論 文

Biot數를 考慮한 均一두께의 環狀휜에서의 過渡熱傳達에 關한 硏究

金 光 洙*

A Study on the Transient Heat Transfer in Annular Fin with Uniform Thickness Considering Biot Number

Kwang Soo Kim*

ABSTRACT

The heat diffusion equation for an annular fin is analyzed using Laplace transformations. The fin has a uniform thickness with its edge heat loss and two temperature profiles at the base such as a step change in temperature or heat flux. To obtain the exact solutions for temperature distribution, this paper can detect the eigenvalues which satisfy the roots of transcendental equations in above two cases during inverse Laplace transformations.

The exact solutions for temperature and heat flux are obtained with the infinite series by dimensionless factors.

The solutions are developed for small and large values of times.

These series solutions converge rapidly for large values of time, but slowly for small.

* 正會員, 漢陽大學校 大學院

記 號 說 明

$A = m^2 + S$

$B = 2R_b - R - R_a$

Bi : Biot $Eq.(4c)$

$C = R - R_a$

$D = R_b - R_a$

h : 熱傳達係數

$I_n(\chi)$, $K_n(\chi)$: 修正 Bessel 函數

$J_n(\chi)$, $Y_n(\chi)$: Bessel 函數

k : 熱傳導係數

$m = \left[\dfrac{2h(r_b - r_a)^2}{k\delta} \right]^{\frac{1}{2}}$

q_o =휜 베이스에서의 熱流束

$R = \dfrac{r}{r_b - r_a}$

r : 半徑

T : 溫度

T_o : 베이스 溫度

T_∞ : 周圍流體溫度

t : 時間

α : 熱擴散係數

δ : 휜 두께

γ_1 : $Eq.(8)$

η : 휜 效率 $Eq.(20a)$

$\theta = \dfrac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}$

$\theta^* = \dfrac{T - T_\infty}{q_o / 2\pi k R_a \delta \Omega}$

$\Phi = \int_0^\infty e^{-s\tau} \theta d\tau$

λ : 固有値

$\tau = \dfrac{\alpha t}{(r_b - r_a)^2}$

Ω : 無次元熱流束 $Eq.(14)$

$\overline{\Omega}$: 平均 無次元熱流束 $Eq.(17)$

下添字

a : 內部

b : 外部

n : 整數

1. 序 論

熱傳達을 促進시키기 위하여 周圍流體와의 接觸面積을 增大시켜주는 휜의 解析은 주로 定常狀態에 대하여 硏究가 이루어졌다. Harper 와 Brown[1] 이 最初로 휜에 대하여 解析한 以來, 많은 學者들에 의해 硏究가 發表되어져 왔다.[2-6] 最近에는 溫度에 대하여 민감한 反應을 나타내는 精密部品, 電氣, 電子部品의 溫度制御 等을 設計하는데 있어서 製品의 安定性을 위하여 휜의 過渡熱傳達 特性에 대한 知識까지도 要求되는 傾向이다. 特히 工學的으로 많이 使用되어지고 있는 環狀휜에 대한 過渡熱傳達問題는 Chapman[7] 에 의하여 처음으로 硏究되어졌다. 그는 휜 베이스 溫度가 階段函數일 때 變數分離法으로써 解析하였다.

Aziz[8] 는 휜 베이스 溫度가 調和函數로 變할 때 複素數法으로 持續解를 얻었다. Suryanarayana[9] 는 直線휜에 대하여 Laplace 變換을 使用하여 溫度 또는 熱流束이 階段函數와 調和函數로 變하는 境遇 各各에 대하여 精密解를 구하였으며, 特히 적은 時間 領域에서 收斂速度가 빠른 近似解를 提示하였다. 그러나 Aziz의 持續解는 陰函數型으로 나타나 있기 때문에 使用하는데 不便하다. 또한 Suryanarayana가 구한 적은 時間領域에서 適用될 수 있는 近似解는 Laplace 逆變換 過程에서 指數函數가 冪數($m^2\tau$)가 0.01보다 작다는 假定[9] 아래 指數函數 積分値의 平均値로 代置하여 使用하였기 때문에 어느 特定한 冪數領域 밖에서는 큰 誤差가 發生할 수 있는 要因을 內包하고 있다.

따라서 本 硏究에서는 휜 베이스에서 溫度와 熱流束이 階段函數로 變할 때 Laplace 變換에 의해 各各의 精密解를 구하였고, 적은 時間領域에서 收斂速度가 빠른 近似解도 아울러 구하였다. 特히 Bi 數에 따른 固有値를 위의 두 境遇에 대하여 各各 구하였으므로 環狀휜 周圍에서 對流를 考慮한 過渡熱傳達 解析에 도움을 줄 수있고 아울러 解析過程에서 위의 硏究者[7-9] 들의 問題點을 解決하였다.

2. 理 論 解 析

環狀휜의 形狀은 Fig.1과 같고 휜 베이스에서 溫度 및 熱流束이 階段函數型인 境遇에 대하여 다음과 같은 假定下에 解析한다.

1. 휜의 熱傳達은 一次元이다.(10-13)
2. 휜 材料의 熱物性値는 溫度와 無關하게 一定하다.
3. 휜 베이스에서 溫度와 熱流束은 一定하다.
4. 휜에서의 熱傳達係數와 周圍流體溫度는 一定하다.
5. 휜 內部自體의 熱源은 없다.
6. 휜에서의 輻射熱傳達은 考慮치 않는다.

2.1. 휜 베이스 溫度가 階段函數인 境遇

휜의 熱傳達 方程式은 다음과 같다.

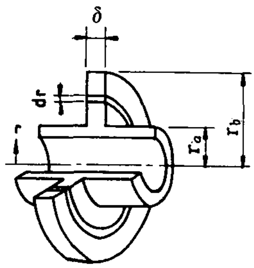

Fig.1 An annular fin with edge heat loss

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)-\frac{2h}{k\delta}(T-T_\infty)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

初期 및 境界條件은

$t=0$ 일때 $T=T_\infty$ ··························(2a)

$r=r_a$ 에서 $T=T_o$ ··························(2b)

$r=r_b$ 에서 $-k\frac{\partial T}{\partial r}=h(T-T_\infty)$ ·········(2c)

이다. 式(1)과 (2)를 無次元化하면 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\theta}{\partial R}\right)-m^2\theta=\frac{\partial\theta}{\partial\tau} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$\tau=0$ 일때 $\theta=1$ ··························(4a)

$R=R_a$ 에서 $\theta=1$ ··························(4b)

$R=R_b$ 에서 $\frac{\partial\theta}{\partial R}=-Bi\,\theta$ ··················(4c)

여기서 $Bi=\dfrac{h(r_b-r_a)}{k}$

式(3)과 (4)를 Laplace 變換하면

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dR}-(m^2+S)\Phi=0 \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

$R=R_a$ 에서 $\Phi=\frac{1}{S}$ ························(6a)

$R=R_b$ 에서 $\frac{d\Phi}{dR}=-Bi\,\Phi$ ···············(6b)

이다. 式(5)와 (6)에 대한 解는

$$\Phi(R,S)=\frac{1}{S}\frac{\{[\sqrt{A}K_1(\sqrt{A}R_b)-BiK_0(\sqrt{A}R_b)]I_0(\sqrt{A}R)+[\sqrt{A}I_1(\sqrt{A}R_b)+BiI_0(\sqrt{A}R_b)]K_o(\sqrt{A}R)\}}{\{I_0(\sqrt{A}R_a)[\sqrt{A}K_1(\sqrt{A}R_b)-BiK_0(\sqrt{A}R_b)]+K_0(\sqrt{A}R_a)[\sqrt{A}I_1(\sqrt{A}R_b)+BiI_0(\sqrt{A}R_b)]\}} \quad \cdots\cdots (7)$$

式(7)을 Laplace 逆變換公式(14)에 代入한 結果는 다음과 같다.

$$\theta(R,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}e^{s\tau}\Phi(S,\tau)\,ds$$

$$=R_{es}(0)+\sum_{n=1}^{\infty}R_{es}-(m^2+\lambda_n^2)$$

$$=\frac{I_0(mR)+\gamma_1K_0(mR)}{I_0(mR_a)+\gamma_1K_0(mR_a)}$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(m^2+\lambda_n^2)\tau}\lambda_n\{\lambda_n[Y_1(\lambda_nR_b)-J_0(\lambda_nR)-J_1(\lambda_nR_b)Y_0(\lambda_nR)]+Bi[J_0(\lambda_nR_b)Y_0(\lambda_nR)-Y_0(\lambda_nR_b)J_0(\lambda_nR)]\}}{(m^2+\lambda_n^2)\{\lambda_n[R_bS_b-R_aS_a]+Bi[R_bT_b-R_aT_a]\}} \quad \cdots\cdots (8)$$

여기서 $\gamma_1=\dfrac{I_1(mR_b)+\frac{Bi}{m}I_0(mR_b)}{K_1(mR_b)-\frac{Bi}{m}K_0(mR_b)}$

$$S_a=J_1(\lambda_nR_a)Y_1(\lambda_nR_b)-Y_1(\lambda_nR_a)J_1(\lambda_nR_b)$$

$$S_b=J_0(\lambda_nR_a)Y_0(\lambda_nR_b)-Y_0(\lambda_nR_a)J_0(\lambda_nR_b)$$

$$T_a=Y_1(\lambda_nR_a)J_0(\lambda_nR_b)-J_1(\lambda_nR_a)Y_0(\lambda_nR_b)$$

$$T_b=J_0(\lambda_nR_a)Y_1(\lambda_nR_b)-Y_0(\lambda_nR_a)J_1(\lambda_nR_b) \quad \cdots\cdots (9)$$

이며 固有値 λ_n 은 다음 transcendental equation의 양의 根들이다.

$$\lambda_n [J_0(\lambda_n R_a) Y_1(\lambda_n R_b) - Y_0(\lambda_n R_a) J_1(\lambda_n R_b)] + Bi [Y_0(\lambda_n R_a) J_0(\lambda_n R_b) - J_0(\lambda_n R_a) Y_0(\lambda_n R_b)] = 0 \cdots (10)$$

式 (8)은 τ가 적을 때에는 매우 느리게 收斂하므로 빠르게 收斂하는 解를 구할 必要가 있다. 따라서 Tauberian 定理[15] 에서 $\tau \to 0$은 $S \to \infty$이므로 K_0, K_1, I_0, I_1 에서 argument가 클 때의 近似式[14] 을 使用하여 式 (7)에 代入하면

$$\Phi(R,S) \simeq \frac{1}{S}\sqrt{\frac{R_a}{R}} \left[\frac{e^{-C\sqrt{A}} + \dfrac{\sqrt{A}-Bi}{\sqrt{A}+Bi} e^{-B\sqrt{A}}}{1 + \dfrac{\sqrt{A}-Bi}{\sqrt{A}+Bi} e^{-2D\sqrt{A}}} \right] \cdots (11)$$

式 (11) 에서 S는 큰 값이므로

$e^{(-2D\sqrt{A})} \ll 1$, $\dfrac{\sqrt{A}-Bi}{\sqrt{A}+Bi} < 1$ 이다. 따라서 式 (11)은 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\Phi(R,S) \simeq \frac{1}{S}\sqrt{\frac{R_a}{R}} [e^{-C\sqrt{A}} + e^{-B\sqrt{A}} - (\frac{2Bi}{\sqrt{A}+Bi}) e^{-B\sqrt{A}}] \cdots (12)$$

附錄을 利用하여 式 (12)를 Laplace 逆變換하면 τ가 적을 境遇의 溫度分布는

$$\theta(R,\tau) \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_a}{R}} \{ e^{mB} erfc(\frac{B}{2\sqrt{\tau}} + m\sqrt{\tau}) + e^{-mB} erfc(\frac{B}{2\sqrt{\tau}} - m\sqrt{\tau}) + e^{mC} erfc(\frac{C}{2\sqrt{\tau}} + m\sqrt{\tau}) + e^{-mC} erfc(\frac{C}{2\sqrt{\tau}} - m\sqrt{\tau}) - \frac{2Bi}{m} [e^{mB} erf(\frac{B}{2\sqrt{\tau}} + m\sqrt{\tau}) - e^{-mB} erf(\frac{B}{2\sqrt{\tau}} - m\sqrt{\tau})] \} \cdots (13)$$

휜 베이스($R=R_a$)에서 無次元熱流束은 다음과 같이 定義한다.

$$\Omega = \frac{q_0}{2\pi k R_a \delta (T_0 - T_\infty)} = -(\frac{\partial \theta}{\partial R})_{R=R_a} \cdots (14)$$

이 때 많은 時間일 때 式 (8), 적은 時間일 때 式 (13)를 利用하여 式 (14)에 代入하면 無次元熱流束을 다음과 같이 구할 수 있다.

많은 時間의 境遇 :

$$\Omega = m \frac{\gamma_1 K_1(mR_a) - I_1(mR_a)}{I_0(mR_a) + \gamma_1 K_0(mR_a)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{(m^2+\lambda_n^2)} \frac{e^{-(m^2+\lambda_n^2)\tau} \{\lambda_n [S_a] + Bi [T_a]\}}{\{\lambda_n [R_b S_b - R_a S_a] + Bi [R_b T_b - R_a T_a]\}} \cdot (15)$$

적은 時間의 境遇 :

$$\Omega = (\frac{1}{4R_a} + \frac{m}{2}) e^{2mD} erfc(\frac{D}{\sqrt{\tau}} + m\sqrt{\tau}) + (\frac{1}{4R_a} - \frac{m}{2}) e^{-2mD} erfc(\frac{D}{\sqrt{\tau}} - m\sqrt{\tau}) - \frac{Bi}{m}(\frac{1}{2R_a} + m) e^{2mD} erf(\frac{D}{\sqrt{\tau}} + m\sqrt{\tau}) + \frac{Bi}{m}(\frac{1}{2R_a} - m) e^{-2mD} erf(\frac{D}{\sqrt{\tau}} - m\sqrt{\tau}) - m\, erfc(m\sqrt{\tau}) + \frac{e^{-m^2\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}(1 - e^{-\frac{D^2}{\tau}}) \cdots (16)$$

또한 任意 時間 τ에 대한 平均 無次元熱流束[17] 은

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Omega d\tau \cdots (17)$$

이므로 式 (15), (16)을 利用하면 $\overline{\Omega}$는 다음과 같이 된다.

많은 時間의 境遇 :

$$\overline{\Omega} = m \frac{\gamma_1 K_1(mR_a) - I_1(mR_a)}{I_0(mR_a) + \gamma_1 K_0(mR_a)} - \frac{2}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 [\lambda_n (S_a) + Bi (T_a)] [e^{-(m^2+\lambda_n^2)\tau} - 1]}{(m^2+\lambda_n^2)^2 [\lambda_n (R_b S_b - R_a S_a) + Bi (R_b T_b - R_a T_a)]} (18)$$

적은 時間의 境遇 :

$$\overline{\Omega} = (\frac{1}{4R_a} + \frac{m}{2}) e^{2mD} [1 - erf(\frac{D}{\sqrt{\tau}} + m\sqrt{\tau})] + (\frac{1}{4R_a} - \frac{m}{2}) e^{-2mD} [1 - erf(\frac{D}{\sqrt{\tau}} - m\sqrt{\tau})] - \frac{Bi}{m}(\frac{1}{2R_a} + m) e^{2mD} erf(\frac{D}{\sqrt{\tau}} + m\sqrt{\tau}) + \frac{Bi}{m}(\frac{1}{2R_a} - m) e^{-2mD} erf(\frac{D}{\sqrt{\tau}} - m\sqrt{\tau}) - m[1 - erf(m\sqrt{\tau})] + \frac{1}{\tau\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{e^{-m^2\tau}}{\sqrt{\tau}} (1 - e^{-\frac{D^2}{\tau}}) d\tau \cdots (19)$$

또한 휜 性能은 휜 效率로써 表示되며

$$\eta = \frac{q_0}{q_{ideal}} \cdots (20a)$$

式 (20a) 에서 q_0는 式 (14)로 表示되며

q_{ideal} 은 휜 全體面積이 휜 베이스 溫度일 때 휜 表面으로부터의 傳熱量이므로 [18]

$$q_{ideal} = 2\pi h(T_0 - T_\infty)[(r_b^2 - r_a^2) + r_b\delta] \quad \cdots\cdots (20b)$$

式(20a), (20b), (14)를 利用하여 휜 效率을 나타낼 수 있다.

2.2. 휜 베이스의 熱流束이 階段函數인 境遇

熱傳達 方程式과 初期 및 境界條件은 2.1.節과 같으며 단지 式(3),(4)에서 θ를 無次元溫度 θ^*로 代置하고 式(4b)의 境界條件을 $R=R_a$에서 $\frac{\partial\theta^*}{\partial R} = -1$ 로 바꾸면 된다.

2.1.節과 같은 方法으로써 구한 過渡溫度分布는

$$\theta^*(R,\tau) = \frac{I_0(mR)+\gamma_1 K_0(mR)}{m[\gamma_1 K_1(mR_a) - I_1(mR_a)]} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(m^2+\lambda_n^2)\tau}\{\lambda_n[Y_1(\lambda_n R_b)J_0(\lambda_n R) - J_1(\lambda_n R_b)Y_0(\lambda_n R)] + Bi[J_0(\lambda_n R_b)Y_0(\lambda_n R) - Y_0(\lambda_n R_b)J_0(\lambda_n R)]\}}{(m^2+\lambda_n^2)[\lambda_n(R_a T_b - R_b T_a) - Bi(R_a S_b - R_b S_a)]} \quad (21)$$

여기서 λ_n 은 다음 transcendental equation의 양의 根들이다.

$$\lambda_n[Y_1(\lambda_n R_a)J_1(\lambda_n R_b) - J_1(\lambda_n R_a)Y_1(\lambda_n R_b)] + Bi[J_1(\lambda_n R_a)Y_0(\lambda_n R_b) - Y_1(\lambda_n R_a)J_0(\lambda_n R_b)] = 0 \quad \cdots\cdots (22)$$

3. 結果 및 討議

3.1. 휜 베이스 溫度가 階段函數인 境遇

Bi 數와 $\frac{r_a}{r_b}$ 의 比가 變化할때 式(10)으로부터 구한 처음 10個의 固有値는 Table 1과 같다.

特히 式(10)에서 $Bi=0$일때의 固有値는 Irey의 結果[10]와 10^{-5}까지 正確히 一致하였다.

解析結果로부터 式(8)의 精密解를 얻기 위하여 80個의 固有値를 찾아, $\frac{r_a}{r_b} = 0.2 \sim 0.8$, $m = 0.01 \sim 5$, $\tau = 0.0001 \sim 10$ 및 無限大 일때 이들에 대한 計算을 하였다.

式(8)의 級數項은 固有値를 順次的으로 代入하여 收斂시켰으며 計算의 正確度를 얻기 위하여 切斷誤差는 10^{-7}까지 制限하였다. 이를 위해 $\tau = 0.0001$일때 50 ~ 80個, $\tau = 0.0001$일때 20 ~ 30個, $\tau = 0.01$일때 10 ~ 15個, $\tau \geq 0.1$일때 1 ~ 5個의 固有値가 所要되었다. 한편 $\tau \leq 0.01$에 대하여는 計算이 간편하고 收斂速度가 빠른 式(13)을 使用하여 計算한 結果, 式(8)의 값에 대한 相對誤差 $\frac{|Eq.(8) - Eq.(13)|}{Eq.(8)}$ 는 1% 미만이었다.

따라서 $\tau \geq 0.01$에서는 15個項을 考慮한式(8), $\tau \leq 0.01$에서는 式(13)을 使用하는것이 경제적이다. 또한 Ω에 關한 式(15)에 대하여는, 式(8)보다도 收斂速度가 훨씬 느려 級數項의 切斷誤差를 10^{-5}까지 制限하였다. 이때 固有値는 80個 程度가 거의 使用되어졌다. Ω를 구하기 위해 過度分布에서와 같이 $\tau \geq 0.01$ 에서는

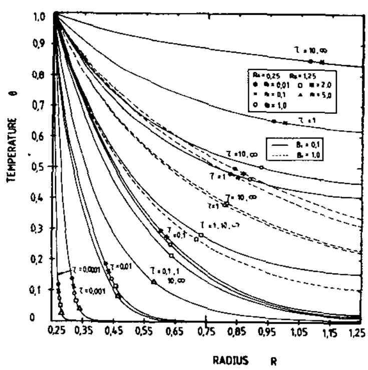

Fig.2 Temperature distribution in an annular fin

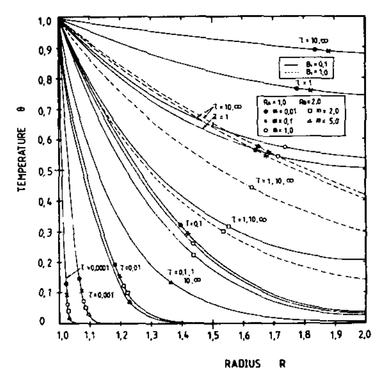

Fig.3 Temperature distribution in an annular fin

式(15), $\tau \leq 0.01$에서는 式(16)을 使用하면 計算을 좀더 간편하고 빠르게 구할 수가 있다. 式(8), (13)을 利用하여 $\frac{r_a}{r_b}=0.2,\ 0.5$ 일때 R에 대한 θ를 τ, Bi 數, m에 따라 나타내면 Fig.2,3과 같다.

이들 結果로부터 $\tau \leq 0.001$에서는 $\frac{r_a}{r_b}$, Bi 數, m에 無關한 一定한 θ를 얻었다.

또한 $\tau \geq 0.01$에서는 m과 Bi 數가 적을수록, τ 및 $\frac{r_a}{r_b}$의 比가 클수록 높은 θ를 얻을 수 있었다. 이와같은 傾向은 $\tau \leq 0.001$일때는 時間이 너무 적어 m 및 Bi 數에 따른 영향이 전혀 미치지 못하기 때문이다. $\tau \geq 0.01$일때 m이 적고 τ가 클수록 휜의 길이는 짧고 τ는 크게되어 R에 따라 높은 θ를 얻게 된다.

또한 $\frac{r_a}{r_b}$의 比가 클때 휜의 길이는 짧아지게 되어 결국 휜 베이스에서의 溫度가 가급적 빨리 확산되기 때문이다. 휜에서 重要時되는 定常狀態에 도달하는 時間은 式(8)에서 定常狀態의 1% 範圍內에 도달하는데 所要되는 最小 無次元 時間으로 式 (8)을 利用하면

$$\tau \geq \frac{1}{m^2+\lambda_1^2}\, l_n \left| \frac{200\lambda_1{}^2[I_0(mR_a)+\gamma_1 K_0(mR_a)]}{(m^2+\lambda_1^2)[I_0(mR_b)+\gamma_1 K_0(mR_b)]} \right.$$
$$\left. \frac{[Y_1(\lambda_1 R_b)J_0(\lambda_1 R_b)-J_1(\lambda_1 R_b)Y_0(\lambda_1 R_b)]}{[\lambda_n(R_b S_b - R_a S_a)+Bi(R_b T_b - R_a T_a)} \right|_{\lambda_n=\lambda_1} \cdots\cdots\cdots(23)$$

式 (23)으로부터 Bi 數, $\frac{r_a}{r_b}$ 의 比, m값에 대한 最小 無次元時間을 Table 2에 나타내었다. Table 2로부터 Bi 數가 다른 境遇에서도, 여러가지 $\frac{r_a}{r_b}$의 比에 대하여 m이 작은 값(짧은 휜)에서 즉 $m=0.01$에서 0.1로 증가할때 最小 無次元時間은 거의 一定한 것을 알 수 있다.

그러나 $m \geq 2$일때 m의 增加에 따라 τ가 減少하므로 定常狀態에 도달하는 實際 時間은 m의 增加에 비하여 相對的으로 민감하지 않기 때문에 $m \geq 2$일때는 無限휜으로 간주할 수 있다.[10] 이와같은 傾向은 $Bi=0$에서 直線휜의 結果와 一致한다.[9] 또한 m의 값이 클 境遇, Bi 數와 $\frac{r_a}{r_b}$의 比값에 關係없이 τ가 一定한 것은 無限휜이기 때문이다. 그리고 휜의 길이가 길수록 最小 無次元時間이 增加함을 알 수 있다. Fig.4와 5는 $\frac{r_a}{r_b}=0.2,\ 0.5$일때 τ에 대한 Ω를 各各 나타낸 것이다.

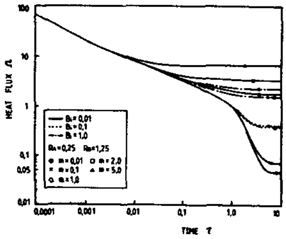

Fig.4 Base heat flux

이들 結果로부터 $\tau \leq 0.001$일때 Ω는 Bi 數와 m값의 變化에 따른 영향을 전혀 받고 있지 않음을 알 수 있다.

또한 적은 時間일때의 式 (16)은 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$\Omega = -\left(\frac{1}{2R_a}+m\right)+\left(\frac{1}{2R_a}-m\right)e^{-4mD} - \frac{m^2}{Bi}e^{-2mD} + \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\, e^{-2mD} \cdots\cdots\cdots(24)$$

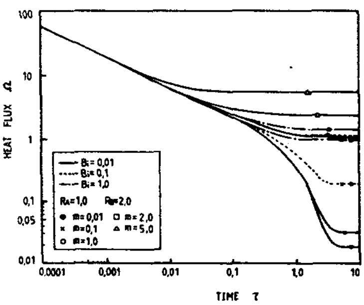

Fig.5 Base heat flux

實際로 $R_b - R_a = 1$, $R_a = 0.25 \sim 4.0$, $m = 0.01 \sim 10$, $Bi = 0.01 \sim 10$이므로 이들값들을 式(24)에 의해 計算하여도 위와같은 結論을 얻을 수 있다. $\tau \geq 0.01$일때는 Bi 數와 m값 增加에 따라 Ω가 높아짐을 알 수 있다. 반면 동일한 Bi 數, m의값, τ에서는 $\frac{r_a}{r_b}$의 比가 클수록 Ω는 오히려 減少하였다. 위와같은 傾向은 Fig.3 4와는 反對되는 現象으로 그理由는 式 (14)에

起因하기 때문이다. 또한 定常狀態에 도달하는 時間은 Ω가 一定한 時間 卽 $\frac{d\Omega}{d\tau}=0$이 되는 時間이다. Fig.4.5에 의하면 이 時間까지 過渡期의 Ω는 定常狀態보다도 훨씬 큰것을 알 수 있다. 이는 휜 自體가 溫度를 上昇시키는데 消耗하는 熱과 휜 表面에서 發生되는 對流熱損失의 合이 定常狀態에서 發生되는 對流熱損失보다 크기 때문이다.[19]

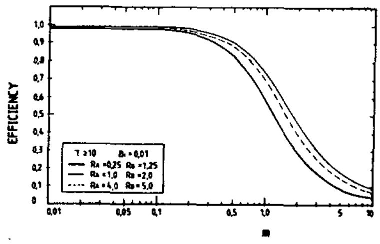

Fig.6 Fin efficiency

Fig.6은 $\tau \geq 10$, $Bi=0.01$, $\frac{r_a}{r_b}=0.2, 0.5, 0.8$일때 m에 대한 η와의 關係를 나타낸 것이다. 이로부터 $\frac{r_a}{r_b}$의 比가 클수록 η는 增加하였다. 이와같은 傾向은 Fig.4,5에서와 같이 $\tau \geq 10$, $Bi=0.01$일때 $\frac{r_a}{r_b}$의 比가 클수록 Ω가 減少하였으나 式(20a)에 의해 半徑比가 클수록 η가 上昇함을 알 수 있다. 特히 $\tau \geq 10$일때 θ는 定常狀態와 같기 때문에 Fig.6의 $\tau \geq 10$, $Bi=0.01$일때의 m 및 $\frac{r_a}{r_b}$의 變化에 따른 η는 Bi數를 考慮치 않는 定常狀態에 대한 Keller와 Somers의 結果[5]와도 一致하였다.

2.2. 휜 베이스의 熱流束이 階段函數인 境遇

Bi數와 $\frac{r_a}{r_b}$의 比가 變化할때 式 (22)로부터 구한 처음 10個의 固有値는 Table 3과 같다.

2.1. 節에서와 같은 條件下에 切斷誤差를 10^{-7}까지 制限시켜 이들에 대한 값들을 各各 計算하였다. 이때 τ가 增加함에 따라 2.1. 節에서와 같은 固有値項들이 所要되어졌다. 式 (21)을 利用하여 Fig.7은 $Bi=0.1$, $m=0.1$일때 R에 대한 θ^*를 $\frac{r_a}{r_b}=0.2, 0.5$에 대하여 나타낸 것이다. 그리고 이들에 대한 計算結果로써 τ에 대한 無次元溫度分布를 m과 Bi數에 따라

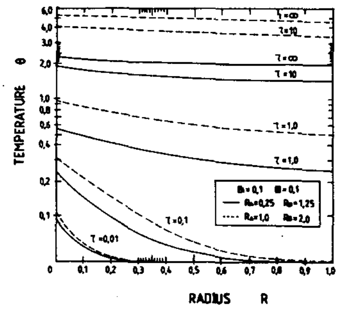

Fig.7 temperature distributions in an annular fin with base subjected to a step change in heat flux

Fig.8,9에 各各 나타내었다. 이들의 結果, 휜 베이스 溫度가 階段函數 일 때와 같이 τ 및 $\frac{r_a}{r_b}$의 比가 클수록, m과 Bi數가 적을수록 R에 따라 높은 θ^*를 얻을 수 있었다. 이와같은 傾向은 2.1.節과 같다. 또한 휜에서 重要時되는 定常狀態에 도달하는 時間을 알아보기 위하여 式 (21)의 無次元溫度가 定常狀態의 1% 範圍內에 所要되는 最小 無次元時間은 式 (21)을 利用하면

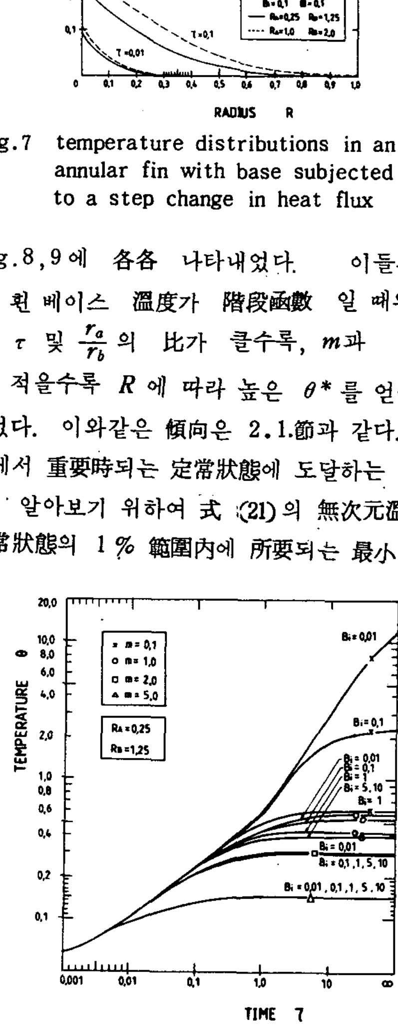

Fig.8 temperature at the base of annular fin with base subjected to a step change in heat flux

$$\tau \geq \frac{1}{m^2+\lambda_1^2}\, ln \left| \frac{200m\lambda_1[\gamma_1 K_1(mR_a)-I_1(mR_a)]}{(m^2+\lambda_1^2)[I_0(mR_b)+\gamma_1 K_0(mR_b)]} \frac{[Y_1(\lambda_1 R_b)J_0(\lambda_1 R_b)-J_1(\lambda_1 R_b)Y_0(\lambda_1 R_b)]}{[\lambda_n(R_aT_b-R_bT_a)-Bi(R_aS_b-R_bS_a)]\,\lambda_n=\lambda_1} \right| \quad \cdots\cdots (25)$$

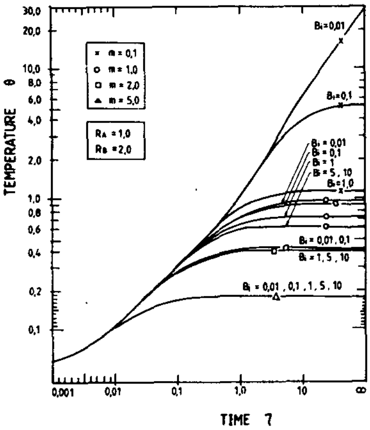

Fig.9 temperature at the base of annular fin with base subjected to a step change in heat flux

式 (25)로부터 定常狀態에 도달하는데 所要되는 最小 無次元時間을 Bi 數, $\frac{r_a}{r_b}$의 比와 m값에 대하여 Table 4에 나타내었다. 이 結果 最小 無次元時間은 2.1. 節 보다도 Bi 數, m값, $\frac{r_a}{r_b}$의 比 變化에 크게 영향을 받고 있는 것으로 나타났다. 特히 $m \geq 1.0$에서는 m의 增加에 따라 τ가 현저하게 減少하였고 휜의 길이가 짧을수록 最小 無次元時間이 增加하였다. m의 값이 클 境遇는 2.1. 節과 같이 Bi 數와 $\frac{r_a}{r_b}$의 比에 無關하게 τ가 一定하였다.

4. 結　論

本 硏究를 通하여 얻은 結論은 다음과 같다.

1. 휜 베이스 溫度 및 휜 베이스의 熱流束이 階段函數일때, Laplace 變換에 의해 Bi 數를 考慮한 半徑比에 대한 固有値를 各各 찾아내어 이에대한 精密解를 구하였다. 特히 휜 베이스 溫度가 階段函數일때, 時間이 적은 領域에서 收斂速度가 빠른 近似解를 얻을 수 있었다.

2. 휜 베이스 溫度가 階段函數일때, $\tau \leq 0.001$에서는 $\frac{r_a}{r_b}$의 比, Bi 數, m값에 關係없이 一定한 θ를 얻었고 $\tau \geq 0.01$에서는 m과 Bi 數가 적을수록, τ 및 $\frac{r_a}{r_b}$의 比가 클수록 높은 θ를 나타냈다. 또한 $\tau \geq 10$에서는 定常狀態와 同一한 θ를 얻을 수 있었다. 그리고 Ω에 대하여는, $\tau \geq 0.01$일때는 Bi 數와 m값 增加에 따라 Ω가 높아졌으나 同一한 Bi 數, m의값, τ에서는 $\frac{r_a}{r_b}$의 比가 클수록 Ω는 오히려 減少하였다.

3. 휜 베이스 溫度가 階段函數일때, $m \leq 5.0$ 以內의 짧은 環狀휜에서 定常狀態에 도달하는 最小 無次元時間은 휜의 길이가 짧을수록, Bi 數가 클수록 단축되었다.

4. 휜 베이스의 熱流束이 階段函數일때, m과 Bi 數가 적을수록, τ 및 $\frac{r_a}{r_b}$의 比가 클수록 높은 θ^*를 얻었다. 定常狀態에 도달하는 最小 無次元時間은 휜의길이가 길수록, Bi 數가 클수록 最小 無次元時間은 단축되었다.

附　　錄

Laplace 逆變換 $L^{-1}[\frac{1}{S}F(s)] = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ 에서

$$L^{-1}\frac{1}{S}\left[\frac{2Bi}{\sqrt{m^2+s}+Bi}\,e^{-f(R)\sqrt{m^2+s}}\right] = \int_0^\tau e^{-m^2 t}$$

$$L^{-1}\left[\frac{2Bi}{\sqrt{s}+Bi}\,e^{-f(R)\sqrt{s}}\right]dt \qquad (A-1)$$

Laplace 逆變換表로[14] 부터

$$L^{-1}\left[\frac{2Bi}{\sqrt{s}+Bi}\,e^{-f(R)\sqrt{s}}\right] = 2Bi\left[\left(\frac{1}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{f(R)^2}{4t}}\right.$$

$$\left.-Bi\,e^{Bif(R)+Bi^2 t}\,erfc\left(\frac{f(R)}{2\sqrt{t}}+Bi\sqrt{t}\right)\right] \qquad (A-2)$$

式(A－2)를 式(A－1)에 代入하면

$$\frac{2Bi}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-m^2 t}\,\frac{e^{-\frac{f(R)^2}{4t}}}{\sqrt{t}}\,dt - 2Bi^2\int_0^\tau e^{-m^2 t}$$

$$e^{Bif(R)+Bi^2 t}\,erfc\left(\frac{f(R)}{2\sqrt{t}}+Bi\sqrt{t}\right)dt \qquad (A-3)$$

이 된다. 式(A－3)의 第一項에서 $y=\sqrt{t}$로 置換하면

第一項은

$$\frac{4Bi}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-m^2 y^2-\frac{f(R)^2}{4y^2}}\,dy \qquad (A-4)$$

積分表[16]을 利用하면 式(A－4)는

$$\frac{Bi}{m}\left[e^{mf(R)}\,erf\left(m\sqrt{\tau}+\frac{f(R)}{2\sqrt{\tau}}\right)+e^{-mf(R)}\right.$$

$$erf(m\sqrt{\tau}-\frac{f(R)}{2\sqrt{\tau}})] \qquad (A-5)$$

式 (A-3)의 第二項에서 時間 t가 매우 적은 境遇에는 修正 誤差 函數가 零이 되어 積分値가 存在치 않게 된다.

따라서 式 (A-1)은

$$L^{-1}\frac{1}{S}[\frac{2Bi}{\sqrt{m^2+s}+Bi}e^{-f(R)\sqrt{m^2+s}}]=\frac{Bi}{m}[e^{mf(R)}$$

$$erf(m\sqrt{\tau}+\frac{f(R)}{2\sqrt{\tau}})+e^{-mf(R)}\ erf(m\sqrt{\tau}-\frac{f(R)}{2\sqrt{\tau}})]$$

이 된다. (A-6)

參 考 文 獻

1. W.B. Harper and D.R. Brown, "Mathematical Equations for Heat Conduction in the Fins of Air Cooled Engines", NACA Report No. 158, pp. 679-708, 1922.
2. M. Jakob, Heat Transfer, Vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1949.
3. P.J. Schneider, Conduction Heat Transfer, Addison Wesley Publishing Company, Mass., 1955.
4. K.A. Gardner, "Efficiency of Extended Surfaces", Trans. ASME, Vol., 67, pp. 621-631, 1945.
5. H.H. Keller and E.V. Somers, "Heat Transfer from an Annular Fin of Constant Thickness", Journal of Heat Transfer, ASME, Vol. 81, pp. 151-156, 1959.
6. Melivin Avrami and J.B. Little, "Diffusion of Heat Through a Rectangular Bar and the Cooling and Insulating Effects of Fins, 1, the Steady State", J. Applied Physics, Vol. 13, pp. 255-264, 1942.
7. A.J. Chapman, "Transient Heat Conduction in Annular Fins of Uniform Thickness", Chem. Eng. Symposium Series, Vol. 55, No. 29, pp. 195-201, 1959.
8. A. Aziz, "Periodic Heat Transfer in Annular Fins", J. Heat Transfer, ASME, Vol. 97, pp. 302-303, 1975.
9. N.V. Suryanarayana, "Transient Response of Straight Fins", J. Heat Transfer, ASME, Vol. 95, pp. 417-433, 1973.
10. R.K. Irey, "Errors in the One-Dimensional Fin Solution", J. Heat Transfer, ASME, Vol. 90, pp. 175-176, 1968.
11. Levitsky, Myron, "The Criterion for Validity of the Fin Approximation", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 10, pp. 1960-1963. 1972.
12. WAH Lau and C.W. TAN, "Errors in One-Dimensional Heat Transfer Analysis in Straight and Annular Fins", J. Heat Transfer, ASME, Vol. 95, pp. 549-551, 1973.
13. J. Crank and I.B. Parker, "Approximate Method for Two Dimensional Problems in Heat Flows", Quart. J. Mech. & Apple. Math. Vol. 19, Part 2, pp. 167-181, 1966.
14. V.S. Arpaci, Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley, pp.

141, 346, 390-399, 1966.

15. I.N. Sneddon, The Use of Integral Transformation, McGraw-Hill, pp. 184-190, 1972.
16. M. Abramowitz and I.A. Stequn, Handbook of Mathematical Functions, Dever, New York, pp. 304, 1965.
17. J.W. YANG, "Periodic Heat Transfer in Straight Fins", J. Heat Transfer, ASME, Vol. 94, pp. 310-314, 1972.
18. D.Q. Kern and A.D. Kraus, Extended Surface Heat Transfer, McGraw-Hill, pp. 102-111, 645-647, 1972.
19. 손병진, 박희용, 이흥주, 이관수, "均一두께의 圓筒핀에서 過渡溫度分布에 關한 研究", 大韓機械學會論文集, 第6券, 第3號, pp.247-255, 1982.

Table 1. The first ten roots of *Eq.*(10)

Bi. No.	r_a/r_b \ λ_n	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
	0.2	1.30769	4.62750	7.80289	10.95903	14.10873	17.25548	20.40065	23.54487	26.68847	29.83165
	0.4	1.36885	4.64807	7.81545	10.96806	14.11577	17.26125	20.40554	23.54911	26.69221	29.83499
Bi=0.01	0.5	1.42118	4.66479	7.82550	10.97525	14.12136	17.26583	20.40941	23.55246	26.69517	29.83765
	0.6	1.50756	4.69190	7.84171	10.98682	14.13036	17.27319	20.41564	23.55786	26.69993	29.84190
	0.8	1.22562	4.57914	7.76971	10.93401	14.08874	17.23887	20.38647	23.53250	26.67751	29.82181
	0.2	1.22562	4.57914	7.76971	10.93401	14.08874	17.23887	20.38647	23.53250	26.67751	29.82181
	0.4	1.38128	4.64711	7.81446	10.96726	14.11511	17.26070	20.40507	23.54869	26.69184	29.83466
Bi = 0.1	0.5	1.43810	4.66756	7.82699	10.97627	14.12215	17.26647	20.40995	23.55293	26.69558	29.83801
	0.6	1.48677	4.68416	7.83702	10.98345	14.12774	17.27104	20.41382	23.55629	26.69854	29.84066
	0.8	1.56717	4.71108	7.85319	10.99501	14.13673	17.27840	20.42005	23.56168	26.70330	29.84492
	0.2	1.78101	4.77088	7.88465	11.01603	14.15248	17.29101	20.43057	23.57072	26.71123	29.85198
	0.4	1.88041	4.83432	7.92822	11.04880	14.17863	17.31271	20.44909	23.58686	26.72552	29.86481
Bi= 1.0	0.5	1.91528	4.85321	7.94038	11.05768	14.18560	17.31844	20.45395	23.59108	26.72925	29.86814
	0.6	1.94456	4.86846	7.95009	11.06474	14.19113	17.32299	20.45781	23.59443	26.73221	29.87079
	0.8	1.99176	4.89299	7.96570	11.07609	14.20002	17.33028	20.46400	23.59980	26.73695	29.87504

Table 2. Minimum dimensionless time required to reach within relative error 1 % of steady state temperature for different values of Bi, m and r_a/r_b

Bi.No.	r_a/r_b \ m	0.01	0.1	1.0	2.0	5.0	10.0
	0.2	3.64594	3.61910	2.10223	0.96426	0.25397	0.10264
	0.4	2.79182	2.77631	1.79697	0.90063	0.25072	0.10224
Bi = 0.01	0.5	2.55630	2.54337	1.69990	0.87791	0.24955	0.10212
	0.6	2.37844	2.36730	1.62221	0.85872	0.24853	0.10203
	0.8	2.12434	2.11554	1.50402	0.82759	0.24682	0.10188
	0.2	3.16551	3.14542	1.93912	0.93195	0.25255	0.10253
	0.4	2.51234	2.49987	1.68113	0.87344	0.24937	0.10213
Bi = 0.1	0.5	2.32511	2.31449	1.59817	0.85262	0.24823	0.10202
	0.6	2.18151	2.17221	1.53141	0.83504	0.24725	0.10192
	0.8	1.97289	1.96535	1.42916	0.80656	0.24560	0.10177
	0.2	1.54921	1.54468	1.20004	0.73497	0.24119	0.10145
	0.4	1.39866	1.39501	1.11039	0.70300	0.23856	0.10107
Bi = 1.0	0.5	1.35138	1.34799	1.08133	0.69221	0.23768	0.10096
	0.6	1.31364	1.31045	1.05780	0.68330	0.23694	0.10087
	0.8	1.25625	1.25335	1.02143	0.66919	0.23575	0.10073

Table 3. The first ten roots of $Eq.(23)$

$Bi.No.$	r_a/r_b \ λ_n	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
$Bi=0.01$	0.2	0.12891	3.39138	6.44580	9.54230	12.65762	15.78227	18.91212	22.04513	25.18018	28.31662
	0.4	0.11934	3.23769	6.33620	9.46093	12.59371	15.72992	18.86790	22.00689	25.14653	28.28660
	0.5	0.11529	3.19963	6.31392	9.44552	12.58200	15.72049	18.86001	22.00011	25.14059	28.28131
	0.6	0.11162	3.17514	6.30049	9.43639	12.57510	15.71495	18.85538	21.99615	25.13711	28.27822
	0.8	0.10523	3.15067	6.28775	9.42783	12.56866	15.70979	18.85108	21.99246	25.13389	28.27535
$Bi=0.1$	0.2	0.40240	3.41631	6.45940	9.55160	12.66467	15.78794	18.91686	22.04920	25.18374	28.31980
	0.4	0.37213	3.26436	6.35022	9.47038	12.60083	15.73563	18.87266	22.01098	25.15010	28.28978
	0.5	0.35938	3.22690	6.32805	9.45501	12.58913	15.72621	18.86477	22.00420	25.14417	28.28449
	0.6	0.34788	3.20286	6.31469	9.44590	12.58224	15.72067	18.86015	22.00023	25.14069	28.28140
	0.8	0.32790	3.17888	6.30202	9.43736	12.57581	15.71552	18.85585	21.99655	25.13747	28.27853
$Bi=1.0$	0.2	1.12693	3.64928	6.59255	9.64369	12.73477	15.84444	18.96414	22.08982	25.21935	28.35149
	0.4	1.03402	3.50980	6.48705	9.56387	12.67159	15.79248	18.92015	22.05174	25.18580	28.32153
	0.5	0.99642	3.47619	6.46569	9.54878	12.66001	15.78312	18.91230	22.04499	25.17988	28.31626
	0.6	0.96317	3.45462	6.45280	9.53982	12.65319	15.77762	18.90770	22.04103	25.17642	28.31317
	0.8	0.90675	3.43246	6.44044	9.53138	12.64680	15.77249	18.90341	22.03735	25.17320	28.31031

Table 4. Minimum dimensionless time required to reach within relative error 1 % of steady state temperature for different values of Bi, m and r_a/r_b

$Bi.No.$	r_a/r_b \ m	0.01	0.1	1.0	2.0	5.0	10.0
$Bi = 0.01$	0.2	275.60522	173.15738	4.67658	1.28336	0.28657	0.11410
	0.4	321.27827	190.13423	4.69607	1.29130	0.28994	0.11536
	0.5	344.07153	197.88864	4.70264	1.29343	0.29077	0.11565
	0.6	366.83689	205.20899	4.70789	1.29489	0.29131	0.11584
	0.8	412.28612	218.68627	4.71565	1.29651	0.29185	0.11603
$Bi = 0.1$	0.2	28.57165	26.93503	4.10933	1.24276	0.28529	0.11397
	0.4	33.39015	31.17441	4.19958	1.25609	0.28874	0.11521
	0.5	35.78960	33.25487	4.23520	1.26039	0.28960	0.11550
	0.6	38.18343	35.31061	4.26622	1.26374	0.29016	0.11568
	0.8	42.95640	39.35148	4.31774	1.26855	0.29075	0.11586
$Bi = 1.0$	0.2	3.76749	3.73941	2.16708	1.00397	0.27498	0.11263
	0.4	4.45532	4.41578	2.37047	1.04404	0.27897	0.11372
	0.5	4.78809	4.74227	2.45724	1.05917	0.28005	0.11396
	0.6	5.11472	5.06228	2.53624	1.07210	0.28082	0.11410
	0.8	5.75241	5.68575	2.67533	1.09316	0.28180	0.11429