裁定價格決定理論에 관한 研究(Ⅰ)*

具　　孟　　會**

目　次

Ⅰ. 序　論
Ⅱ. 資本資産의 價格決定模型의 要約
　1. 마코위츠의 포트폴리오選擇 模型
　2. 2個要因 제로베타 模型
Ⅲ. 資本資産의 價格決定模型에 대한 批判
Ⅳ. 裁定價格決定理論
　1. 理論展開
　2. 要因分析
　　1) 要因로딩 매트릭스의 推定
　　2) 要因點數의 推定
　3. 資料의 選擇과 裁定價格決定模型의 推定
　　1) 資料의 選擇
　　2) 裁定價格決定模型의 推定
Ⅴ. 裁定價格決定模型에 대한 經驗的 硏究
Ⅵ. 結　論

Ⅰ. 序　論

不確實한 投資의 세계에서 미래의 상황을 어떻게 예측하고, 또 이 예측을 기초로 하여 어떻게 投資決定을 해나가야 할 것인가 하는 점은 바로 投資理論의 초점이 된다. 과거 수십년간 술한 연구를 거듭해 온 資本市場의 理論도 資本市場의 制度的인 메커니즘을 밝힘과 동시에 投資理論과 함께 投資의 成果가 미래에 어떻게 작용할 것인가를 밝히고자 하였다. 이 양자의 學問的 領域은 많은 부문에서 서로 중첩되고 있을 뿐만 아니라 또 보완관계에 있다고 하겠다. 다시 말해서 불확실성하에서 資本資産 價格決定의 一般的인 均衡模型에 관한 연구는 現代資本市場論이나 現代投資論에서 공통적으로 중추적인 위치를 차지하고 있다.

불확실한 投資狀況에서 資本資産(capital assets)의 價格을 예측코자 하는 연구는 일찌기 1930년 피셔[Fisher, (1930)]의 利子率理論에 까지 그 始原을 거슬러 올라갈 수 있다. 그 이후 資本市場理論의 分析的 연구는 크게 두가지 學問的 主流로 분류되어 왔다. 하나는 狀態-選好의 模型(state-preference models)이고 다른 하나는 平均-分散의 模型(mean-variance models)이다.

狀態-選好의 模型은 애로우[Arrow, (1953)]와 데브류[Debreu, (1959)]의 연구에서 비롯되어 후에 허쉬라이퍼[Hirshleifer, (1965), (1966)]에 의하여 확장된 것으로, 이론적으로는 平均-分散의 模型 역시 이 狀態-選好模型의 한 특정한 경우라고 할 수 있다. 이 狀態-選好模型은 資本市場에서 투자자가 선택하는 대상인 資本資産을 상태에 따라 달라지는 狀態條件附請

* 本 論文은 1984年度 釜山大學校 學術硏究 助成費에 의하여 硏究된 것임.
** 商科大學 經營學科 副敎授

求權(state contingent claim)으로 가정하고 있다. 그리고 純粹證券(pure securities)[1]의 존재를 가정한 完全資本市場과 完成資本市場(perfect and complete capital markets)[2] 下에서는 證券의 狀態條件附均衡價格이 ① 개인의 消費에 대한 時間選好性(time preference)과 기업의 투자기회, ② 상태에 따라 달리 나타나는 現金흐름의 確率分布, ③ 개별투자자의 危險選好度(risk preference)에 의하여 결정된다는 것이다[Copeland and Weston(1983)]. 그러나 이 狀態-選好의 規範的 模型은 불행히도 아직까지 경험적 연구가 충분히 뒷받침해 주지 못하고 있는 실정이다.

한편, 平均-分散模型은 개별증권 또는 포트폴리오 收益率의 平均과 分散의 次元에서 투자자의 危險選好度에 따라 最大效用을 달성시켜 주는 최적포트폴리오를 선택케 하는 모형이다. 이 平均-分散의 模型은 마코위츠[Markowitz(1952), (1959)]의 포트폴리오 選擇理論에서 시작되어 ① 토빈[Tobin, (1958)]의 연구 즉 危險에 대한 투자자의 行動을 流動性選好理論에 적용시킨 것과, ② 트레이노[Treyno, (1961)], 샤프[Sharp, (1964)], 린트너[Lintner, (1965a, b)], 모신[Mossin, (1966)], 파마[Fama(1968)] 등의 모형으로 구분할 수 있다. 이들 모형은 資本資産의 價格決定模型(capital asset pricing model, CAPM)으로 마코위츠의 規範的 模型을 수정하여 균형상태하에서 자산의 平均收益率을 市場포트폴리오 收益率과의 共分散으로 설명하고 있다. 그러나 이 模型은 事前的(ex ante) 논리성에 비하여 事後的 검정결과에서 여러가지 한계점을 내포하고 있어 理論의 보완이 항상 요청되어 있다.

이상과 같이 資本資産의 價格決定을 설명하는 狀態—選好의 모형과 平均—分散의 모형은 여러 학자의 경험적인 연구를 통하여 한계점이 지적되어 왔다. 이러한 限界點을 보완한 理論이 바로 로스[Ross(1976), (1977)]가 처음으로 제시한 裁定價格決定理論(arbitrage pricing theory, APT)이다. 다시 말해서, APT는 危險과 收益率의 관계에서 單一指數로서 危險資産의 收益率을 설명코자한 단순모형인 CAPM에서 발생하는 여러 한계점을 보완한 것으로, 위험자산의 收益率을 여러 要因(multiple factors)과의 線型函數로 설명하고 있다. 이 APT는 로쓰의 理論提起의 논문에 이어 롤과 로쓰[Roll and Ross, (1980)], 첸[Chen, (1981)], 레인가눔[Reinganum(1981b)]등의 경험적 연구를 비롯하여 현재 이 APT의 妥當性에 대한 연구가 많은 학자들에 의하여 활발하게 진행되고 있다.

이 論文에서는 APT를 가능한한 쉽게 전개하여 전반적인 理論의 이해에 도움이 되도록 하고자 한다. 그러므로 CAPM의 假定과 限界를 먼저 제시하고, APT의 이론전개와 아울러 경험적 방법에서 이용되는 要因分析(factor analysis)의 기법을 설명한 다음, 여러 학자들의 경험적

1) 純粹證券(pure or primitive securities)은 발생 가능한 여러 狀態중에서 주어진 하나의 狀態가 발생할 경우에는 期末에 1원의 현금흐름이 있고, 다른 상태가 발생할 때에는 전연 現金흐름이 없는 證券을 의미한다.

2) 完成資本市場(complete capital market)은 미래에 발생가능한 狀態의 數와 서로 獨立關係에 있는 固有한 거래증권의 數가 완전히 일치하는 資本市場을 말한다. 完成市場이 형성될 때에는 市場이 均衡狀態를 이루고 있다.

연구의 결과를 제시하고자 한다.

Ⅱ. 資本資産의 價格決定模型의 要約

앞에서 밝힌 것처럼 불확실성하에서 均衡資本市場에 관한 연구는 ① 狀態—選好模型(state-preference models)과, ② 平均—分散模型(mean-variance models)의 두 주류에 따라 오랫 동안 수행되어 왔다. 일반적으로 애로우[Arrow, (1953)]와 데브류[Debreu, (1959)]의 狀態—選好模型은 불확실성하에서 資産의 가치를 평가하는데에 있어 精致한 一般的 模型이라고 한다. 그리고 샤프[Sharp, (1964)], 린트너[Lintner, (1965, a, b)], 모신[Mossin, (1966)] 등의 平均分散基準에 따른 資本資産의 價格決定模型(capital asset pricing model, CAPM)은 위험과 수익률의 관계를 명확하게 제시해 주는 모형으로 인식되어, 오랜 기간동안 그 모형의 妥當性에 대한 檢定이 수행되어 왔다. 이제, 裁定價格決定理論(arbitrage pricing theory, APT)의 전개에 앞서 이 平均—分散의 CAPM에 관하여 간단히 요약키로 한다.

1. 마코위츠의 포트폴리오 選擇模型

불확실성하에서 자본자산의 均衡價格을 결정하는 CAPM은 마코위츠[Markowitz, (1950)]와 토빈(Tobin, (1958)]에 의하여 개발된 포트폴리오 選擇模型(portfolio selection model)에 기초를 두고 있다. 그러므로 여기에서는 마코위츠의 포토폴리오 選擇模型을 간단하게 요약코자 한다.

마코위츠 등은 規範的 포트폴리오 選擇模型을 도출하기 위하여 다음과 같은 假定을 설립하고 있다.

① 투자자는 收益率의 平均과 分散(또는 標準偏差)의 차원에서 상대적으로 높은 포트폴리오의 수익률 또는 상대적으로 낮은 포트폴리오의 위험을 선호한다. 다시 말해서 優越性原理(dominance principle) 또는 支配原理에 따라 투자자는 포트폴리오를 선택한다. 이 경우에 자산 또는 포트폴리오 收益率의 확률분포는 正規分布라는 가정을 한다.

② 투자자는 포트폴리오 選擇에 있어 수익률의 平均—分散基準에 따라 單一期間의 期待效用을 최대화하는 最適포트폴리오를 구성한다.

이 경우에 포트폴리오의 期待收益率과 分散은 다음과 같이 표현한다.

$$E(\tilde{R}_p)=\sum_{i=1}^{n}X_iE(\tilde{R}_i) \quad \cdots\cdots (1)$$

$$V(\tilde{R}_p)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}X_iX_jCov(\tilde{R}_i,\tilde{R}_j) \quad \cdots\cdots (2)$$

$E(\tilde{R}_p)$=포트폴리오의 기대수익률

$\tilde{R}_i$, $\tilde{R}_j$=i증권 또는 j증권 수익률의 확률변수

$V(\tilde{R}_p)$=포트폴리오 수익률의 분산

X_i, X_j=포트폴리오에서 i증권과 j증권이 차지하는 비중

$Cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$= i증권과 j증권 수익률의 공분산

그러므로, 개별증권 또는 포트폴리오의 機會集合에서 각각의 期待收益率, 分散, 共分散이 위의 산식에 따라 산출되면 優越性 原理에 따라 效率的 포트폴리오(efficient portfolio)를 결정할 수 있고, 이러한 일체의 효율적 포트폴리오를 연결한 線을 效率的 投資線(efficient frontier)이라고 한다. 마코위츠의 포트폴리오 選擇模型은 效率的 投資線上에 위치한 포트폴리오 중에서 투자자의 效用曲線에 적합한 最適포트폴리오를 선택하는 것이다.

2. 基本的 資本資產의 價格決定模型

샤프[Sharp, (1964)], 린트너[Lintner, (1965, a, b)], 모신[Mossin, (1960)] 등은 이상과 같은 마코위츠—토빈의 포트폴리오 選擇模型을 기초로 하여 平均—分散의 均衡 CAPM을 도출하였다. 이 모형의 의미는 資本資產의 危險--收益率構造에 관하여 적합한 설명을 제시코자 하는 데에 있다.

사프—린트너—모신(앞으로 S-L-M 으로 표현함)은 CAPM을 도출하기 위하여 마코위츠—토빈의 假定에 부가하여 다음과 같은 追加的인 假定을 설립해 놓고 있다.[3)]

① 모든 투자자는 外生的으로 주어진 無危險收益率로 무한히 借入 또는 貸出할 수 있고, 空賣(short sales)에 대한 제한은 없는 것으로 한다.

② 모든 투자자는 同質的 豫測(homogeneous expectation)을 한다. 다시 말해서 자산수익률의 平均, 分散, 共分散에 대한 모든 투자자의 예측은 일치한다.

③ 完全資本市場(perfect capital market)이 존재한다. 그러므로 去來費用과 稅金은 없으며, 모든 資產은 완전히 分割될 수 있고, 流動性도 완전하다.

④ 투자자는 價格順應者(price-taker)이고, 투자기회가 동일하므로 資本市場은 경쟁적이다.

이러한 가정위에서 S-L-M은 다음과 같은 證券市場線(capital market line)의 모형인 CAPM을 도출하였다. 즉 均衡狀態下에서 j危險資產의 기대수익률모형을

$$E(\tilde{R}_j) = R_f + \lambda\ Cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_m) \qquad (3)$$

$\lambda = \dfrac{E(\tilde{R}_m) - R_f}{Var(\tilde{R}_m)}$ =한단위의 위험에 대한 시장위험프리미엄

$\tilde{R}_j$=j자산의 확률적 수익률

R_f=무위험수익률

$Cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_m)$=$j$자산 수익률과 시장포트폴리오 수익률간의 공분산

으로 표현하고 있다. 여기에서 $\beta_j = Cov(\tilde{R}_j, \tilde{R}_m)\, Var(\tilde{R}_m)$이라고 정의하면, β_j는 市場포트폴리오의 總危險에 대한 j자산의 위험을 측정하는 것이 된다. 따라서 (3)식은 다시

3) 이들 假定의 중요성에 대해서로 루빈스타인[Rubistein, (1973)]이 잘 밝혀 주고 있다.

$$E(\tilde{R}_j)=R_f+\beta_j[E(\tilde{R}_m)-R_f] \quad \cdots\cdots (4)$$

이 된다. 그러므로 이 모형은 j위험자산 또는 j주식 수익률과 이 주식의 體系的 危險간에 線型關係가 있음을 나타낸다. 그리고 이 均衡 CAPM이 내포하고 있는 또 하나의 의미는, 각 투자자가 자기의 危險選好度에 따라 富를 無危險資産과 市場포트폴리오로 구분한다는 것이다.

3. 제로베타 포트폴리오 模型

앞에서 CAPM의 도출을 위하여 無危險收益率로 자유로이 借入 또는 貸出할 수 있다고 가정하였다. 그러나 이러한 外生的인 無危險收益率의 가정을 제거한다면, 즉 무위험자산이 존재하지 않는다면 CAPM은 어떻게 변형될 것인가.

블랙[Black, (1972)]은 진정한 市場포트폴리오(true market portfolio)의 收益率과 無相關(uncorrelated)을 갖는 포트폴리오를 가정하였다. 이 포트폴리오의 收益率은 市場危險의 변동에도 항상 일정한 收益率을 갖는 것으로, 市場포트폴리오의 수익률과 0의 共分散을 가지고 있다. 그러므로 이 포트폴리오의 β값은 항상 0이 되며 따라서 이 포트폴리오를 제로베타 포트폴리오(zero-beta portfolio)라고 하자. 이 제로베타 포트폴리오의 期待收益率을 $E(R_z)$라고 한다면 동일한 $E(R_z)$을 갖는 제로베타 포트폴리오는 機會集合(opportunity sets) 속에 무수히 존재할 수 있고, 이 중에서 效率的 投資線上에 위치한 포트폴리오는 동일한 $E(R_z)$을 갖는 다른 제로베타 포트폴리오에 비하여 最小危險을 갖는다고 하겠다. 이 포트폴리오를 最小分散 제로베타 포트폴리오(minimum variance zero-beta portfolio)라고 한다.

이제 투자자가 最小分散 제로베타 포트폴리오와 市場포트폴리오로서 자기의 포트폴리오를 구성한다면, 그 收益率의 推定模型은 다음과 같이 資本市場線(capital market line, CML)의 모형과 동일한 형태를 갖는다.

$$\text{Zero-beta}: \; E(R_p)=E(R_z)+\frac{E(R_m)-E(R_z)}{\sigma_m}\sigma_p$$

$$\text{CML}: \qquad E(R_p)=R_f+\frac{E(R_m)-R_f}{\sigma_m}\sigma_p$$

σ_m=시장포트폴리오 수익률의 표준편차

σ_p=선택한 포트폴리오 수익률의 표준편차

이 두 모형에서 나타난 유일한 차이는 CML의 R_f가 $E(R_z)$로 대체되었다는 점이다. 그리고 CML으로 부터 CAPM을 도출하는 과정과 동일하게 제로베타 포트폴리오를 포함한 포트폴리오의 資本市場模型으로 부터 i증권의 期待收益率을 추정하는 모형을 도출하면 다음과 같으며, 이를 2個要因 제로베타 CAPM(two-factor zero-beta CAPM variant) 또는 2個要因模型(two-factor model)이라고 한다.

$$E(R_i)=E(R_z)+[E(R_m)-E(R_z)]\beta_i \cdots\cdots (5)$$

이 블랙의 2個要因模型에서는 外生的 R_f는 존재하지 않고 空賣에 대한 制限은 없으나 (no short sale constraints)[4], β는 여전히 體系的危險을 포함하고 있으며, 전통적인 CAPM과 같이 線型關係는 유지되고 있다.

Ⅲ. 資本資産의 價格決定模型에 대한 批判

規範的 模型인 S-L-M의 CAPM과 블랙의 2個要因 제로베타 CAPM의 理論을 뒷받침하고자 하는 經驗的 檢定은 여러 학자에 의하여 오랫동안 계속되어 왔다.

블룸과 프렌드[Blume and Frient, (1973)], 블랙, 젠슨과 숄즈[Black, Jensen and Scholes (1972)], 블룸[Blume(1975)], 모딜리아니아와 포그[Modigliani and Pogue(1974)] 등은 CAPM의 β의 安定性과 R_f에 대하여 다음과 같은 檢定結果를 제시하였다.

첫째 多數種目(10개 이상의 種目)의 주식으로 구성된 포트폴리오의 베타계수는 安定的이므로 미래의 體系的 危險의 측정치로 사용할 수 있으나, 개별주식의 베타계수는 非安定的이므로 미래의 體系的 危險의 측정치로 적합하지 못하다.

둘째 事後的 R_f가 0은 아니었으나, 美國財務省證券 내지 長期公債의 月收益率로 측정한 R_f보다 높았다.

세째 추정한 CAPM의 기울기는 理論的인 CAPM의 기울기보다 완만하였다.

또 배수[Basu, (1977)]는 낮은 PER을 갖는 포트폴리오의 收益率은 CAPM으로 설명되는 收益率보다 높게 나타난다고 하였고, 벤즈[Banz, (1981)]와 레인가눔[Reinganum, (1981,a)]은 企業의 規模가 收益率生成에 영향을 미치며, 리첸버거와 래머스워미[Litzenberger and Ramaswamy, (1979)]는 配當水準이 높을수록 보통주의 수익율도 높아진다고 하였다.

그러나 CAPM에 나타난 β의 의미에 대하여 논리적으로 비판을 가함으로써 CAPM의 약점을 다소라도 보완해 주는 代替理論으로써 裁定價格決定理論(arbitrage pricing theory, APT)의 개발에 박차를 가한 사람은 롤(Roll)이라고 할 수 있다. 롤[Roll, (1977)]은 經驗的 연구를 통하여 CAPM과 2個要因 제로베타 CAPM을 확인코자 할 때 다음과 같은 여러가지 根本的인 問題點이 발생한다고 지적하고 있다.

첫째 傳統的인 CAPM의 檢定은 진정한 市場포트폴리오(true market portfolio)의 구성을 완전히 알고 있고, 또 이들을 이용할 수 있을 경우에만 가능하다. 그리고 이 市場포트폴리오가 과연 CAPM의 檢定에 적합할 수 있도록 效率的인가(效率的 投資線上에 위치하는가)하는 점은 확실하지 않다.

4) 이 블랙의 2個要因模型이 갖는 약점중의 하나는 空賣에 대한 制限假定이 없다는 것이다. 이는 오직 long position만 인정한다는 것인데, 일반적으로 제로베타 포트폴리오의 구성에는 危險資産의 long position과 short position을 동시에 포함하고 있다.

둘째, 市場포트폴리오의 期待收益率에 대한 代用指數(proxy indexes)로서 株價指數 등을 사용하는 것도 문제점을 내포하고 있다. 만약 선택된 指數가 平均―分散의 基準에서 效率的이 아닐 경우에는 效率的 集合의 數學的 論理(efficient set mathmatics)로 보아 CAPM의 성립이 어렵게 된다.

세째, 비록 선택된 指數가 平均―分散의 기준에서 效率的이라 할지라도, 市場포트폴리오 역시 平均―分散의 效率的 投資線上에 위치하고 있다는 보장은 없다. 그리고 표본에 따라서는 收益生成過程에 상관없이 事後的으로 平均―分散의 효율적 포트폴리오를 구성하고 있는 경우가 많다. 왜냐하면 平均分散의 효율적 포트폴리오로 계산한 베타는 진정한 市場포폴리오가 效率的投資線上에 위치한다는 점과는 상관없이 항상 事後的 平均收益率과 線型關係를 유지하고 있기 때문이다.

네째, 블랙[Black, (1972)]의 2個要因 제로베타 포트폴리오에서도 같은 문제가 발생한다. 선택된 代用指數가 效率的이라고 한다면 제로베타 포트폴리오는 이 代用指數와의 관계에서 구성될 것인데, 만약 이 代用指數의 事後的 效率性이 판명될 경우에는 모든 資產이 당연히 證券市場線(security market line) 상에 위치할 것이며, 비정상적인 수익률은 존재하지 않게 된다. 그러므로 體系的 危險과의 관계에서 비정상적인 수익률이 존재한다는 것은 선택된 指數가 단순히 사후적으로 非效率的이라는 점을 의미한다.

다섯째, CAPM이나 블랙의 2個要因模型에 대한 모든 檢定은 代用市場포트폴리오(proxy market portfolio)의 效率性을 검정하는 것에 지나지 않는다. 그리고 선택된 代用指數가 非效率的으로 나타날 수도 있지만, 이 점만으로는 진정한 市場포트폴리오의 효율성에 대한 아무런 해답을 제시하지 못한다.

여섯째, 代用포트폴리오는 일반적으로 다른 代用포트폴리오 또는 진정한 市場포트폴리오와 높은 相關關係를 유지하고 있다. 그러나, 危險과 期待收益率의 측정에 있어서는 代用포트폴리오와 진정한 市場포트폴리오 사이에 발생하는 微小한 차이에도 적지않은 偏奇性(biases)이 유발될 수도 있다.

롤이 제시한 이상과 같은 傳統的인 CAPM이나 블랙의 2個要因模型에 대한 비평은 이들 모형이 완전히 불합리하다는 것은 아니다. 롤의 주장은 이들 모형에 대한 經驗的 檢定과 그 결과의 해석에서 신중을 기해야 한다는 것이다. 다시 말해서 代用指數가 事後的으로 效率性을 갖는다고 하면, 베타에 회귀시킨 收益率의 回歸線은 완전히 線型이 될 것이며, 반대로 이 代用指數가 事後的으로 非效率性을 가질 경우에는 危險과 收益率의 관계에서 代用指數의 非效率性이 그대로 반영될 것이라고 한다. 그런데 진정한 市場포트폴리오를 정확하게 알고 있고 또 이것을 완전하게 측정한다는 것은 극히 어려운 실정이다.[5] 따라서, 次善의 代用指數로서 추정한

5) 진정한 市場포트폴리오(true market portfolio)는 人的資本(human capital) 不動產, 現金, 債券, 株式, 옵션 등 市場性 資產과 非市場性資產(marketable and nonmarketable assets)을 모두 포함하고 있다.

CAPM은 代用指數 자체가 가지는 限界點으로 인하여 근본적인 不明確性을 내포하고 있으며, 또 이러한 CAPM을 이용한 證券投資의 成果測定 역시 동일한 한계점을 가지고 있다고 한다.[6)]

Ⅳ. 裁定價格決定理論

1. 理論展開

이상과 같이 均衡資本市場의 理論으로 S-L-M의 傳統的 CAPM과 블랙의 제로베타 CAPM은 여러 학자의 경험적 檢定을 통하여 많은 限界點이 지적되어 왔으므로 1970년도 중반 이후 이들에 대한 보완이 절실히 요청되어 왔다.

로쓰[Ross, (1974), (1976)]가 제시한 裁定價格決定理論(arbitrage pricing theory, APT)은 이러한 要請에 부응한 것으로 CAPM에 비하여 檢定의 가능성이 높은 代替理論이다. CAPM에서는 증권의 收益率을 平均—分散의 기준하에서 單一共通要因(single common factor) 즉, 單一代用指數와의 線型關係로 설명하고 있지만, APT에서는 증권의 收益率을 多數의 共通要因과의 線型關係로 설명함으로써 理論的인 측면에서 보면 APT가 一般性에 있어 우월하다고 하겠다.

APT에서는 다음과 같은 세가지 기본가정으로 하고 있다.

첫째, 完全競爭的 資本市場(perfectly competitive and frictionless capital markets)이 존재한다. 그러므로 투자자는 裁定利益(arbitrage profit)을 달성할 수 없다.

둘째, 투자자는 確實性下에서 더 많은 富를 선호한다.

세째, 투자자는 資産 또는 證券의 確率的 收益率(stochastic rate of return)에 대하여 同質的 豫測을 한다. 다시 말해서 i證券의 確率的 收益生成模型은 아래 (6)식과 같이 k共通要因과의 線型關係로 설명된다는 것이다.

$$\tilde{R}_i = E(\tilde{R}_i) + b_{i1}\tilde{\delta}_1 + b_{i2}\tilde{\delta}_2 + \cdots + b_{ik}\tilde{\delta}_k + \tilde{\varepsilon}_i \quad \cdots\cdots(6)$$

$\tilde{R}_i = i$증권의 確率的 收益率

$E(\tilde{R}_i) =$ i증권의 期待收益率

$b_{ik} = i$증권 수익률의 k번째 共通要因에 대한 敏感度(sensitivity). k번째 要因의 回歸係數(베타계수)

$\tilde{\delta}_k =$ 모든 증권의 收益率에 영향을 주는 k번째 共通要因. 각 要因의 平均은 0임.

$\tilde{\varepsilon}_i =$ 平均이 0인 殘差(noise term)

이 세번째의 가정에서, 標本을 구성하고 있는 증권의 數는 반드시 要因의 數(k)보다 많아야 하며, 非體系的 危險(unsystematic risk)을 표현하고 있는 殘差項 ($\tilde{\varepsilon}_i$)은 모든 共通要因 및 다른 증권의 收益生成模型의 殘差와 반드시 獨立關係에 있다. 그리고 이 殘差項은 표본을 구성하

6) 그러나 이러한 代用指數의 선택에서 발생하는 CAPM의 약점에 대한 Roll의 비판은 殘差分析(residual analysis)을 통하여 완화시킬 수 있다.

는 증권의 數가 증가함에 따라 축소 내지 제거될 수 있다.

均衡狀態下에서 로쓰는 裁定價格決定模型(arbitrage pricing model, APM)을 (6)식의 收益生成模型으로 부터 裁定포트폴리오(arbitrage portfolio)의 개념을 이용하여 도출하고 있다. 均衡狀態下에서 형성되는 裁定포트폴리오는 ① 포트폴리오의 構成을 변동시켜도 變動시킨 富의 合은 항상 0(using no wealth)이 되고, ② 이 포트폴리오의 모든 危險이 0(having no risk)이 될 때, 당연히 平均的으로 收益率이 0이 되는 포트폴리오를 말한다. 이러한 裁定포트폴리오의 개념은 다음과 같이 3개 段階로 구분하여 설명할 수 있다.

제1단계는, 포트폴리오를 구성하고 있는 일부 증권을 다른 증권으로 代替함으로써 발생되는 富의 變動이 0이라는 것이다. 즉 裁定포트폴리오의 變動된 富의 합계는 반드시 0이다. 이를 식으로 표현하면

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = 0 \quad \cdots\cdots (7)$$

W_i = i증권을 賣渡 또는 買受한 금액이 포트폴리오의 富(價値)에서 차지하는 비율

n = 포트폴리오를 구성하는 증권의 수

또는

$$\eta e = 0 \quad \cdots\cdots (7a)$$

η = n개의 證券으로 구성한 裁定포트폴리오

$e = [1, 1, \cdots\cdots 1]'$

이 된다. 그리고, 구성을 변경한 裁定포트폴리오의 收益率은 (6)식으로 부터

$$\tilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} W_i \tilde{R}_i$$

$$= \sum_i W_i E(\tilde{R}_i) + \sum_i W_i b_{i1} \tilde{\delta}_1 + \cdots\cdots + \sum_i W_i b_{ik} \tilde{\delta}_k + \sum_i W_i \tilde{\varepsilon}_i$$

이 되며, 이 포트폴리오를 구성하고 있는 證券의 數가 증가하여 $1/n$이 매우 작아지게 되면 이 식의 殘差項 $\sum_i W_i \tilde{\varepsilon}_i$은 大數의 法則(law of large number)에 의하여 축소 내지 제거 될 수 있으므로 이식은 다음과 표현된다.

$$\tilde{R}_p = \sum_i W_i \tilde{R}_i$$

W_i

$$\approx \sum_i W_i E(\tilde{R}_i) + \sum_i W_i b_{i1} \tilde{\delta}_1 + \cdots\cdots + \sum_i b_{ik} \tilde{\delta}_k \quad \cdots\cdots (8)$$

또는

$$\eta \tilde{x} = \eta E + (\eta\beta)\tilde{\delta} + \eta\tilde{\epsilon}$$

$$\approx \eta E + (\eta\beta)\tilde{\delta} \quad \cdots\cdots (8a)$$

$\tilde{x}$ = 증권의 確率的 收益率 벡터

E = 증권의 期待收益率(平均收益率) 벡터

β=共通要因의 回歸係數(베타계수)의 벡터

$\tilde{\delta}$=共通要因의 벡터

제2단계는, 裁定포트폴리오의 體系的 危險이 0이 되어야 한다는 것이다. 제1단계에서 이미 非體系的 危險인 殘差項은 제거되었으므로, 다시 體系的危險이 0이 된다면 포트폴리오의 위험은 모두 0이 되는 셈이다. 따라서 裁定포트폴리오의 收益率인 R_p는 이제 確率的 變數(random variable)가 아니며 다음과 같이 표현된다.

$$R_p=\sum_i W_iE(\tilde{R}_i)+\sum_i W_ib_{i1}\tilde{\delta}_1+\cdots\cdots+\sum_i W_ib_{ik}\tilde{\delta}_k$$

$$=\sum_i W_iE(\tilde{R}_i) \quad\cdots\cdots(9)$$

$$\because \sum_i W_ib_{ik}=0 \quad \text{for each } k \quad\cdots\cdots(10)$$

또는

$$\eta x=\eta E+(\eta\beta)\tilde{\delta}$$

$$=\eta E \quad\cdots\cdots(9a)$$

$$\because \eta\beta=0 \quad\cdots\cdots(10a)$$

제3단계는, 제1단계와 제2단계가 만족될 경우, 즉 裁定포트폴리오에서 純富(net weath)의 변동이 없고 어떠한 危險(體系的, 非體系的 危險)도 존재하지 않는다면, 당연히 이 포트폴리오의 收益率은 0이 된다. 왜냐하면 資本의 증가와 危險이 없는 상태에서 裁定포트폴리오의 收益率이 만약 0이 아니라면, 均衡資本市場下에서 이 포트폴리오의 收益은 無限히 달성되는데, 이러한 현상은 존재할 수 없기 때문이다. 따라서 모든 裁定포트폴리오의 收益率은 다음과 같이 0이 되어야 한다.

$$R_p=\sum_i W_iE(\tilde{R}_i)=0 \quad\cdots\cdots(11)$$

또는

$$\eta x=\eta E=0 \quad\cdots\cdots(11a)$$

이상과 같이 3개단계를 통하여 裁定포트폴리오가 구성될 수 있다면, 이 裁定포트폴리오의 개념이 바로 裁定價格決定模型(arbitrage pricing model, APM)의 기초가 된다. 다시 말해서, 값이 공통으로 0인 常數벡터(constant vector)와 係數벡터(coefficient vectors)에 각기 直交(orthogonal) 관계에 있는 벡터[예컨데 $E(R_i)$ 벡터]는 값이 0인 다른 벡터[포트폴리오의 期待收益率 벡터, $\sum_i W_iE(R_i)$]에 대해서도 역시 直交關係에 있어야 한다는 代數의 표현(algebraic statement)에 따라, 이 벡터[$E(R_i)$]를 常數벡터와 係數벡터의 線型結合(linear conbination)으로 표현할 수 있다.

따라서, (7)식 또는 (7a)식의 常數벡타와 (10)식 또는 (10a)의 각 係數벡터에 直交關係를 가지고 있으므로 (11)식 또는 (11a)식인 裁定포트폴리오의 收益率 벡터에도 直交관계를 가져야 하는 어느 벡터를 개별증권의 期待收益率 벡터인 $E(R_i)$라고 하면, 이 [$E(R_i)$] 벡터는 다음과 같

이 常數벡터와 각 係數벡터의 線型結合으로 표현되며, 係數의 數는 $k+1$個 $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_k)$가 된다.[7)]

$$E(\tilde{R}_i)=\lambda_0+\lambda_1 b_{i1}+\lambda_2 b_{i1}+\cdots\cdots \lambda_k b_{ik} \qquad (12)$$

이 (12)식을 裁定價格決定模型(APM)이라고 한다. 여기에서 b_{ik}는 k번째 共通要因에 대한 敏感度 즉 回歸係數(베타係數)이며, 均衡狀態下에서는 i證券의 期待收益率이 b_{ik}의 線型函數로 표현되고 있음을 알 수 있다. 그리고 (12)식에서 만약 無危險收益率 R_f(제로베타 포트폴리오에서는 R_z)가 존재한다면 b_{0k}는 0이 됨과 동시에 $\lambda_0=R_f$이 된다. 또 (12)식은 아래와 같이 超過收益率(excess return)의 형태로도 표현할 수 있다.

$$E(R_i)-R_f=\lambda_1 b_{i1}+\lambda_2 b_{i2}+\cdots\cdots+\lambda_k b_{ik} \qquad (12a)$$

이 식에서 λ_{ik}는 i증권의 k要因에 대한 危險프리미엄(risk premium) 즉 危險의 價格(price of risk)이다. 그리고, 이 모형에서 오직 單一要因만 존재한다면, (12a)식은 다음과 같이 표현된다.

$$E(R_i)-R_f=\lambda b_i$$

위의 APM에서는 要因에 대한 危險프리미엄인 λ_j를 해석하기 위하여 經驗的 檢定이 수행되고 있다. 이제, 각각의 要因에 대해서만 體係的 危險 또는 敏感度가 $1(b_i=1)$이고 다른 要因에 대해서는 0의 危險 또는 敏感度를 가지는 포트폴리오를 구성한다면, λ_j는 오직 j要因의 體系的 危險만 표현하고 있는 포트폴리오의 市場危險프리미엄(market risk premium) 또는 超過收益率(excess return)로 해석되며, 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\lambda_j=E(R^j)-R_f \qquad (13)$$

$j=1, 2, \cdots\cdots k$要因

$E(R^j)=j$번째 要因에 대해서는 敏感度가 1이고, 다른 모든 要因에 대해서는 敏感度가 0인 포트폴리오의 期待收益率

7) (7)식에는 常數 λ_0를, 그리고 (10)식에는 상수 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_k$를 차례대로 대응시켜 곱한다음, 합산하고 다시 이들을 證券의 순서별로 項을 묶어 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{rl}
& \lambda_0(W_1+W_2+\cdots\cdots+W_n)=0 \\
& \lambda_1(W_1 b_{11}+W_2 b_{21}+\cdots\cdots+W_n b_{n1})=0 \\
& \lambda_2(W_1 b_{12}+W_2 b_{22}+\cdots\cdots+W_n b_{n2})=0 \\
& \vdots \\
+) & \underline{\lambda_k(W_1 b_{1k}+W_2 b_{2k}+\cdots\cdots+W_n b_{nk})=0} \\
& W_1(\lambda_0+\lambda_1 b_{11}+\lambda_2 b_{12}+\cdots \lambda_k b_{1k})+ \\
& W_2(\lambda_0+\lambda_1 b_{21}+\lambda_2 b_{22}+\cdots \lambda_k b_{2k})+ \\
& \vdots \\
& W_n(\lambda_0+\lambda_1 b_{n1}+\lambda_2 b_{n2}+\cdots \lambda_k b_{nk})=0 \cdots\cdots ①식
\end{array}$$

다음 (11)식을 증권의 순서별로 項을 구분하여 전개하면

$$\sum_i W_i E(\tilde{R}_i)=W_1 E(\tilde{R}_1)+W_2 E(\tilde{R}_2)+\cdots+W_n E(\tilde{R}_n)=0 \cdots\cdots ②식$$

이다. 이제, ①식과 ②식을 대응시키면 다음과 같이 APM이 도출된다.

$$\begin{array}{l}
E(\tilde{R}_1)=\lambda_0+\lambda_1 b_{11}+\lambda_2 b_{12}+\cdots\cdots+\lambda_k b_{1k} \\
E(\tilde{R}_2)=\lambda_0+\lambda_1 b_{21}+\lambda_2 b_{22}+\cdots\cdots+\lambda_k b_{2k} \\
\vdots \\
E(\tilde{R}_n)=\lambda_0+\lambda_1 b_{n1}+\lambda_2 b_{n2}+\cdots\cdots+\lambda_k b_{nk}
\end{array}$$

그리고 이 (13)식을 APM인 (12a)의 각 要因項에 대응시키면 APM은,

$$E(R_i)-R_f=[E(R^1)-R_f]b_{i1}+[E(R^2)-R_f]b_{i2}+\cdots\cdots+[E(R^k)-R_f]b_{ik}\cdots\cdots\cdots(12b)$$

와 같이 線型回歸線이 된다. 이 경우에 ① 收益率의 벡터가 結合正規分布(joint normal distribution)을 이루고 있고, ② 모든 要因이 그들의 變換벡터가 直交正規分布(othonormal)를 이루도록 一次變換(linear transformation) 된다고 가정하면, b_{ij}는 CAPM의 베타와 동일한 방법으로 산출할 수 있다.

$$b_{ik}=\frac{Cov\ (\tilde{R}_i,\ \tilde{R}^k)}{Var(\tilde{R}^k)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12c)$$

$Cov(\tilde{R}_i,\ \tilde{R}^k)=$ i증권의 수익률과 k번째 要因의 一次變換値와의 共分散

$Var(\tilde{R}^k)=$ k번째 要因의 一次變換値의 分散

그러므로 CAPM은 APM의 한 특정한 경우라고 하겠다. 왜냐하면 CAPM은 증권의 收益率을 單一要因인 市場포트폴리오의 體系的 危險만으로 설명코자하는 것으로, 多數要因模型인 APM의 한 특정한 경우이기 때문이다. 바꾸어 말하면, 危險資産의 評價模型인 APM은 CAPM의 限界點을 보완한 것으로 다음과 같은 여러가지 점에서 CAPM보다 제약이 적고, 一般性이 높다고 하겠다[Ross, (1974), (1976)].

첫째, CAPM에 있어서는 收益率의 多變量正規分布(multivariate normal dislribution)와 投資者의 2次效用函數(quardratic preference)를 가정하고 있지만, APM은 이러한 가정을 필요로 하지 않는다.

둘째, APM에서는 資産의 均衡收益率을 CAPM에서 처럼 單一要因(베타)으로 설명하는 것이 아니라 多數의 要因으로 설명하므로 일반적으로 說明力이 높다고 하겠다.

세째, 模型의 推定과 檢定에 있어 APM에서는 CAPM과는 달리 母集團인 市場포트폴리오를 이용할 필요가 없다. 비교적 소규모의 포트폴리오에 대해서로 APM의 적용은 가능하다.

네째, CAPM에서는 平均-分散의 기준에서 시장포트폴리오의 收益率이나 代用指數가 效率的이라는 가정을 하고 있으나, APM에서는 이러한 가정이 필요없다. 따라서 APM은 CAPM의 근본적인 限界點인 市場포트폴리오의 고려 및 그 效率性의 문제를 제거시킴으로써 模型의 推定과 檢定에 있어 一般性이 높다고 하겠다.

그러나 APM에 있어서도 多數의 베타係數($b_{i1}, b_{i2}, \cdots b_{ik}$)에 대한 推定方法과 檢定의 문제는 남아 있다. 이들 베타係數는 回歸分析으로 직접 추정할 수는 없고, 러리와 맥스웰[Lawley and Maxwell, (1963)]과 하만[Harman, (1975)] 등의 要因分析(factor analysis)을 이용하여 推定한다. 그러나 要因分析의 統計的 方法論이 가지는 약점은 그대로 APM의 약점이 된다. 다시 말해서 추출되는 要因의 數는 표본과 분석자의 주관적 판단에 따라 달라질 수 있으며, 또 APM의 要因은 經濟的 意味를 밝히기가 어려운 점이 있다.

2. 要因分析

要因分析(factor analysis)은 多變量의 資料로 부터 이들의 性格을 나타내는 소수의 要因(factors)을 추출하는 統計的 方法이다. 要因分析에서는 變量 Z_i가 여러개의 共通要因變數(common factor variates)와 한개의 固有要因(unique factor)과 線型函數(linear function)를 이룬다고 한다. 共通要因은 관찰한 變數와의 共分散(covariance)이나 相關性을 제시해 주고, 固有要因은 特殊變數(particular variables)의 分散에만 기여하고 있다. 그리고 要因로딩(factor loadings)은 共通要因과 관찰한 變數 Z_i와의 相關係數(correlation coefficients)이다.

要因分析의 模型은 다음과 같이 표현된다.

$$Z_i = a_{i1}F_1 + a_{i2}F_2 + \cdots\cdots + a_{im}F_m + d_iU_i \quad \cdots\cdots (14)$$

또는

$$Z_i = \sum_{j=1}^{m} a_iF_j + d_iU_i \quad \cdots\cdots (14a)$$

$Z_i = i$번째 變數, $\forall\ i = 1, 2, \cdots p$.

$F_j = j$번째 共通要因의 變數.

$\forall$, $j = 1, 2, \cdots m$. 각 共通要因은 서로 獨立關係에 있음.

$a_{ij} = F_j$에 대한 Z_i의 要因로딩(factor loading); 이는 i번째 變數의 j번째 要因의 重要性을 나타내는 係數이다.

$d_iU_i = i$번째 變數를 j個의 要因變數의 線型函數으로 설명한 殘差(residual error)

이상의 (14)식을 매트릭스(matrix)로 표현하면 다음과 같다.

$$\underset{(p\times 1)}{\mathbf{Z}} = \underset{(p\times m)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(m\times 1)}{\mathbf{F}} + \underset{(p\times 1)}{\mathbf{DU}} \quad \cdots\cdots (14b)$$

$\mathbf{Z}' = [\mathbf{Z}_1,\ \mathbf{Z}_2, \cdots\cdots \mathbf{Z}_p]$

$\mathbf{F}' = [\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2, \cdots\cdots \mathbf{F}_m]$

$\mathbf{U}' = [\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_2, \cdots\cdots \mathbf{U}_p]$

이고, 要因로딩 매트릭스는

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots\cdots a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1}, & a_{p2}, & \cdots\cdots a_{pm} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{D}' = [d_1,\ d_2, \cdots\cdots d_p]$

이다.

要因點數 매트릭스(factor score matrix)에서는 각 共通要因의 平均이 0, 分散이 1인 直交正規分布(orthonormal distribution) 또는 獨立正規分布(independent and normal distribution)——NID(0,1)——를 이루고 있다. D 매트릭스에서는 각 要素(d_1, d_2, $\cdots d_p$)가 0의 平均과 特定

한 값의 分散(a specific variance)를 가지며, 서로 獨立正規分布를 이루고 있다.

그리고 Z_i의 分散, Z_i와 Z_h의 共分散은 다음과 같이 표현되며,

$$Var(Z_i)=\sigma_i^2 = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots\cdots + a_{im}^2 + d_i^2 \quad \cdots\cdots (15)$$

$$Cov(Z_i, Z_h)=a_{i1}a_{h1}+a_{i2}a_{h2}+\cdots\cdots+a_{im}a_{hm} \quad \cdots\cdots (15a)$$

이들을 매트릭스로 나타내면,

$$\Sigma=\mathbf{AA}'+\mathbf{D} \quad \cdots\cdots (15b)$$

이며, Z_i의 커뮤널리티(communality)[8]는

$$\sigma_i^2 - d_i^2 = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 = h_i^2 \quad \cdots\cdots (16)$$

로 정의 되는데, 이 커뮤널리티는 Z_i 模型의 說明分散을 의미한다.

1) 要因로딩 매트릭스의 推定

要因로딩 매트릭스(factor loading matrix)의 推定은 共通要因의 空間(common factor space)을 결정하는 것과 이 共通要因의 空間에 관련하여 特殊要因을 결정하는 것으로 분류할 수 있다.

共通要因을 결정하는 방법은 두가지가 있는데, 하나는 變數의 커뮤널리티를 최대화하는 것이고[9], 다른 하나는 變數의 殘差 매트릭스의 수치를 最小化함으로써 共分散 매트릭스나 相關係數 매트릭스를 가장 적합하게 再算出해 내는 것이다.[10] 이 축소된 相關係數 매트릭스의 順位(rank)가 變數 사이의 相互關聯性을 설명하는 데 필요한 最小 共通要因의 數인 것이다.

主要因分析(principal component analysis)에서는 要因로딩 매트릭스($p\times m$; $m<p$)가 대각선에 모두 1의 값을 가진 相關係數 매트릭스로 부터 산출된 것인데, 이 때에 要因의 數(m)는 미리 정해져 있다. 그리고 모든 特性根(characteristic roots) 또는 아이근値(eigen value)는 0보다 크며 모든 要因(p)이 變數의 개념을 설명하는 데에 필요하다.

共通要因分析(common factor analysis)에서는 主要因分析과는 대조적으로 대각선에 모두 커뮤널리티를 둔 相關係數 매트릭스로 부터 要因로딩 매트릭스를 추정한다.

目的函數(objective function)를 最大 또는 最小化하는 要因回轉에는 두가지 방법이 있다. 하나는 XY軸이 직각을 유지하면서 회전하는 直角回轉(orthogonal rotation)이고, 다른 하나는 目的函數를 最適化하는 斜角回轉(oblique rotation)이다. 그리고 이 두 軸回轉은 모두 要因로

8) 筆者는 이 communality를 共性値라고 번역한다. 그러나 이 共性値라는 用語는 아직 일반화되지 않고 있으므로 이곳에서는 발음대로 커뮤널리티라고 하겠다.

9) 總分散의 값은 1이기 때문에 한 變數의 커뮤널리티 ($h^2=\sum_{i=1}^{m} a_i^2$)를 증가시키면 特殊要因의 分散(specific variance)은 감소하게 된다. 하만 [Harman, (1975)] pp. 18-19과 모리슨[Morrison, (1967)] p. 262 참조.

10) 개략적인 相關係數 매트릭스의 順位(rank)는 ① 事前에 추출할 要因의 數를 고정시켜 놓거나, ② 커뮤널리티($h^2\leq1$)를 추정해 냄으로써 결정될 수 있다.

	單 純 構 造	
直角軸	Quartimax	Varimax
斜角軸	Quartimin	Covarimin
	Bi-Quartimin	

〔그림 1〕 直角回轉과 斜角回轉의 비교

딩 매트릭스를 [그림 1]과 같이 單純構造 (simple structure)[11]로 표현하기 위하여 수행된다.

배리맥스(varimax) 回轉과 쿼티맥스(quartimax) 回轉을 單純構造의 수치로 비교해 보면, 배리맥스 回轉이 쿼티맥스 回轉보다 효과적이며[12], 코배리민(covarimin) 回轉은 要因 사이의 相關係數가 0에 접근하는 方法에 있어서는 배리맥스 회전과 동일하다.[13] 그리고 쿼티민(quartimin) 회전은 코배리민 회전과의 절충을 이루고 있는 바이쿼티민(bi-quartimin) 회전과 함께 최대의 斜角抽(oblique exes) 즉 가장 밀접한 相關關係의 要因을 산출해 낼 수 있을 것이다.[14]

2) 要因點數의 推定[15]

要因點數(factor scores)는 각 變數의 觀察(N)에 대한 각 要因의 係數를 의미한다. 그러므로 要因點數 매트릭스는 종축에 觀察(N), 횡축에 要因(m)을 표현한다.

主要因分析에서는 要因點數의 推定을 아래의 산식에 의하여 직접 구할 수 있으며,

$$F = X\Lambda(\Lambda'\Lambda)^{-1} \quad \cdots\cdots (17)$$

F=要因點數 매트릭스($N \times m$)

Λ=回轉된 要因로딩 매트릭스($p \times m$)

X=자료의 標準化된 값, 즉 正規點數(normal score or standarized value)의 매트릭스. 이를 식으로 표현하면, $X = (Z_{ik} - \bar{Z})/S_i$임.

共通要因分析에서는 要因點數를 共分散매트릭스로 부터 아래와 같이 추정한다.

$$F = X(\hat{\Lambda}\hat{\Lambda} + D)^{-1} \quad \cdots\cdots (17a)$$

$\hat{\Lambda}$=회전된 要因로딩 매트릭스의 推定値

D=殘差

그리고 要因分析의 산출과정은 매우 번거럽기 때문에 세부적인 式의 유도과정은 생략키로 하고, 이곳에서는 중요한 5개 算出段階만 매트릭스의 順位와 함께 [그림 2]에서 나타내고자

11) 單純構造(simple structure)는 要因로딩 매트릭스의 구조를 의미하는데, 이 매트릭스는 少數의 變數들과는 밀접한 관련을 가지고 있지만 그외의 다른 변수들과는 비교적 獨立關係에 있는 매트릭스 구조를 가진다.

12) 하만[Harman(1975)], op. cit., pp. 310-324.

13) Ibid.

14) Ibid.

15) 이 要因點數는 아직까지 APT에서 직접적으로 이용하지 않고 있다. 그러나 앞으로 이 개념이 이용될 가능성에 대비하여 그 推定方法만 이곳에서 간단히 제시한다.

〔그림 2〕 原因分析 技法의 계산단계

1. 原資料 ($N \times p$)

↓

2. 相關係數 매트릭스 ($p \times p$)

↓

3. 최초의 要因로딩 매트릭스 ($p \times m$)

↓

4. 回轉된 要因로딩 매트릭스 ($p \times m$)*

↓

5. 要因點數 매트릭스 ($N \times m$)

N=觀察回數, p=變數의 數, m=要因의 數
* APM의 산출에서는 回轉된 要因로딩 매트릭스를 獨立變數로 사용함.

한다.

3. 資料의 選擇과 裁定價格決定模型의 推定

1) 資料의 選擇

裁定價格決定模型의 推定에 있어서는 먼저 分析期間과 선택해야 할 原資料(raw data)의 범위를 결정해야 한다. 分析期間은 證券市場이 형성된 이후 현재까지의 全期間을 포함시키는 것이 가장 理想的이나, 이는 資料의 선택에 있어 현실적으로 불가능할 때가 많다. 따라서 證券市場의 資料가 일관성을 가지고 있고, 비교적 정착된 證券市場이 存立하게된 시점에서 부터 현재까지의 기간을 分析期間으로 결정하는 것이 일반적이다. 그러나 分析期間은 分析目的에 따라 선택적으로 결정할 수 있다.

그리고 分析期間이 결정되고 나면 標本을 구성할 原資料의 선정에 대한 결정을 내려야 한다. APM은 危險資產 또는 證券의 收益率을 추정하는 模型이므로 原資料는 당연히 증권의 수익률이 된다. APM의 推定 및 檢定은 롤과 로쓰[Roll and Ross, (1980)]의 연구가 하나의 기준이 된다. 롤과 로쓰는 [표 1]과 같이 1962년 7월 3일부터 1972년 12월 31일 까지의 기간을 택하여, NYSE와 AMEX에 상장된 1,260개 기업의 證券을 각기 30개의 증권으로 구성된 42個 포트폴리오로 분리한 다음, 이들에 대하여 2,619일의 1日 收益率을 原資料로 이용하였다. 이때에 分析期間중 收益率 資料의 일관성을 유지하기 위해서는 面額分割, 有·無償增資, 또는 配當등 收益率에 영향을 미치는 상황을 수정하여야 한다. 롤과 로쓰가 APM의 推定에서 사용한 이 分析期間과 標本의 범위는 그 이후 많은 經驗的 硏究에서 하나의 基準이 되었다.

그러나 分析期間은 연구목적과 자료의 제한에 따라 달라질 수 있고, 原資料도 週別, 月別 收益率로 사용할 수 있다. 그리고 原資料는 일반적으로 時系列資料(time series data)로 이용한

〔표 1〕 롤과 로쓰(1980) 硏究의 資料 說明

Source:	Center for Research in Security Prices Graduate School of Business University of Chicago Daily Returns File
Selection Criterion:	By alphabetical order into groups of 30 individual securities from those listed on the New York or American Exchanges on *both* 3 July 1962 and 31 December 1972. The (alphabetically) last 24 such securities were not used since complete groups of 30 were required.
Basic Data Unit:	Return adjusted for all capital changes and including dividends, if any, between adjacent trading days;i. e., $[(p_{j,t}+d_{j,t})/p_{j,t-1}]-1$, where p=price, d=dividend, j=security index, t=trading day index.
Maximum Sample Size per Security:	2619 daily returns
Mumber of Selected Securites	1260,(42 groups of 30 each)

다.

우리나라의 證券市場에서 APT가 어떻게 작용하고 있는가를 검토하기 위해서는 韓國證券去來所에서 발행한 1971년 이후의 자료를 이용하는 것이 바람직하다. 왜냐하면 비교적 이 시점에서 부터 證券市場이 정상화되었기 때문이다.

2) 裁定價格決定模型의 推定

APM의 推定에는 ① 要因分析의 技法과, ② 橫斷面的 回歸分析(cross-sectional regression analysis)의 두가지 統計的 方法이 이용된다. 그리고 앞에서 APM은 다음과 같이 重線型回歸模型(multiple linear regession model)이라고 하였다.

$$E(R_i)=\lambda_0+\lambda_1 b_{i1}+\lambda_2 b_{i2}+\cdots+\lambda_k b_{ik} \quad\cdots\cdots(12)$$

이 APM을 推定하기 위해서는 먼저 獨立變數인 베타$(b_{i1}, b_{i2}, \cdots b_{ik})$의 값과 從屬變數인 $E(R_i)$의 값을 산출해야 하고, 그 다음엔 橫斷面的 回歸分析에 의하여 이 두 종류의 變數로 重線型回歸模型인 APM을 추정하여야 한다. 다시 말해서 獨立變數인 베타의 數와 그 값은 要因分析에 의하여 추정된 要因로딩이고, 從屬變數인 $E(R_i)$는 分析期間중 i증권의 期待收益率이므로 原資料로 부터 산출할 수 있다.

APM을 推定하는 이러한 순서를 段階別로 설명하면 다음과 같다.

제1단계 : 分析期間과 標本의 범위를 결정한다. 標本은 일반적으로 大標本과 이를 분할한 小標本으로 구분하고 각 표본을 구성하는 증권의 1日 收益率은 時系列資料(time series data)로 한다.

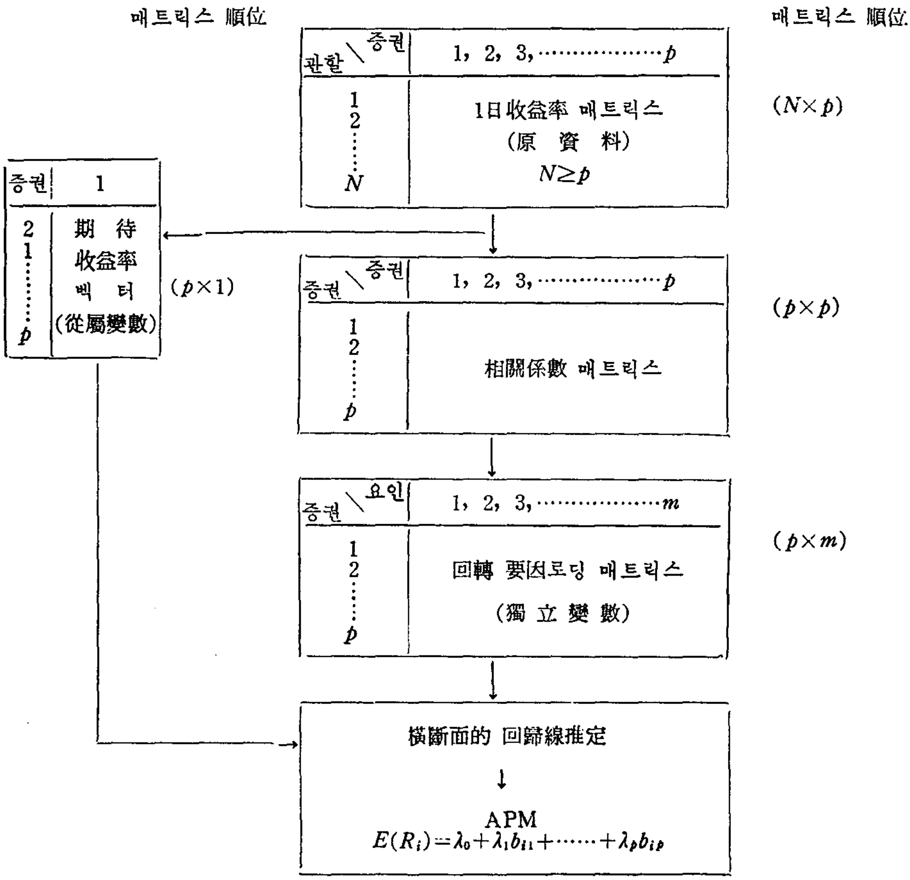
제2단계 : 수집된 原資料로 부터 각 증권의 期待收益率을 산출한다. 그 다음에는 收益率의 分散, 共分散, 相關係數 매트릭스로 부터 要因로딩 매트릭스를 산출한다. 이 경우에 特性根(characteristic roots) 또는 아이근値(eigen value)에 의하여 要因의 數가 결정된다.

제3단계 : 이미 산출된 각 증권의 期待收益率을 從屬變數로, 그리고 多數의 要因로딩을 獨立變數로 하여 橫斷面的 重線型回歸模型을 추정한다. 이 推定模型이 바로 APM이다.

제4단계 : 이상의 3단계를 통한 APM의 추정을 각 標本에 적용하고, 標本의 APM을 檢定, 比較한다.

이처럼 要因分析과 回歸分析의 통계적 방법을 이용하여 原資料로 부터 APM을 추정할 때 컴퓨터가 산출해 주는 주요 단계의 매트릭스 자료를 그들의 順位와 함께 제시하면 [그림 3]과 같다.

〔그림 3〕 APM의 推定 順序



※ $i=1,2,\cdots\cdots p$증권
$k=m$ 要因로딩
N=觀察數

V. 裁定價格決定模型에 대한 經驗的 硏究

이처럼 CAPM에 대한 代替理論으로써 로쓰[Ross, (1974), (1976)]가 개발한 APM이 과연 資本市場의 評價模型으로 적합한가에 대한 經驗的 硏究는 현재 활발히 진행되고 있다. APM에 대한 경험적 연구의 결과는 세가지의 입장으로 분류할 수 있다. 첫째는, APM의 有用性을 그대로 지지하는 입장이고, 둘째는 APM의 限界點을 지적하여 이를 강하게 批判하는 입장이고, 세째는 APM의 장점을 중요시함과 동시에 限界點을 보완함으로써 APM을 계속 확장하자는 입장이다 .필자의 견해로는 세번째의 입장이 學問的으로 가장 바람직하다고 생각한다.

APM에 대하여 현재까지 발표된 統計的 檢定은 수 없이 많다. 그러므로 이들의 핵심내용을 이곳에서 전부 별거한다는 것은 紙面의 한계로 거의 불가능하다. 그러나 현재까지 발표 되고 또 주요한 APM의 經驗的 硏究結果를 가능한한 많이 검토한다는 것은 APM에 대한 現在의 座標와 미래의 방향을 이해하는데에 크게 도움이 될 것으로 생각된다. 따라서 다소 진부한 감이 있긴 하지만 이러한 논문들을 발췌하여 발표된 순서에 따라 內容을 간략하게 요약코자 한다.

收益生成模型이 多數의 要因으로 설명될 것이라는 가능성은 오래전 파라 [Farrar, (1962)]와 킹[King, (1966)]의 논문에서 제시되었다고 할 수 있다. 그러나 이들의 경험적 연구는 단순히 要因分析의 方法을 이용한 것으로 産業의 影響을 강조할 것일 뿐, 당시에는 APT의 개념이 확립되지 않았으므로 危險資産의 收益率에 대한 産業要因(industry factors)의 橫斷面的 영향은 검토되지 않았다.

APM에 관한 비교적 첫 檢定으로는 게르[Gehr, (1975)]의 논문을 들 수 있다. 이것은 브레난[Brennan, (1971)]의 논문을 확장한 것으로 APM의 가정이 단순하고, 檢定도 용이하므로 APM이 CAPM 보다는 설득력이 있는 模型이라고 주장하고 있다. 게르는 24개 産業指數와 41개 株式收益率을 이용하여 分析期間을 30년으로 정한다음 이 기간을 다시 10년씩 분할하여 標本을 결정하고, 이들에 대한 APM을 推定, 檢定하였다. 그는 주식수익률의 分散을 설명하는 2 내지 3개의 共通要因이 證券市場에 존재한다고 하고, 이 중에서 제1요인의 중요성을 강조하였다.

롤과 로쓰[Roll and Ross, (1980)]는 로쓰[Ross, (1974), (1976)]의 APM이 과연 資本市場의 性格을 규정해 주고,危險의 價格을 결정해 주는가 하는 점을 實證的으로 검토한 비교적 최초의 논문이다. 이 論文은 후에 많은 APM의 경험적 연구에 基準이 되었다. 이들은, NYSE와 AMEX에서는 證券價格을 설명하는 5개의 共通要因이 존재하지만, 제4要因과 제5要因은 說明力이 매우 불확실하므로 3개 要因의 중요성만 강조하였다.[16] 그리고 自體分散(own variance)이 期待收益率에 영향을 미친다는 밀러와 숄즈[Miller and Scholes, (1972)]의 연구를 고려하여 롤과 로쓰는 外生變數(exogeneous variable)로서의 自體分散을 이용하여 APM에 적용시킨 결과 APM

16) 구체적인 分析期間과 資料의 범위는 〔표 1〕에 나타나 있음.

은 기각되지 않는다고 하였다. 끝으로 롤과 로쓰는 42개 小集團으로 부터 推定한 APM의 λ_0의 값 중 36개의 λ_0가 集團間에 有意的 差異가 없음을 밝혀내고, APM의 이론적 有用性을 지지하고 있다.

APM에 대한 否定的 結論을 내린 대표적인 논문으로는 레임가눔[Reinganum, (1980, b)]의 것을 들 수 있다. 그는 1963~1978년의 기간중 NYSE와 AMEX의 上場證券을 대상으로 小企業과 大企業 사이의 年間平均收益率을 비교하였다. 즉 소기업의 연간평균수익률은 비단 APM의 危險을 조정한 이후에도 대기업의 것에 비하여 20% 정도가 높게 나타난다고 한다. 이러한 현상은 危險이 3,4,5개 要因에 의하여 측정된다는 APM과는 상관이 없다고 주장하고 있다. 그리고 財務資産의 收益生成模型이 線型이 아닐지도 모르며, 要因로딩이 資産의 收益率과 橫斷面的 관계를 가질 필요도 없다는 것이다. 또 1964~1978년의 기간중에 NYSE와 AMEX의 上場株式에는 이미 裁定利益의 機會(arbitrage profit opportunities)가 존재해 왔을 것이라고 한다. 따라서 企業의 規模가 증권의 수익률에 영향을 미칠 수 있는 것이며, 이러한 점에서는 APM이 적합한 증권의 價格決定模型이 아닐 것이라고 주장한다.

쉬엥큰[Shanken, (1982)]은 APM의 檢定과 그 意味에 대하여 근본적인 문제를 제기하고 있다. 그는 APM이 體系的 危險의 說明力에 있어서는 CAPM 보다 우수하지만, 要因構造가 표본의 재구성에 의하여 操作(manupulation)될 수 있다고 한다. 다시 말해서 要因模型은 증권의 집단을 어떻게 구성하느냐에 따라서 달리 推定될 수 있으므로 要因分析을 方法論으로 하고 있는 APM은 증권의 價格決定模型으로 적합하지 않다는 것이다. 그리고 표본에서 증권의 수를 무한대로 증가시킨다 할지라도 危險과 收益率의 정확한 線型關係가 성립한다는 보장은 없으므로 APM은 檢定自體가 문제를 안고 있다는 것이다.

첸(Chen)은 APT에 관한 연구를 박사학위 논문으로 하였으며(1981), 후에(1983) 이를 보완하여 발표하였다. 그는 1963~1978년의 자료를 이용한 檢定에서 APM은 기각될 수 없을 뿐만 아니라 資産收益率의 橫斷面的 變動을 합리적으로 설명하는 橫型이라고 결론을 내리고 있다. 그리고 레잉가눔[Reinganum, (1980,a)]의 企業規模나 自體分散(own variance)은 이미 要因들에 의하여 설명되고 있으며, 最終期의 收益率도 추가적인 설명력을 제시하지 못하므로 APM은 그대로 좋은 모형이라고 한다.

時系列 資料를 이용하여 APM을 명확하게 檢定하기 위해서는 로스의 假定에 부가하여 네가지의 假定이 더 필요하다고 주장하는 크리지노스키와 토[Kryzanowski and To, (1983)]의 연구가 있다. 이들의 가정은, 첫째 증권수익률의 平均벡타 E와 分散-共分散 매트릭스 V는 期間間 安定的(intertemporary stationary)이며, 둘째, 증권수익률은 하나 이상의 共通要因을 가지는 要因構造(factor structure)에 의하여 설명되며, 세째, 集團間 證券收益率의 기본적인 要因構造는 일치하고, 네째, 敏感度의 係數 β_{ik}는 期間間 安定的이라는 것이다. 이들은 NYSE와 TSE (Toronto Stock Exchange)의 증권을 이용하여 Rao와 Alpha의 要因分析을 적용함으로써 두

가지 偏奇性(biases)를 발견하였다. 즉, 分析期間이 길수록 要因構造(要因의 數)가 단순해 질 뿐만 아니라 제1요인의 重要性이 상대적으로 증가하고, 표본을 구성하는 증권의 數가 많을수록 要因의 數도 증가한다는 것이다. 따라서 이들은 긴 分析期間 동안 小規模의 표본을 이용한 롤과 로쓰의 경험적 연구(1980)에서 적은 數의 要因이 추출된 것은 이 두 偏奇性과 관련이 있다고 한다.

기본스[Gibbons, (1983)]는 APT의 收益率生成過程에서 1953-1971년의 기간중에는 統計的 檢定이 産業要因을 확인할 수 없었을 뿐만 아니라, 要因의 數도 매우 多數로 나타난다고 하였다. 그리고 표본에 債券과 株式을 동시에 포함시키면 追加的인 要因이 나타나고, 이 두 증권을 별도로 한 표본에서는 이 追加的인 要因이 발견되지 않는다고 한다. 그리고 收益率의 共分散 매트릭스가 分析期間을 통하여 非安定的이라도 相關係數 매트릭스는 안정적이라고 주장한다.

롤과 로쓰[Roll and Ross, (1980)]의 APT에 대한 實證硏究의 방법에 대하여 최근에 비판을 가한 것으로는 드림스, 프렌드, 결트킨(Dhrymes, Friend and Gultekin)의 논문을 들 수 있다. 이들의 연구결과를 요약해 보면, 첫째, APT의 추정에서 小集團의 증권에서 찾아낸 要因은 그 의미가 명확하지 않는데, 이는 要因分析의 方法論 자체가 가지고 있는 결점이라는 것이다. 그리고 롤의 理論이 성립되려면 증권수익률이 對稱分布를 이루어야 한다는 것이다. 둘째, 주어진 要因이 과연 증권의 價格決定을 해주는 것인가에 대한 직접적인 檢定을 할 수 없다고 한다. 다시 말해서 危險프리미엄 係數에 대하여 t검정 등의 有意性檢定은 무의미하다는 점이다. 세째, 롤과 로쓰에 의하면 증권시장에는 3 내지 5개의 共通要因이 존재한다고 하는데 이 점이 명확하지 않다고 주장한다. 왜냐하면 표본에서 증권의 수가 증가할수록 要因의 수도 증가하기 때문이다.

조[Cho, (1984)]는 2개 産業의 證券標本에 일치하는 要因로딩을 추정함으로써 APM을 검정하였다. 그는 상이한 두 集團 사이에 동일한 要因을 제한함으로써 要因推定을 가능케 해주는 inter-battery 要因分析을 사용하였다. 분석의 결과는 두 산업집단에 있어서 1日 收益率을 生成케 해주는 5개 내지 6개의 産業間 共通要因이 존재하는 것처럼 나타났고, 이러한 要因은 표본의 규모에 영향을 받고 있는 것으로 풀이되긴 하지만, 그 이유로 인하여 APM이 기각되지는 않는다고 하였다.

要因生成模型을 이용하여 최초로 利子率 危險을 측정코자 한 연구는 결티킨과 로갈스키[Gultekin and Rogalski, (1985)]의 논문을 들 수 있다. 이들은 1960~1970년의 분석기간에서 美國財務省證券의 月收益率을 이용하여 APM을 추정, 검정하였다. 이들의 연구결과는 적어도 2개 要因이 債券收益率에 線型函數를 이룬다는 것이다. 그리고 이들은 다수요인의 APM이 단일요인의 CAPM 보다 債券收益率의 설명력에 있어서 우월하다고 주장하며 APM을 지지하고 있다.

그리고, 현재 筆者가 접한 우리나라의 APM에 대한 實證的 硏究로는 柳寅順(1984)과 池淸등(1984)의 두 論文을 들 수 있다. 이 두 논문은 1977년 1월~1983년 8월 까지의 분석기간중 87개의 증권으로 구성된 표본을 이용하여 APM을 推定, 檢定한 것으로, 양자의 內容은 동일하다. 이 논문은 APM을 우리나라 證券市場에 빨리 적용시킨 實證的 資料이며, 앞으로 우리나라의 市

場에서 APT가 어떻게 작용하고 있는가를 밝히기 위한 분석자들의 경험적 연구에 하나의 참고가 될 것으로 생각된다.

Ⅵ. 結 論

S-L-M의 傳統的인 CAPM과 블랙의 제로베타 2要因 CAPM이 ① 平均-分散基準의 效率性, ② 투자자의 2次效用函數, ③ 진정한 市場포트폴리오의 利用이 不可能한 점과 代用指數의 약점, ④ 單一要因模型의 불충분한 說明力 등 여러가지 限界點을 내포하고 있으므로 이들에 대한 補完的 理論이 계속 요청되어 왔다.

로쓰가 제시한 APT는 CAPM의 이러한 한계점들을 다소 보완한 代替理論이라고 할 수 있다. APT는 均衡資本市場에서 裁定포트폴리오의 개념을 기초로 하여 危險資産의 價格決定模型을 제시한 이론이다. APT에서는, ① 시장포트폴리오 또는 그 代用指數의 이용, ② 平均-分散基準下의 效率性, ③ 투자자의 2次效用函數 등의 무리한 가정을 필요로 하지 않고, 資産 또는 증권의 收益率을 다수의 要因으로 설명하고 있으므로 현재 CAPM보다는 우월한 이론으로 인정받고 있다.

그러나 APM도 많은 학자들의 事後的 檢定을 통하여 理論의 有效性에 대한 지지 또는 비판을 받고 있다. APM의 事後的 有效性에 대한 일반적인 비판을 요약해 보면 다음과 같다.

첫째, 소기업과 대기업 사이에는 收益率의 差異가 발생하는데, 그 이유는 企業의 規模가 주로 영향을 미치는 것 같으며 APM으로는 설명할 수 없다.

둘째, 포트폴리오를 再構成함으로써 要因數의 操作이 가능하다.

세째, 小標本과 大標本 사이에는 要因의 數가 달리 나타난다. 다시 말해서 표본을 구성하는 證券의 數가 증가함에 따라 요인의 수도 증가한다.

네째, 要因의 經濟的 의미를 밝힐 수 없다.

다섯째, 要因은 단순히 수익률의 分散-共分散으로 산출한 통계적 결과이지, 收益生成과는 무관하다.

APT가 일반적으로 CAPM보다 우월한 理論임에는 틀림없다. 그러나, 현재 APM의 事後的 有效性에 대한 많은 비판이 제기되고 있는 것으로 보아 이 理論이 成熟되었다고 단정하기는 어렵다. 따라서, 이 理論이 자본시장의 성격을 더 명확히 설명할 수 있는 이론으로 성숙되기 위해서는 계속적인 補完 및 開發을 필요로 한다고 생각한다.

參 考 文 獻

1. 柳寅順, "CAPM과 APM의 比較硏究," 經營學硏究 第18卷 2號, 1984年 春季號, pp. 39-59.
2. 池淸, 尹桂燮, 李建憙, 沈相晃, 張在敎, 朴昌培, "裁定價格決定模型의 理論的 考察과 實證的 分析," 證券學會誌, 第6輯, 1984, pp. 1-29.

3. Arrow, Kenneth J., "Le Rôle des Valeurs Boursieres pour la Répartition la Meilleur des Risque," International Colloquium on Econometrics, 1952, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953, Which Appeard in English as "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing," Review of Economic Studies, April. 1964.
4. Banz, R.W., "The Relationship Between Return and Market Value of Common Stocks," Journal of Financial Economics, March 1981, pp.3-18.
5. Basu, S., "Investment Performance of Common Stocks in Relation to Their Price-Earnings Rations: A Test of the Efficient Market Hypothesis," Journal of Finance, June 1977, pp. 663-682.
6. Black, Fischer, "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing," Journal of Business, July 1972, pp.444-454.
7. Black, F., M.C. Jensen, and M. Scholes, "The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests," in Studies in the Theory of Capital Markets, M.C. Jensen, ed., New York, Praeger Publishers, 1972.
8. Blum, M., "Betas and Their Regression Tendencies," Journal of Finance, June, 1975.
9. Blume, M. and I. Friend, "A New Look at the Capital Asset Pricing Model," Journal of Finance, March, 1973, pp.19-34.
10. Chen, Nai-fu, "Arbitrage Pricing Theory: Estimation and Applications," Working Paper, Graduate School of Management, UCLA, 1981.
11. Chen, Nai-fu, Arbitrage Asset Pricing: Theory and Evidence, Ph. D. dissertation, UCLA, 1981.
12. Chen, Nai-fu, "Some Empirical Tests of the Theory of Arbitrage Pricing," Journal of Finance, December 1983, pp.1393-1414.
13. Cho, D.C., "On Testing the Arbitrage Theory: Inter-Battery Factor Analysis," Journal of Finance, December1984, pp. 1485-1502.
14. Copeland, Thomas E. and J. Fred Weston, Financial Theory and Corporate Policy, 2nd ed., Chapter 5, "State-Preference Theory," Reading, Mass, Addison-Wesley Publishing Co., 1983.
15. Debreu, G., Theory of Value, New York, John Wiley & Sons, 1959, Chapter 7.
16. Dhrymes, P.J., I. Friend, and N.B. Gultekin, "A Critical Re-examination of the Empirical Evidence on the Arditrage Pricing Theory," Journal of Finance, June 1984, pp.323-346.
17. Fama, Eugene F., "Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments," Journal of Finance, March 1968, pp.29-40.
18. Farrar, D.E., The Investment Decision Under Uncertainty, Englewood Cliffs, N.J.; Prentice-Hall dissetation Series, 1962.
19. Fisher, Irving, The Theory of Interest, New York: The Macmillan Co., 1930.
20. Gehr, Adam, J., "Some Tests of the Arbitrage Pricing Theory," Journal of the Midwest Finance Association, 1975, pp.91-105.
21. Gibbons, M.R., "Empirical Examination of the Return Generating Process of the Arbitrage Pricing Theory, Unpublished Manuscript, Stanford University, Nevember 1980, Revised, July 1983.
22. Gultekin, N.B. and R.J. Rogalski, "Government Bond Returns, Measurement of Interest Risk, and the Arbitrage Pricing Theory," Journal of Finance, March 1985, pp.43-61.

23. Harman, H. H., Modern Factor Analysis, 2nd. ed., Chicago, Ill., University of Chicago Press, 1975.
24. Hirshleifer, J., "Investment Decision Under Uncertainty: Choice of Theoretic Approach," Quarterly Journal of Economics, November 1965, pp. 509-536.
25. Hirshleifer, J., "Investment Decision Under Uncertainty: Applications of State-Preference Approach," Quarterly Journal of Economics, May 1966, pp. 252-277.
26. King, B. F., "Market and Industry Factors in Stock Price Behavior," Journal of Business, January 1966, Supp. pp. 139-190.
27. Kryzanowski, L. and Minh Chau To, "General Factor, Models and the Structure of Security Returns," Journal of Financial and Quantitative Analysis 18, March 1983, pp. 31-52.
28. Lawley, D. N. and A. E. Maxwell, Factor Analysis and A Statistical Method, London, Butterworths Inc., 1983.
29. Linter, John, "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets," Review of Economics and Statistics, February 1965a, pp. 13-37.
30. Lintner, John, "Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification", Journal of Finance, December 1965b, pp. 587-616.
31. Litzenberger, R., and K. Ramaswamy, "The Effect of Personal Taxes and Dividends and Capital Asset Prices: Theory and Empirical Evidence," Journal of Financial Economics, June 1979, pp. 163-195.
32. Markowitz, Harry M., "Portfolio Selection," Journal of Finance, March 1952, pp. 77-91.
33. Markowitz, Harry M., Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment, New York: John Wiley & Sons, 1959.
34. Miller, M. H. and M. Scholes, "Rate of Return in Relation to Risk: A Re-examination of Some Recent Findings," pp. 47-48, in Michael C. Jensen, ed., Studies in the Theory of Capital Markets, New York: Praeger, 1922.
35. Modigliani, F. and G. A. Pogue, "An Introduction to Risk and Returns: Concepts and Evidence," Financial Analysits Journal, March, 1974.
36. Morrison, D. F., Multivariate Statistical Methods, New York, McGraw-Hill Book Co., 1967.
37. Mossin, Jan, "Equilibrium in a Capital Asset Market," Econometrica, October 1966, pp. 768-783.
38. Reinganum, M. R., "Misspecification of Capital Asset Pricing: Empirical Anomolies Based on Earnings Yield and Market Values," Journal of Financial Economics, March 1981a, pp. 19-46.
39. Reiganum, Marc R., "The Arbitrage Pricing Theory: Some Empirical Results," Journal of Finance, May 1981b, pp. 1485-1503.
40. Roll, R., "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests," Journal of Financial Economics, March 1977, pp. 129-176.
41. Roll, Richard and Stephen A. Ross, "An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory," Journal of Finance, December 1980, pp. 1073-1103.
42. Ross, S. A., "Return, Risk and Arbrage," in Friend and Bicksler, eds., Risk and Return in Finance, Health Lexington: New York, 1974.

43. Ross, Stephen A., "The Arbilrage Theory of Capital Asset Pricing," Journal of Economic Theory, December 1976, pp. 341-360.

44. Ross, Stephen A., "Return, Risk, and Arbitrage," In Risk and Return in Finance, Friend, I. and J. L. Bicksler(eds.) Cambridge, Mass.: Ballinger Pub. Co., 1977.

45. Rubinstein, Mark., "A Mean Variance Synthesis of Corporate Financial Theory," Journal of Finance, March, 1973.

46. Sharp, William F., "Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk," Journal of Finance, September 1964, pp. 425-442.

47. Tobin, James, "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk," Review of Economic Studies, February 1958, pp. 65-85.

48. Treynor, Jack L., "Toward a Theory of Market Value of Risky Assets," Unpublished manuscript, 1961.