dhir⁽⁴⁾의 最適形狀에 關한 理論은 앞서 發表된 論文들의 問題點을 補完, 가장 一般의인 理論을 수립하였다. 本論文은 Dhir⁽⁴⁾의 理論에 따라서 Mapping 函數로 高次多項式을 使用하여 여러가지 荷重狀態에 따른 最適形狀을 研究하고 Mapping 函數에 포함되어 있는 係數가 應力集中 및 形狀變化에 미치는 影響을 檢討하며 光彈性 實驗을 通하여 理論의 타당성을 立證하고자 하였다.

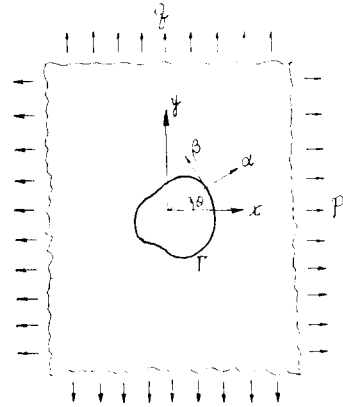


Fig. 1 Coordinate systems of analytical model

2. 理論解析

2.1. Muskhelishvili 解法

Fig. 1과 같이 x 方向 荷重 p, y 方向 荷重 q를 받는 有孔 無限板에서 α, β를 hole 境界에서의 法線 및 接線 方向의 單位벡터라고 할 때 z 平面은 無平面으로 다음 mapping 函數를 導入하여 hole 境界(Γ)를 圓(γ)으로 變換시킬 수 있다.

$$z = \omega(\zeta) \tag{1}$$

$$z = x + iy, \quad \zeta = \rho e^{i\theta} = e^{\tau - i\beta}$$

이와같이 變換된 領域에서 應力成分은 複素函數로 다음과 같이 表示된다^(5,6).

$$\sigma_a + \sigma_b = 2 \left| \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\phi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} \right| \tag{2}$$

$$\sigma_b - \sigma_a + 2i\tau_{a\beta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \left[\omega(\zeta)\Phi'(\zeta) + \phi'(\zeta) \right] \tag{3}$$

但, $\Phi(\zeta) = \phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$, $\rho = |\zeta|$ 이다.

그리고 hole 境界의 自由境界條件은 $\sigma = e^{i\theta}(\rho = 1, \alpha = 0)$ 일때

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)\overline{\phi'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} + \overline{\phi'(\sigma)} = 0 \tag{4}$$

가 된다⁽⁹⁾. 이제 mapping 函數 ω를 m_n 이 實數常數일 때

$$\omega(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1,3,5} m_n \zeta^{-n} \tag{5}$$

로 假定하고 $\phi(\zeta), \phi'(\zeta)$ 는 다음과 같이 定한다⁽⁹⁾.

$$\phi(\zeta) = S\zeta + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \zeta^{-j} \tag{6}$$

$$\phi'(\zeta) = D\zeta + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \tag{7}$$

但, 式 (6)과 (7)에서 $S = p(1 - \xi)/4$, $D = -p(1 - \xi)/2$, $\xi = q/p$ 인 常數이다. 計算의 便利上式 (5)의 n의 最大值를 7로 設定하고 式 (6), (7)과 함께 式 (4)에 代入하고 γ 境界를 따라서 Cauchy 積分을 수행하면 다음과 같이 未定係數를 決定할 수 있다.

$$a_1 = ((15 m_1 m_7^3 + (30 m_5 + 9 m_1 m_3 - 5 m_1) m_7^2 - ((-3 m_1^2 - 10) m_5 - 6 m_1 m_3 - m_1^3 + 3 m_1) m_7 - 3 m_1 m_5^2 + (-6 m_3 - m_1^2) m_5 - m_1 m_3 - m_1) S + 3 D m_7 - D) / ((15 m_7^3 + (9 m_3 - 5) m_7^2 + (-3 m_1 m_5 - m_1^2 - 3) m_7 - 3 m_5^2 - m_1 m_5 - m_3 + 1)$$

$$a_3 = ((15 m_3 m_7^3 + (-10 m_2 m_5 + 9 m_3^2 + 5 m_3) m_7^2 + (-10 m_5^2 - 3 m_1 m_3 m_5 + 6 m_3^2 + (m_1^2 - 3) m_3 - 2 m_1^2) m_7 - 3 m_3 m_5^2 + (m_1 m_3 - 2 m_1) m_5 + m_3^2 - m_3) S - D m_1 m_7 - D m_3) / ((15 m_7^3 + (9 m_3 - 5) m_7^2 + (-3 m_1 m_5 - m_1^2 - 3) m_7 - 3 m_5^2 - m_1 m_5 - m_3 + 1)$$

$$a_5 = ((15 m_5 m_7^3 + ((-9 m_3 - 5) m_5 - 6 m_1 m_3 + 6 m_1) m_7^2 + (3 m_1 m_5^2 + (-6 m_3 + m_1^2 + 3) m_5 - 2 m_1) m_7 + 3 m_5^3 +$$

$$\begin{aligned}
 & m_1 m_5^2 + (m_3 - 1)m_5 S + 3 D m_7^2 - D m_7 / (15 m_7^3 + \\
 & (9 m_3 - 5) m_7^2 + (-3 m_1 m_5 - m_1^2 - 3) m_7 - 3 m_5^2 - m_1 \\
 & m_5 - m_3 - 1) \\
 & a_7 = -m_7 S \\
 & a_2 = a_4 = a_6 = 0 \quad a_n = 0 (n \geq 8) \quad (8) \\
 & b_n = 0 (n \geq 0) \quad (9)
 \end{aligned}$$

式 (8), (9)를 式 (6), (7)에 代入하고 式 (2)에 依하여 hole 境界에서의 接線應力 σ_β 를 求할 수 있다. $\sigma_a = 0$ 이므로 σ_β 는

$$\begin{aligned}
 \sigma_\beta &= 4 R_e [\phi'(\zeta) / \omega'(\zeta)]_{|\zeta|=1} \\
 &= 4 (p_1 \cos 8 \beta + p_2 \cos 6 \beta + p_3 \cos 4 \beta + p_4 \cos 2 \beta \\
 &+ p_5) / (Q_1 \cos 8 \beta + Q_2 \cos 6 \beta + Q_3 \cos 4 \beta + Q_4 \cos \\
 &2 \beta + Q_5) \quad (10)
 \end{aligned}$$

로 된다. 但,

$$\begin{aligned}
 p_1 &= -7(sm_7 + a_7) \\
 p_2 &= 7(a_1 m_7 + m_1 a_7) - 5(sm_5 + a_5) \\
 p_3 &= 21(a_3 m_7 + m_3 a_7) + 5(a_5 m_1 + m_5 a_1) - 3(sm_3 + a_3) \\
 p_4 &= 35(a_5 m_7 + m_5 a_7) + 15(a_5 m_3 + m_5 a_3) + 3(m_3 a_1 \\
 &+ m_1 a_3) - (sm_1 + a_1) \\
 p_5 &= s + m_1 a_1 + 9 m_3 a_3 + 25 m_5 a_5 + 49 m_7 a_7 \quad (11) \\
 Q_1 &= -14 m_7 \\
 Q_2 &= 14 m_1 m_7 - 10 m_5 \\
 Q_3 &= -6 m_3 + 10 m_1 m_3 + 42 m_5 m_7 \\
 Q_4 &= -2 m_1 + 6 m_1 m_3 + 30 m_5 m_5 + 70 m_5 m_7 \\
 Q_5 &= 1 + m_1^2 + 9 m_3^2 + 25 m_5^2 + 49 m_7^2 \quad (12)
 \end{aligned}$$

2.2. 最適過程

式 (10)에서 求한 σ_β 는 hole 境界에서 唯一하게 發生하는 接線應力이다. 따라서 hole 境界에서의 變形率 에너지 形態는

$$I = \int \sigma_\beta^2 d\beta \quad (13)$$

로 表示할 수 있으며 이 에너지를 最少로 하는 m_1, m_3, m_5, m_7 의 값을 求할 수 있다며 그때의 hole 形狀은 最適形狀이 되고 同時에 應力集中係數도 最少가 된다. 따라서 式 (13)을 目的函數로 하여 Hook 과 Joeves의 非線形 最適탐사법⁽¹⁰⁾ (nonlinear optimum search method)으로 m_n 의 係數값을 求하였다. 그러나 係數中 m_1 값은 理論적으로 特殊한 값을 가지는 境遇가 있다. 즉 調和(harmonic)hole의 경우 $\phi(\zeta)$ 와 $\psi(\zeta)$ 를 다음과 같이 假定하고⁽²⁾

$$\begin{aligned}
 \phi(\zeta) &= s \omega(\zeta) \\
 \psi(\zeta) &= D \omega(\zeta) \omega \quad (14) \\
 (\zeta) &= \zeta + \frac{m_1}{\zeta} + \frac{m_2}{\zeta^2} + \frac{m_3}{\zeta^3} + (\dots)
 \end{aligned}$$

이들을 Muskhelishvili의 境界條件式 (4)에 代入하여 Cauchy 積分을 하면

$$\begin{aligned}
 2s \int_r (\sigma - \frac{m_1}{\sigma} + \frac{m_2}{\sigma^2} + \dots) / (\sigma - \zeta) d\sigma + D \\
 \int_r (\frac{1}{\sigma} - m_1 \sigma + m_2 \sigma^2 + \dots) / (\sigma - \zeta) d\sigma = 0 \quad (15)
 \end{aligned}$$

가 되어 다음 結果를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 m_1 &= -D/2s = (1 - \xi) / (1 + \xi) \\
 m_2 &= m_3 = \dots = 0 \quad (16)
 \end{aligned}$$

따라서 m_1 은 荷重狀態에 따라 다음과 같은 一定한 값을 갖는다.

- (i) Isotropic Loading ($\xi=1$) : $m_1=0$
- (ii) Biaxial Loading ($\xi=0.5$) : $m_1=1/3$
- (iii) Uniaxial loading ($\xi=0$) : $m_1=1$ (17)
- (iv) Shear loading ($\xi=-1$) : $m_1=\infty$

3. 計算結果 및 檢討

3.1. 最適形狀과 應力集中係數

Hole 形狀의 Mapping 函數를 一般적으로 假定하여 hole의 境界에서 應力集中係數를 最少로 하는 係數 m_n 을 決定하려고 하였으나 荷重狀態에 따라 式 (17)로 인한 特性때문에 收斂狀態가 달라져서 부득이 몇가지 경우로 나누어 計算하였다.

Table 1은 네가지 荷重狀態에서 m_n 係數의 값을 表示하여 ()內의 숫자는 Dhir⁽⁴⁾의 結果를 引用한 값으로 本 論文中에서 使用한 Hook & Jeeves의 비선형탐사법⁽¹⁰⁾의 比較的 正確한 收斂性을 보이고 있다. 이들 m_n 의 係數값을 利用하여 應力集中係數 K 를 求하면 Table 2와 같다.

⊙ 等方性 荷重($\xi=1$) ; Table 1에서 알 수 있듯이 모든 m_n 의 係數값이 0에 收斂하므로 最適形狀은 圓孔($z=\zeta$)이 되고 應力集中係數는 2.0이 된다.

⊙ 兩軸荷重($\xi=0.5$) ; m_1 의 값이 1/3에 收斂하고 다른 係數들은 0에 接近하므로 最適形狀은 長徑과 短徑의 比가 0.5인 타원이 된다. 應力集中係數는 1.5로 全體 hole 境界에서 一定한 값을 가지며 이 事實은 Bjorkman과 Richards⁽²⁾의 調和 hole의 경우와 一致한다. Dhir⁽⁴⁾의 2.375와 큰 차이가 있는 理由는 四角形化 하려는 그의 노력으로 Mapping 函數를 $\omega = \zeta + m_3/\zeta^3$ ($|m_3| < \frac{1}{3}$)로 假定하여 $m_3 \approx -0.01$ 을 얻고 이에 따라서 計算한 應力集中係數이기 때문이다.

⊙ 剪斷荷重($\xi=-1$) ; 調和 hole로 생각할 때 $m_1=\infty$ 인 값을 가지므로 本 論文中에서는 4가지 境遇로 計算하였다. m_3 만을 假定하였을 때와 (m_3, m_5)를 假定하였

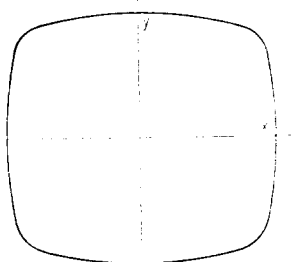
Table 1 Optimized results⁽⁴⁾

Cases	$\xi=0$				$\xi=-1$				$\xi=0.5$		$\xi=1$	
	m_3	$m_3 m_5$	$m_3 m_7$	$m_3 m_5 m_7$	m_3	$m_3 m_5$	$m_3 m_7$	$m_3 m_5 m_7$	m_3	$m_1 m_3$ $m_5 m_7$	$m_1 m_3$ $m_5 m_7$	
m_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.333	3.25×10^{-4}	
m_3	-4.93×10^{-2} (-0.05)*	7.75×10^{-2}	-4.90×10^{-2}	-8.99×10^{-2}	-0.094 (-0.09)*	-0.094	-0.097	-0.0956×10^{-2}	-0.01 (-0.01)*	1.00×10^{-4}	1.234×10^{-4}	
m_5	0	-2.996×10^{-2}	0	-4.445×10^{-2}	0	-1.895×10^{-6}	0	1.450×10^{-4}	0	-5.001×10^{-5}	5.002×10^{-5}	
m_7	0	0	3.91×10^{-5}	-1.401×10^{-2}	0	0	0.014	1.455×10^{-2}	0	7.812×10^{-6}	-2.500×10^{-5}	

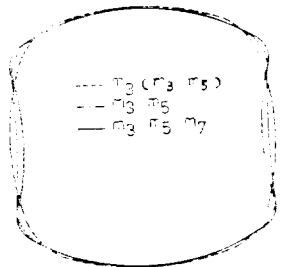
Table 2 Maximum stress concentration factors (K)⁽⁴⁾

Terms	m_3	$m_3 m_5$	$m_3 m_7$	$m_3 m_5 m_7$	$m_1 m_3$ $m_5 m_7$
Cases					
$\xi=0$	2.471 (2.47)*	2.705	2.463	2.472	—
$\xi=-1$	3.073 (3.07)*	3.072	3.284	3.278	—
$\xi=1$	2.000	—	—	—	2.000
$\xi=0.5$	-2.374 (2.375)*	—	—	—	1.500

을 때는 Table 2, Fig. 2에서와 같이 hole의 形狀은 모서리가 둥근 4四角形이 되고 應力集中係數는 3.07로



(a) $\xi=-1$



(b) $\xi=0$

Fig. 2 Optimized hole shapes

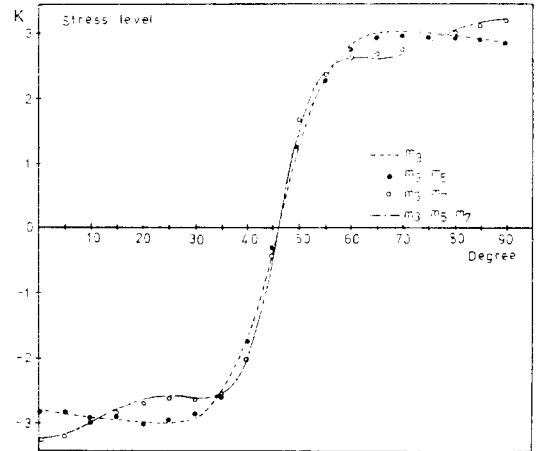


Fig. 3 Tangential stress distribution around optimized holes under shear loading ($\xi=-1$)

Dhir⁽⁴⁾의 結果와 거의 一致 하였으나 (m_3, m_7)과 (m_3, m_5, m_7)을 假定하였을 때는 Fig. 2(a)의 形狀과 큰 차이는 없으나 모서리의 變曲半徑이 다소 작아져서 Table 2에서와 같이 應力集中係數는 3.284, 3.278로 6~7% 程度增加하게 된다.

Fig. 3은 이들 4가지 境遇에 대한 hole 境界에서의 接線應力(σ_θ)의 分布를 보이며 Table 1에서 알 수 있듯이 m_5 는 0에 接近하여 이의 影響을 無視할 수 있고 m_7 의 차수가 m_3 와 같아지므로 m_7 을 Mapping 函數에 고려하고 아니함에 따라서 應力分布가 2가지로 달라짐을 알 수 있다.

◎ 單軸荷重($\xi=0$) ; 調和 hole로 생각하면 $m_1=1$ 이 되지만 이 경우에는 調和 hole의 理論을 適用할 수 없다^(2,7). 實際로 最適化 하는 過程에서 m_1 이 1에 接近할 때 심한 Disturbance를 보이기 때문에 本 論文

에서는 $m_1=0$ 로 생각하고 Table 1과 같이 4가지 境遇에 대하여 最適形狀을 찾았다. Table 2에서 알 수 있듯이 이들 4가지 境遇中에서 (m_3, m_5)를 假定하였을 때를 除外하고 비슷한 應力集中係數가 얻어지나 (m_3, m_7)일때 最少 2.463이 約 70° 에서 얻어진다. 特히 m_5 만을 假定하였을 때에는 Dhir⁽⁴⁾의 結果와 거의 一致한다. 그러나 最適形狀은 Fig. 2(b)와 같이 各各 달라지며 (m_3, m_5, m_7)을 假定하였을 때에 形狀이 안으로 볼록한 4角形이 됨은 特異한 事實이다. Fig. 4는 이들 4가지 境遇에 대한 hole 境界에서의 接線應力分布를 表示한 것이다. 다른 境遇에서 보다(m_3, m_7)을 假定한 경우가 應力集中係數가 가장 작으며 應力分布로 比較的 안단함을 알 수 있다.

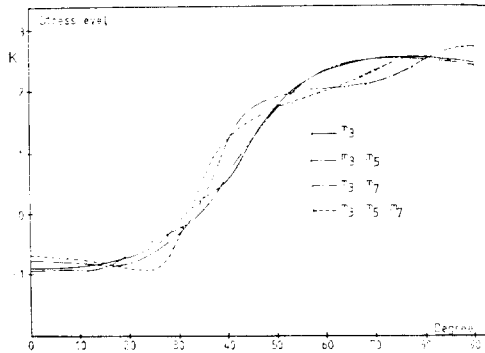


Fig. 4 Tangential stress distribution around optimized holes under uni-axial loading($\xi=0$)

3.2. 光彈性 實驗

單軸引張($\xi=0$)인 경우 Fig. 2(b)에서 (m_3, m_5, m_7)을 假定하였을 때 最適形狀은 다른 境遇와는 달리 안쪽으로 볼록한 4角形이 되어 이 때의 應力分布를 確認하기 위하여 光彈性 實驗을 하였다. 試片의 形狀과 크기를 Fig. 5와 같이 하여 板의 寸수가 hole 크기의

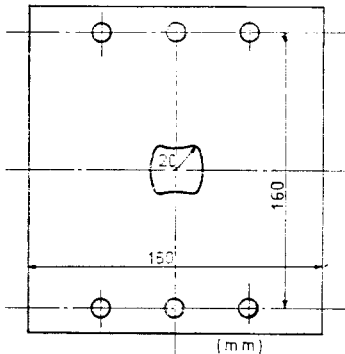


Fig. 5 Photoelastic test specimen

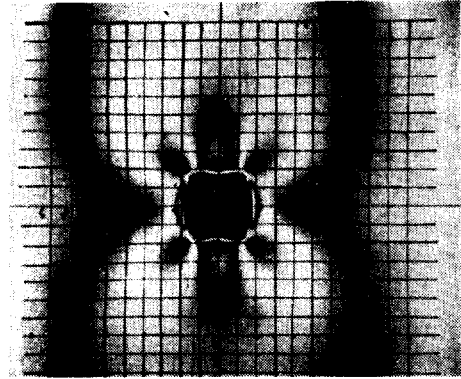


Fig. 6 Isochromatic lines

5倍以上이 되도록 하여 荷重이 作用하는 境界面이 hole 周圍의 應力分布에 影響을 주지 못하도록 하였으며 荷重도 160 kg으로 制限하였다.

Fig. 6의 무늬치수를 읽어 hole 境界에서의 主應力 σ_θ 를 얻었으며 이들을 Fig. 7에 表示하였다. Fig. 6에서 高應力部가 되는 $70^\circ \sim 90^\circ$ 및 低應力部인 $0^\circ \sim 20^\circ$ 區間에서 一定한 무늬치수를 보이며 이런 現象은 Fig. 7에서 알 수 있듯이 거의 均一한 應力分布를 가지게 됨을 알 수 있다. Fig. 7은 이 實驗結果와 (m_3, m_5, m_7)을 假定한 計算結果를 比較하고 참고로 Dhir⁽⁴⁾의 結果와 圓孔인 경우도 함께 比較하였다.

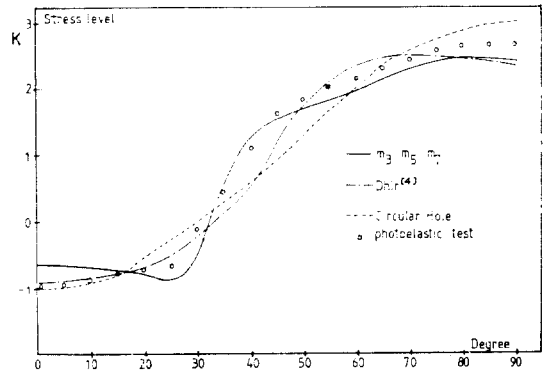


Fig. 7 Comparison of hole boundary stresses under uniaxial loading ($\xi=0$)

4. 結 論

hole을 갖는 無限平板이 여러가지 荷重을 받을 때 hole 境界에 發生하는 應力集中係數를 最少로 하는 hole 形狀을 研究한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 兩軸荷重($\xi=0.5, 1$)인 경우에 hole의 最適形狀과 應力集中係數는 調和 hole의 理論과 一致하며 長徑

과 短徑의 比가 荷重係數(ξ)와 一致하는 타원이 된다.

(2) 剪斷荷重($\xi=-1$)인 경우에 最適 hole 形狀은 모서리가 둥근 4角形이 되고 이때의 應力集中係數는 3.07 移度가 된다. 이 結果는 m_3 , 또는 (m_3, m_5) 를 假定했을 때 얻을 수 있다.

(3) 單軸引張($\xi=0$)인 경우에 最適 hole 形狀은 (m_3, m_7) 을 假定했을 때 얻어지는 모서리가 둥근 4角形이 되고 이 때의 應力集中係數는 2.463 程度이다.

參 考 文 獻

- (1) R.B. Heywood, Designing by Photoelasticity, Chapman and Hall, 1958
- (2) G.S. Bjorkman, and R. Richards, "Harmonic Holes-An Inverse Problem in Elasticity", ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 43, pp.414~418, 1976
- (3) A.J. Durelli, and K. Rajaiah, "Optimum Hole Shapes in Finite Plates under Uniaxial Load", ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp.691~695, 1979
- (4) S.K. Dhir, "Optimization in a Class of Hole Shapes in Plate Structures", ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 48, pp.905~908, 1981
- (5) K. Rajaiah, and N.K. Naik, "Optimum Quasi-Rectangular Holes in Infinite Orthotropic Plates under Inplane Loading", ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp.891~893, 1983
- (6) S.K. Dhir, "A Hybrid Problem in Plane Elasticity", ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp.714~716, 1979
- (7) L. Wheeler, "On the Role of Constant Stress Surfaces in the Problem of Minimizing Elastic Stress Concentration", Int. J. of Solids and Structures, Vol. 12, pp.779~789, 1976
- (8) E. Schnack, "An Optimization Procedure for Stress Concentrations by the Finite Element Technique", Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, pp.115~124, 1979
- (9) N.I. Muskhelishvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, 3rd ed., P. Noordhoff, Ltd., 1953
- (10) J.N. Siddall, Analytical Decision Making in Engineering Design, Prentice-Hall, 1972