有限要素法에 의한 타이어의 變形解析

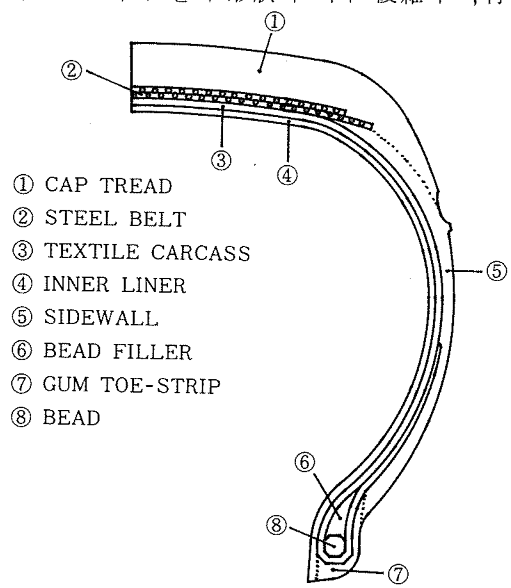
三陽타이어(株) 研究所
鄭 尙 禹

《抄 録》有限要素法에 의하여 軸對稱 静的荷重을 받는 乘用車用 래디알 타이어의 變形을 解析하였다. 要素는 8節點 parabolic-isoparametric 要素를 使用하였으며 타이어를 構成하는 cord-rubber 複合体를 線形直交性을 갖는다고 가정하고, 그 複合体의 物性値를 간단한 式으로 表示하여 適用하였다.
空氣壓으로 인해 變形된 모양 및 cord에 作用하는 張力을 計算해 냈으며 이 變形된 모양을 plaster cast를 이용하여 측정한 實驗値와 比較하였다. 또 타이어를 構成하는 構造가 달라지면 空氣壓으로 因하여 變形狀態가 어떻게 變化하는가를 計算해 보았다. 이 結果로 belt의 cord数가 감소하거나 belt cord angle이 增加하면 타이어 外径이 增加함을 알 수 있다.

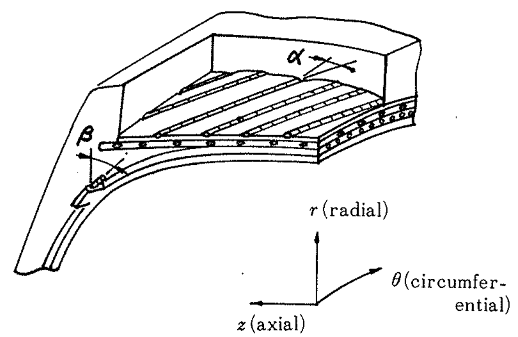
I. 緖 論

타이어의 新開發 및 旣存製品의 改善은 經驗에 의한 시행착오를 거쳐 진행되어 왔다. 왜냐하면 타이어는 다른 構造物과는 달리 그림 1, 2에서 보는 바와 같이 形狀이 매우 複雜하고, 材質特性이 각기 다른 複合構造物이며, 특히 매우 유연한 고무에 steel 및 polyester cord 등과 같은 高強度의 재질이 複合되어 있기 때문에 대부분의 타이어 研究家들은 많은 요인들을 單純化하여 간단한 解析 모델을 設定하여 理論解析을 수행해 왔고[1] 最近에는 타이어에 有限要素法(Finite Element Method: F.E.M.)을 適用하여 괄목할만한 效果를 보고 있다.[2,3]

그러나 國內에서는 有限要素法에 의한 타이어 研究가 아직은 미흡한 狀態이므로 本論文에서는 有限要素法에 의한 타이어의 基本的인 解析



〔그림 1〕 Tire cross-section



〔그림 2〕 Global coordinate-system

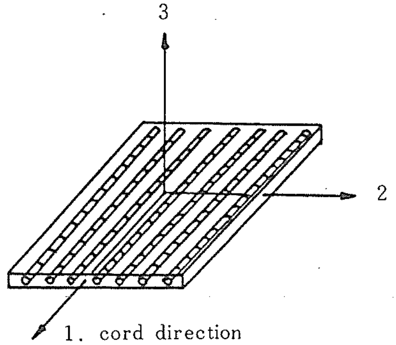
모델을 우선적으로 樹立하는데 目的을 두었으며, 타이어를 構成하는 構造가 바뀜에 따라 空氣壓으로 因하여 나타나는 變形狀態가 어떻게 달라지는가를 예측하였고, cord에 걸리는 荷重을 계산하였다.

타이어를 構成하는 고무는 等方性線形(isotropic linear)으로 취급하였고, cord와 고무의 複合体는 orthotropic material로 간주하였다. 要素는 8節點 parabolic isoparametric 要素를 使用하였으며, 이에 관련된 program은 E. Hinton[4]의 plane stress program을 軸對稱[5]을 考慮하여 修正해서 使用하였다.

有限要素法을 타이어에 適用함으로써 직접 타이어를 만들어 보지 않더라도 空氣壓으로 因한 變形狀態를 定量的으로 評價하여 타이어의 몰드 設計에 많은 도움을 줄 수 있으며 시행착오에 의한 반복 횟수를 最小限으로 줄임으로써 많은 時間과 經費를 節減할 수 있을 것이다.

Ⅱ. CORD-RUBBER 複合体의 弾性係数

그림 3에서와 같이 cord가 고무에 等間隔으로 배치되어 있는 경우에 cord 方向의 縱弾性係数 E_1과 그에 垂直方向인 縱弾性係数 E_2는 서로 다르고, 横弾性係数 G_{12}와 poisson比 ν 역시 方向에 따라 다르므로, cord-rubber 複合構造体의 物性値들을 cord方向 및 그에 垂直한



〔그림 3〕 Unidirectional calendered ply of cord and rubber predicting specially orthotropic (1, 2).

方向으로 表示할 수 있다.[6]

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E_c V_c + E_{ru}(1-V_c) \\
E_2 &= \{4E_{ru}(1-V_c)[E_c V_c + E_{ru}(1-V_c)]\}/ \\
&\quad [3E_c V_c + 4E_{ru}(1-V_c)] \\
G_{12} &= G_{ru}(1-V_c) \\
\nu_{12} &= 0.5 \\
\nu_{21} &= \nu_{12} E_2/E_1
\end{aligned} \tag{1}
$$

여기서, E_c, E_{ru} = 各各 cord와 고무의 縱弾性係数

G_{ru} = 고무의 横弾性係数

V_c = cord가 차지하는 体積比

ν_{ij} = i方向의 引張에 의한 j方向의 poisson比

타이어를 構成하는 cord 및 고무의 特性을 살펴보면, 表 1에서 보는 바와 같이 縱弾性係数는 cord가 고무에 比하여 매우 크므로 cord 方向의 弾性係数에서는 고무의 縱弾性係数를 무시하고, cord와 直角된 方向의 縱弾性係数에서는 cord의 体積比를 무시하여 (1)을 다시 簡略化하면 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E_c V_c \\
E_2 &= 4E_{ru}/3 \\
G_{12} &= G_{ru} \\
\nu_{12} &= 0.5 \\
\nu_{21} &= \nu_{12} E_2/E_1
\end{aligned} \tag{2}
$$

그런데 그림2에서 보는 바와 같이 타이어의 textile carcass 및 steel belt는 基準座標軸에 대해 cord方向이 임의로 傾斜를 이루고 있기 때문에 基準座標軸(r, θ, z)으로의 等價弾性係数를 求하기 위해 複合構造物의 弾性係数 및 poisson比를 傾斜진 角度의 函数로 가정했다.

그림 2에서 cord方向이 圓周方向과 이루는 角을 α, 半径方向과 이루는 角을 β라 하고, 半径方向, 軸方向, 圓周方向의 縱弾性係数를 各各 E_r, E_z, E_θ라고 하면 이들은 E_1, E_2 사이의 값을 가지므로

$$E_2 \leq E_r,\ E_z,\ E_\theta \leq E_1 \tag{3}$$

로 된다.

E_r, E_z, E_θ를 傾斜角 α, β의 函数로 表示하면,

〈表 1〉 Body and Belt Properties

	Body Ply	Belt Ply
Cord		
Material	polyester	steel
Construction	1000 / 2	5×1×0.25 mm
Ends / dm	102	79
Young's modulus, E_c (kg / cm²)	40.51×10^3	738.8×10^3
Rubber		
Young's modulus, E_{ru} (kg / cm²)	56.1	102.0
Ply		
Thickness, (mm)	1.78	1.45
Volume fraction	0.149	0.135
Engineering Constants		
E_1 (kg / cm²)	6.04×10^3	99.74×10^3
E_2 (kg / cm²)	74.8	136.0
G_{12} (kg / cm²)	18.83	34.23
ν_{12}	0.5	0.5

〈表 2〉 Typical Rubber Properties

Rubber	Young 率 (kg / cm²)	Poisson 比
Cap Tread	52.0	0.49
Innerliner	48.0	0.49
Sidewall	63.0	0.49
Beadfiller	96.8	0.49
Gum toe strip	95.6	0.49

$$E_r=E_2+(E_1-E_2)\cdot f_r(\alpha,\ \beta)$$
$$E_z=E_2+(E_1-E_2)\cdot f_z(\alpha,\ \beta) \qquad (4)$$
$$E_\theta=E_2+(E_1-E_2)\cdot f_\theta(\alpha,\ \beta)$$

로 된다.

여기서 f_r, f_z, f_θ는 α, β의 函数이며, 크기는 0과 1사이의 값을 갖는다.

$$0\leqq f_r,\ f_z,\ f_\theta\leqq 1 \qquad (5)$$

表 3에서와 같이 α, β가 各各 0°와 90°로 組合된 3가지 條件을 만족하도록 f_r, f_z, f_θ를 決定하면

$$f_r(\alpha,\ \beta)=(1-\cos\alpha)(1-\sin\beta)$$
$$f_z(\alpha,\ \beta)=(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) \qquad (6)$$
$$f_\theta(\alpha,\ \beta)=1-\sin\alpha$$

이다. (6)을 (4)에 代入하면

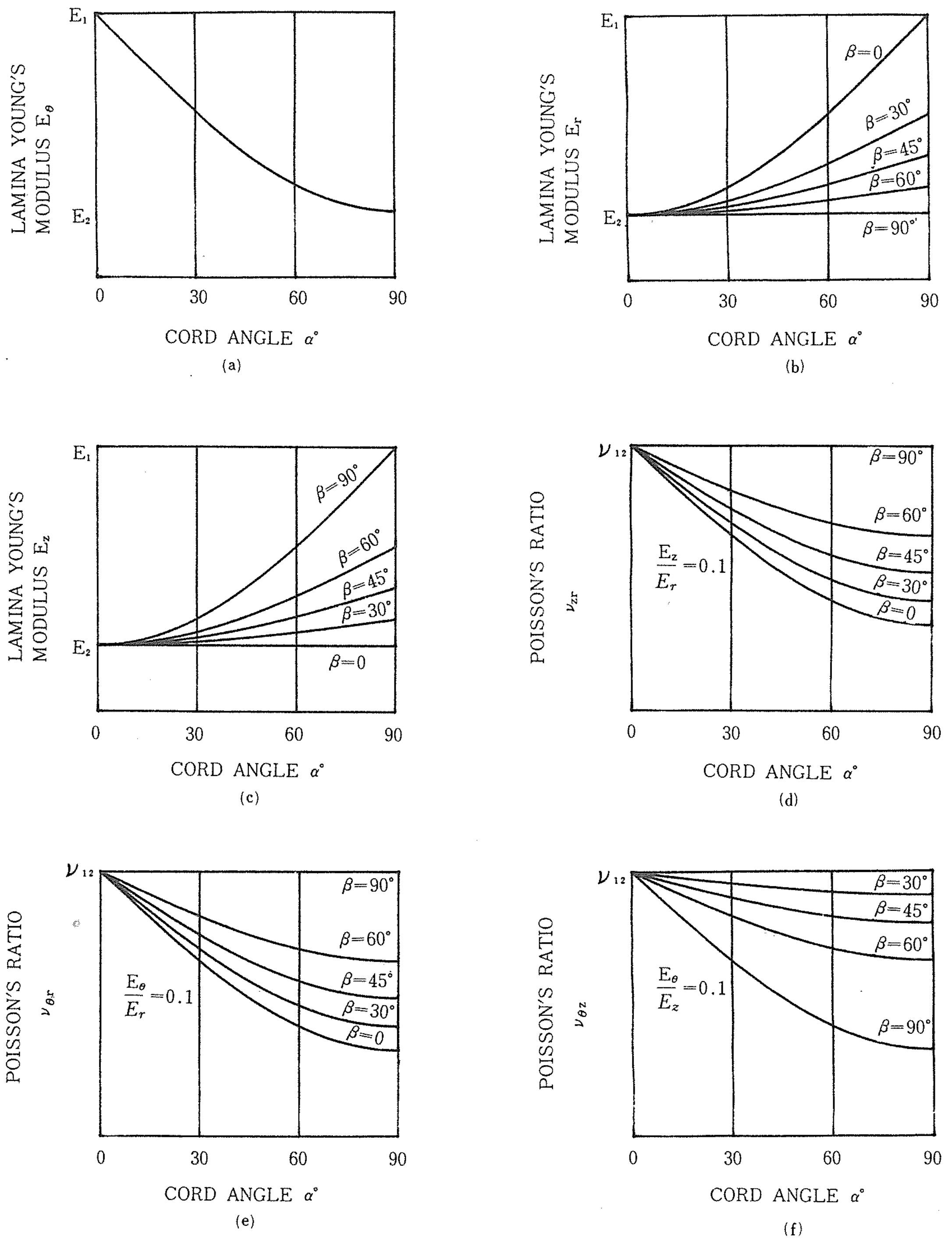
$$E_r=E_2+(E_1-E_2)(1-\cos\alpha)(1-\sin\beta)$$
$$E_z=E_2+(E_1-E_2)(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)$$
$$E_\theta=E_2+(E_1-E_2)(1-\sin\alpha) \qquad (7)$$

로 된다. 같은 方法으로 ν_{zr}, $\nu_{\theta r}$, $\nu_{\theta z}$를 傾斜角 α, β로 表示하면

$$\nu_{zr}=\nu_{12}[1-(1-E_z/E_r)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta]$$
$$\nu_{\theta r}=\nu_{12}[1-(1-E_\theta/E_r)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta]$$
$$\nu_{\theta z}=\nu_{12}[1-(1-E_\theta/E_z)\cdot\sin\alpha\cdot(1-\cos\beta)] \qquad (8)$$

이다.

(7), (8)로 표시된 彈性係数 및 poisson 比 값들이 傾斜角 α, β에 따라 變化하는 狀態를 그림 4에 나타내었다. 특히 (a)에서와 같이 圓周方向의 E_θ는 타이어가 軸對稱이기 때문에 β에 無關함을 알 수 있다.



〔그림 4〕 Equivalent elastic constants of cord-rubber composite.

Ⅲ. Finite element formulation

타이어는 回轉軸에 대해 對稱으로 간주될 수 있으므로 軸對稱要素를 考慮하면 된다. 要素內의 임의의 點에서 變位 $\{\delta\}$를 形狀函數(Shape function) 및 節點(node)의 變位$\{\delta^e\}$로 나타내면

$$\{\delta\}=[N]\{\delta^e\} \tag{9}$$

이다. 形狀函數 $[N]$는 한개의 要素를 構成하는 節點의 数만큼 存在하며 다음과 같은 特性을 갖는다. 要素內의 j번째 節點의 座標를 ξ, η라 하면 形狀函數는

$$N_i(\xi_j,\ \eta_j)=\begin{cases}1\,(i=j)\\0\,(i\neq j)\end{cases} \tag{10}$$

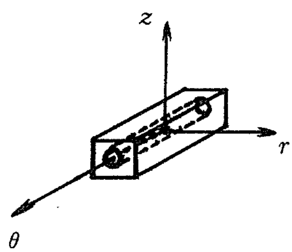
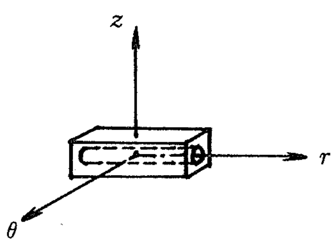
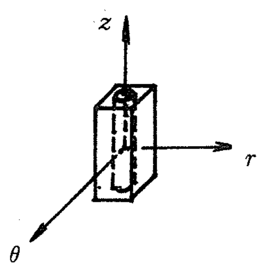
라는 特性을 갖는다.

變形率$\{\varepsilon\}$과 變位$\{\delta\}$ 사이의 關係式[7] 은 一般的으로 變位微分演算子를 $[L]$ 이라고 할 때 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{\varepsilon\}=[L]\{\delta\} \tag{11}$$

특히 軸對稱인 경우에는

〈表 3〉 Elastic Constants of Cord-Rubber

	α	β	Young 率	Poisson 比
	0°	90°	$E_r=E_2$ $E_z=E_2$ $E_\theta=E_1$	$\nu_{zr}=\nu_{12}$ $\nu_{\theta r}=\nu_{12}$ $\nu_{\theta z}=\nu_{12}$
	90°	0°	$E_r=E_1$ $E_z=E_2$ $E_\theta=E_2$	$\nu_{zr}=\dfrac{E_z}{E_r}\cdot\ \nu_{12}$ $\nu_{\theta r}=\dfrac{E_\theta}{E_r}\cdot\ \nu_{12}$ $\nu_{\theta z}=\nu_{12}$
	90°	90°	$E_r=E_2$ $E_z=E_1$ $E_\theta=E_2$	$\nu_{zr}=\nu_{12}$ $\nu_{\theta r}=\nu_{12}$ $\nu_{\theta z}=\dfrac{E_\theta}{E_z}\nu_{12}$

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix},\ [L]=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial r} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{1}{r} & 0\\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r}\end{bmatrix},\ \{\delta\}=\begin{Bmatrix}u\\ \nu\end{Bmatrix}$$

이므로

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial r} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{1}{r} & 0\\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ \nu\end{Bmatrix} \qquad (11a)$$

와 같이 되며 여기서 u, ν는 各各 r, z方向의 變位이다.

變形率을 節點變位로 表示하면

$$\{\varepsilon\}=[L][N]\{\delta^e\}=[B]\{\delta^e\} \qquad (12)$$

으로 되며, 여기서

$$\text{strain matrix } [B]=\sum_{i=1}^{m}\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial r} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z}\\ \frac{N_i}{r} & 0\\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r}\end{bmatrix}$$

이다. m= 要素의 節點数

應力과 變形率 사이의 關係式[7] 은

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \qquad (13)$$

여기서 $[D]$=elasticity matrix

等方性인 材質이 軸對稱으로 變形할 때의 elasticity matrix는[8]

$$[D]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix} \qquad (13a)$$

한편 直交異方性(orthotropic property)인 경우의 elasticity matrix는[9] 變形率-應力 관계식이

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0\\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0\\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_z\\ \sigma_\theta\\ \tau_{rz}\end{Bmatrix}$$

로 表示되므로

$$[D]=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0\\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0\\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}^{-1} \qquad (13b)$$

여기서
$$\begin{aligned}S_{11}&=1/E_r\\ S_{22}&=1/E_z\\ S_{33}&=1/E_\theta\\ S_{66}&=1/G_{rz}=1/G_{ru}\\ S_{12}&=-\nu_{zr}/E_z=-\nu_{rz}/E_r\\ S_{13}&=-\nu_{\theta r}/E_\theta=-\nu_{r\theta}/E_r\\ S_{23}&=-\nu_{\theta z}/E_\theta=-\nu_{z\theta}/E_z\end{aligned} \qquad (14)$$

(14)에서 E, ν 들은 (7), (8)로 주어지며 G_{rz} 는 고무의 横弾性係数 G_{ru} 이다.

要素의 stiffness matrix $[K^e]$는[8,10]

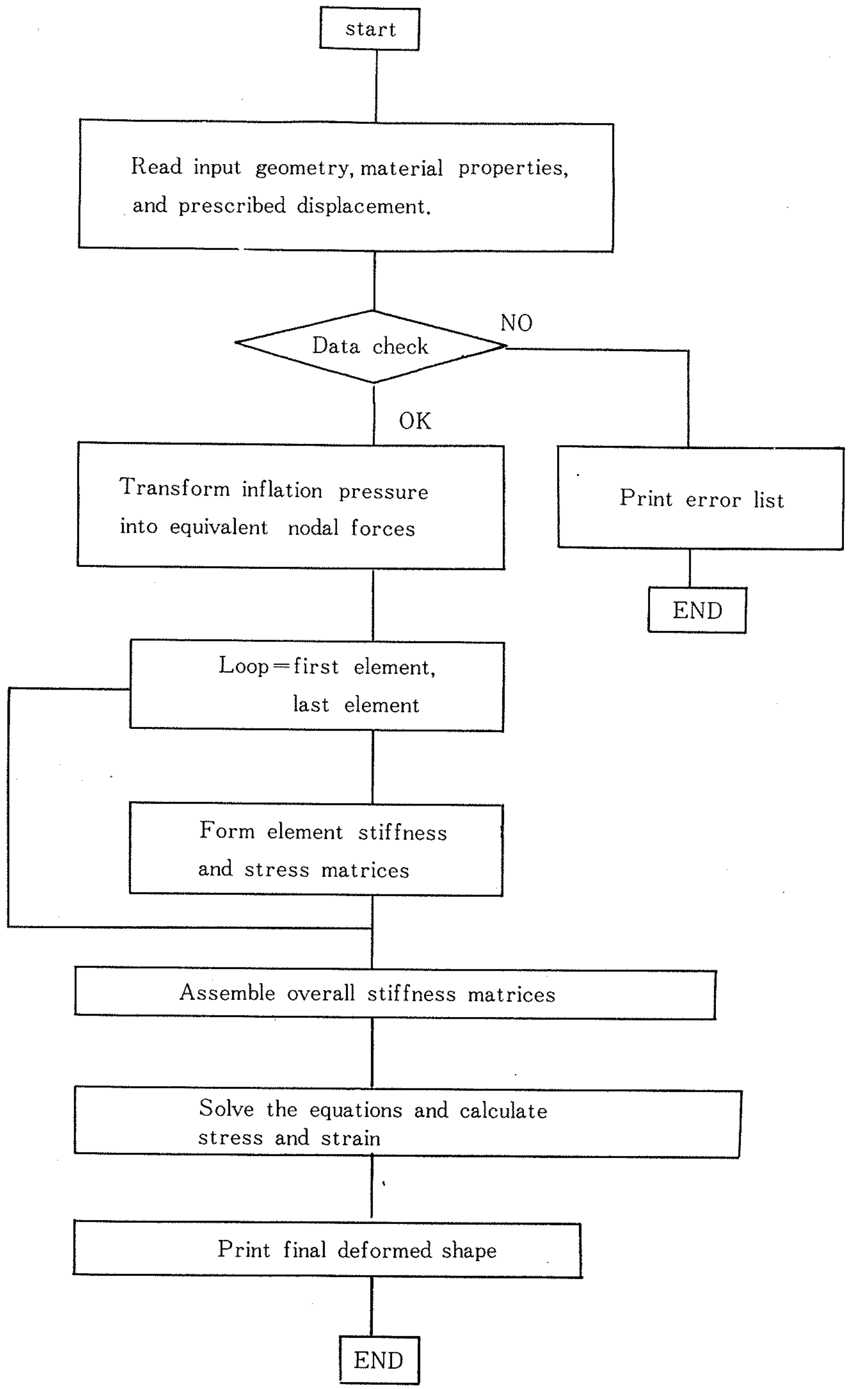
$$[K^e]=\int_{\nu_e}[B]^T[D][B]\,d\nu$$

로 주어지며 ν_e는 要素의 體積을 나타낸다. 軸對稱인 경우 微小體積 $d\nu=2\pi r dr dz$로 表示되므로 (15)는

$$[K^e]=\int_{A_e}[B]^T[D][B]\ 2\pi r dr dz \qquad (16)$$

로 된다.

本論文에서 타이어에 使用한 要素는 8節點 parabolic isoparametric 要素를 使用하였다. 이에 관련된 program은 E. Hinton[4] 의 plane stress program을 軸對稱을 考慮하여 修正해서 使用하였다. 그림 5에서는 空氣壓에 의한 軸對稱 타이어의 變形을 解析하기 위해 適用한 有限要素 computer program의 흐름도를 나타내었다.



〔그림 5〕 Flow chart for a finite element method

IV. F.E.M.의 타이어에의 適用 및 結果

타이어는 構造가 複雜하여 變形解析이 困難하므로 本論文에서는 간단한 解析 모델을 設定하여 有限要素法을 適用하였다. 그림 6 에서 보는 바와 같이 142個의 要素로 分割하였으며 節點의 總数는 508個이다.

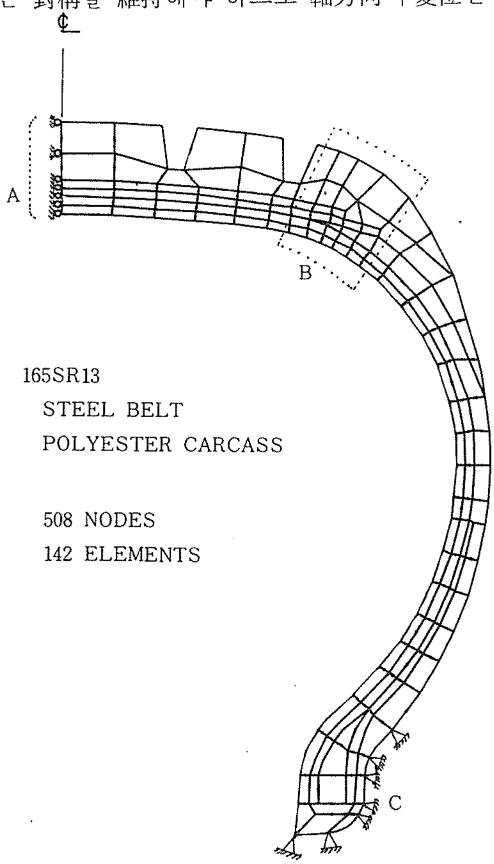
고무만으로 되어 있는 部分 (cap tread, inner liner, sidewall, bead filler, gum toe-strip)은 等方性材質을 갖는 것으로 취급하고, cord와 고무의 複合構造는 앞에서 言及한 바와 같이 orthotropic composite로 취급한다.

境界條件은 타이어의 crown部 A에서의 變位는 對稱을 維持해야 하므로 軸方向의 變位는 없으며 단지 半径方向의 變位만 存在하고, Rim과 접촉하는 部位 C는 모두 고정되어 있는 것으로 간주한다. 그리고 空氣壓은 타이어의 inner liner 部分의 領域에만 作用한다.

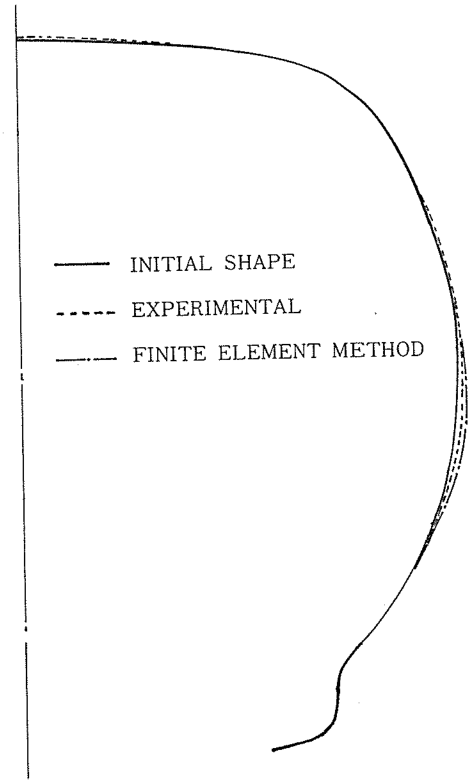
正確度를 높이기 위해서 應力集中이 豫想되는 belt edge部 B는 다른 要素에 비해 보다 작게 分割하였다. 트레드 패턴의 모양은 事実上 圓周方向으로 均一하지 않지만 그러한 變化는 考慮하지 않았으며, main groove에 해당되는 部分만을 考慮하였다.

위와 같이 設定된 解析 모델을 165SR13 스틸 래디알 타이어에 適用한 結果는 다음과 같다.

타이어에 空氣壓을 넣기 前後의 外形 프로파일을 測定하기 위해 치과용으로 使用되는 plaster cast를 使用하였으며 이 變形前後의 프로파일과 有限要素法을 適用하여 計算한 結果를 보면 그림 7과 같다.



〔그림 6〕 Isoparametric element grid with 508 nodes and 142 elements for a 165SR13 steel belted radial tire with a polyester carcass.

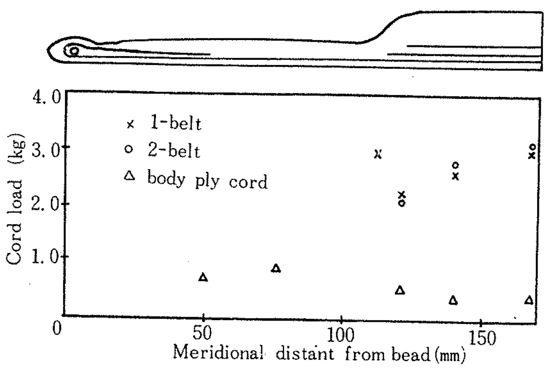


〔그림 7〕 Predicted and measured inflation profile of the 165SR13 tire at 24 psi.

空氣壓 24psi에서 外徑의 變形은 實驗에 의한 測定値가 0.7mm였으나 FEM 結果値는 0.64mm로 잘 일치하며, section width의 變形은 實測値가 2.2mm인데 반해 FEM으로 計算한 結果는 4.0mm로 큰 차이를 보였다.

本論文에서는 單純化한 모델을 設定하였으며 事實上 타이어는 非線形材質이고 또한 變形이 크므로 幾何學的 非線形을 고려한다면 보다 실측에 접근한 값을 계산해 낼 수 있을 것이다.

그림 8에서는 空氣壓 24 psi 일 때 타이어의 cord에 걸리는 張力을 FEM을 통해 계산한 結果値를 나타내주고 있다. textile carcass cord에 作用하는 引張力은 crown 部에서는 0.4~0.55kg, sidewall 部에서는 0.75~0.95kg으로 cord 破壞強度의 8% 미만에 해당되는 값이다. Belt에 작용하는 張力은 2.1~3.2kg으로 belt 破壞強度의 5% 미만에 해당되는 값이며, belt edge 部로 갈수록 감소됨을 보여주고 있다.

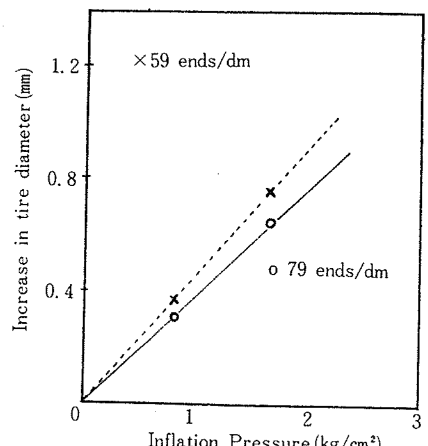


〔그림 8〕 Cord load distribution in 165SR13 tire at 24 psi inflation pressure.

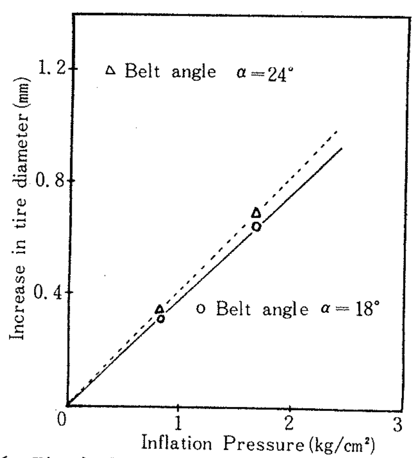
Belt cord 數의 變化가 空氣壓의 變化에 따라 타이어 外徑에 어떠한 영향을 미치는가를 보기 위해 FEM을 통해 계산한 結果를 그림 9에 表示했다. belt cord 數가 79epdm (ends/dm)에서 59epdm으로 바뀔 때, 空氣壓 24psi에서는 外徑의 變形이 각각 0.64, 0.75mm이고, 空氣壓 12 psi에서는 각각 0.32, 0.38mm로 belt cord數가 감소하면 外徑이 增加함을 나타내 준다.

Belt 角度를 변경하여 外徑의 變化를 計算해 본 結果를 그림 10에 圖示하였다. belt 角度 α가 18°에서 24°로 바뀔 때 空氣壓 24psi에서는 外徑의 變形이 각각 0.64, 0.69mm이고, 空氣壓 12psi에서는 각각 0.32, 0.34mm로 belt 角度가 增加하면 外徑이 증가함을 알 수 있다.

以上에서 보는 바와 같이 FEM을 타이어에 適用하면 보다 效果的이며 실지의 타이어에 접근한 모델을 설정하면 보다 좋은 結果値를 얻을 수 있다.



〔그림 9〕 Change in diameter of 165SR13 tire with different belt as a function of inflation pressure.



〔그림 10〕 Change in diameter of 165SR13 tire with different belt angle as a function of inflation pressure.

V. 結　論

타이어를 構成하는 cord-rubber 複合體가 線形直交性을 갖는 것으로 취급하고, 고무만으로 되어 있는 部分은 等方性으로 취급하여 有限要素法을 適用한 結果 다음과 같은 結論을 내릴 수 있다.

1. 空氣壓에 의한 팽창시 타이어의 外形 프로파일은 FEM을 適用하여 計算한 結果値와 實驗에 의한 測定値를 비교하면 上半部에서는 잘 一致하지만 下半部에서는 差異가 있음을 알 수 있다.
2. Belt에 걸리는 張力은 belt edge部로 갈수록 낮아지는 現象을 보이고 있다.
3. Belt cord 數를 증가시키면 同一空氣壓條件下에서 外徑이 감소함을 알 수 있다.
4. Belt cord가 圓周方向과 이루는 角度를 크게 하면 同一空氣壓 條件下에서 타이어 外徑이 증가한다.

以上과 같이 타이어에 有限要素法을 適用하면 定量的인 評價를 할 수 있어 보다 效果的임을 알 수 있다. 本論文에서는 cord-rubber 複合體에 대한 가장 간단한 모델式을 使用했지만 실제의 特性에 근접한 式을 찾으면 보다 좋은 結果를 얻을 수 있으리라 생각한다.

〔後 記〕

本論文을 發表할 수 있도록 許諾해 주신 三陽타이어(株) 및 物心兩面으로 協助해 주신 분들에게 感謝의 말씀을 드리며 本論文을 받칩니다.

參 考 文 獻

1) J.F. Purdy, "Mathematics Underlying the Design of Pneumatic Tires", Edwards Brothers Publishing Co., Ann Arbor, Mich., 1963.
2) J.DeEskinazi, T.Y.Yang, and W.Soedel, "Displacements and Stresses Due to Contact of a steel Belted Radial Tire with a Flat Surface", Tire Science and Technology, Vol. 6, No. 1, 1978, pp. 48-70.
3) H.Kage, K.Okamoto, and Y.Tozawa, "Stress Analysis of a Tire Under Vertical Load by a Finite Element Method", Tire Science and Technology, Vol. 5, No. 2, 1977, pp.102-118.
4) E.Hinton and D.R.J.Owen, "Finite Element Programming", Academic Press, New York, 1977.
5) R.W.Clough and Y.Rashid, "Finite Element Analysis of Axi-Symmetric Solids", J.Eng. Mech.Div., Vol. 91, 71-85, 1965.
6) J.D.Walter and H.P.Patel, "Approximate Expressions for the Elastic Constants of Cord-Rubber Laminates : Theory and Applicattons", Rubber Chemical and Tech., Vol.51, No.3, 1978.
7) S.Timoshenko and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw-Hill, New York, 1951.
8) K.C.Rocky, H.R.Evans, D.W.Griffiths and D.A.Nethercot, "The Finite Element Method", Crosby Lockwood Staples London Co., 1975.
9) R.M.Jones, "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill, New York, 1975.
10) O.C.Zienkiewicz, "Finite Element Method", McGraw-Hill., 1977.

〔略 號〕

r,z,θ ; Radial, axial, and circumferential global coordinates

E_1,E_2 ; Longitudinal and transverse Young's modulus, respectively

E_c,E_{ru} ; Young's moduli of cord and rubber, respectively

E_r,E_z,E_θ ; Young's moduli in radial, axial, and circumferential directions, respectively

G_{ru} ; Shear modulus of rubber

V_c ; Volume fraction of cord in calendered ply

ν_{ij} ; Poisson's ratio for transverse strain in the j-direction when stressed in the i-direction

α ; cord angle to the circumferential direction

β ; cord angle to the radial direction

$[N]$; Shape function

$[B]$; Strain matrix

$[D]$; Elasticity matrix

$[K^e]$; Stiffness matrix of an element

$\{\delta\}$; Displacement vector

$\{\varepsilon\}$; Strain vector