

# Non-Linear Programming에 의한 공작기계(선반)의 Performance 해석

An Analytic Study on the Performance of Machine Tool (Lathe) by Non-Linear Programming

朴 鍾 權\* · 李 泰 世\*\*

Park Jong Kweon\*, Lee Tae Sei\*\*

### \* 記 號 \*

- C : 가공물 1개에 대한 비용 (won/pc)
- C<sub>o</sub> : 운전시간에 대한 비용 (won/min)
- C<sub>t</sub> : 공구의 비용 (won/edge)
- t<sub>c</sub> : 공구의 교환시간 (min/edge)
- t<sub>h</sub> : 가공물에 대한 준비시간 (min/pc)
- D : 공작물 직경 (mm)
- L : 공작물 길이 (mm)
- X : 주축대로부터 가공위치 (mm)
- f : 공구 이송량 (mm/rev)
- v : 절삭속도 (m/min)
- m, n : Taylor의 공구 수명식에서 재질에 따른 지수
- K : Taylor의 공구 수명식에서 재질에 따른 계수
- C<sub>s</sub> : 비절삭 저항 (N/mm<sup>2</sup>)
- T : 공작물 1개당 가공시간 (min)
- S : 절삭깊이 (mm)
- A : 공작물의 가공전 표면거칠기 (mm)
- G<sub>c</sub> : 왕복대 부위의 변위특성 (μm/N)
- G<sub>hs</sub> : 주축대 부위의 변위특성 (μm/N)
- G<sub>t</sub> : 십압대 부위의 변위특성 (μm/N)
- E : 공작물 재질의 Young's Modulus (N/mm<sup>2</sup>)

- I : 공작물의 단면 2차 모우먼트 ( $\pi D^4/64$ )
- $\alpha, \beta$  : 절삭력에서 공구재질에 따른 지수
- T<sub>m</sub> : 공작물 1개당 유효절삭 시간 (min/pc)
- T<sub>s</sub> : 공구 수명 (min/edge)
- $\delta'$  : 공작물 직경의 최대 허용오차 (μm)
- T' : 공작물 1개당 가공시간의 최대허용치 (min)

### 1. 序 論

工作機械分野의 가장 중요한 연구의 하나는 Machining Performance 를 결정하는데 있다. 여기서 Performance 란 工作機械 및 加工物의 品質을 意味한다. 특히 生産公장에서 公작물을 加工할 때에는 우선적으로 판단하여야 할 사항이 加工물의 형상, 재질, 다듬질 여유, 가공 정도, 룯트류 등을 判定하여 凡用 혹은 專用機 중 어느 공작기계를 이용해야 될 것인가 를 선정하는 일이다. 그리고 기계가 결정이 되면 다음으로 검토해야 될 사항은 가장 싼 비용 과 짧은 작업시간 및 높은 정밀도로 加工할 수 있는 기계의 경제적인 작업조건이며, 이는 금전적으로 정확히 계산하기란 어려운 일이고 종합

\* 昌原本所 機械試驗室 Member of Machinery Testing Lab.  
 \*\* 昌原本所 機械試驗室長 Head of Machinery Testing Lab.

적으로 기계의 특성을 고려하여 加工條件을 最適化로 이끌면서 비용을 最小化 시켜 나간다.

따라서 Performance 를 決定하기 위한 最適化方案은 工作機械의 性能과 직결이 되는 加工費用, 加工精密度, 加工時間을 Minimize 하는 것이며 本 研究은 이들을 決定하는 것에 主目的을 둔다.

## 2. Performance 의 理論的 背景

工作物을 加工할 때는 加工變數들에 따라서 경제효과가 여러가지로 달라진다. 이러한 變化는 工具의 移送量, 切削速度, 切削깊이에 매우 密接한 關係가 있으며 특히 기계의 특성과 濃속적인 關係를 이루고 있다.

따라서 本章에서는 加工變數와 機械의 靜·動特性에 의한 구성부 變위 그리고 가공에 의한 消費時間으로부터 나타낼 수 있는 Performance 에 대해서 기술하며, 실제의 목적은 最適化技法을 적용하여 Machining Condition을 높이는 데에 있으므로 일차적으로 狀態式을 設計變數가 包含된 方程式으로 유도해 나간다.

### 2.1 狀態方程式의 數學的 모델화

Performance 를 決定하는데에 따른 狀態方程式은 加工變數를 包含하여 기계의 特性變化로 구성이 되며 數學的으로 간편히 나타낼 수 있다. 이에 대한 狀態방정식으로는 첫째로, 加工費用을 생각할 수가 있으며 이는 순수하게 절삭에만 소비된 비용과 공구수명에 관계되는 마모 및 교환에 의한 비용 그리고 가공중 준비작업에 따른 비용으로 표기된다. 즉,

$$\text{Unit cost (Single-pass)} = \text{Effective machining cost} +$$

$$\begin{aligned} & \text{Tooling cost} + \text{Handling cost} \\ & = C_o T_m + T_m(C_o t_c + C_t) / T_s + C_o t_h \end{aligned}$$

가 되며, 여기에서 Taylor 의 공구수명식으로부터 일반화 된 切削速度

$$V = K (T_s)^n f^m \quad (2-1)$$

와 Machining time인

$$T_m = \frac{\pi D L}{12 V f} \quad (2-2)$$

을 이용하면 공작물 1개에 대한 Machining cost 는 최종적으로 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} C = C_o & \frac{\pi D L f^{-1} V^{-1}}{1000} + \\ & + \frac{(C_o t_c + C_t) \pi D L f^{(\frac{m}{n}-1)} V^{(\frac{1}{n}-1)}}{1000 K^{1/n}} \\ & + C_o t_h \end{aligned} \quad (2-3)$$

둘째로 생각할 수 있는 것은 加工時間이며 위에서의 방법과 마찬가지로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Unit time (Single-pass)} = \text{Effective machining time} +$$

$$\text{Tool changing time} + \text{Handling Time}$$

$$= T_m + T_c T_m / T_s + t_h$$

여기서, 式(2-1)과 式(2-2)를 적용시킨 공작물 1개에 대한 Machining Time 은

$$T = \frac{\pi DL f^{-1} V^{-1}}{1000} + \frac{t_c \pi DL f^{\left(\frac{m}{n}-1\right)} V^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}}{1000^{1/n}} + t_h \quad (2-4)$$

로 된다. 이어서 세째로는 공작물 정밀도에 해당되는 가공오차이다. 이는 切削加工 중 切削力에 의한 工具와 工作物간의 상대적인 변위가 발생되어 형상오차가 생기는 이른바 Flexible system 으로 묘사될 수가 있으며, 이는 기계의 낮은 靜·動的 剛性和 베드 안내면의 전장에 걸쳐 기계적 또는 화학적인 손상 때문에 균등한 마멸이 이루어지지 않아 발생하는 경우로 생각할 수가 있다. 즉, 선반에서 필요한 가공정밀도를 얻기 위하여 고려되어야 할 힘을 든다면,

(1) 절삭력

(2) 가공물 및 베드, 주축대, 심압대, 왕복대의 각 구성부가 자중, 절삭력, 결합력 등으로 받는 힘과 움직임에 대한 마찰력 등이다. 특히 J. TLUSTY에 의하면 공작물의 가공오차는 구성부의 변위 및 그림 1 과 함께 다음과 같이 나타내기도 했다.

$$\delta_x = F_y \left[ G_c + \left(\frac{L-X}{L}\right)^2 G_{hs} + \left(\frac{X}{L}\right)^2 G_t + \frac{1000(L-X)^2 X^2}{3EI L} \right] \quad (2-5)$$

여기서 절삭력  $F_y$  는 그림 1 에서와 같이 절삭공구가 가공물을 따라 이동할 때 가공물을 지

지하는 힘의 크기를 변화시켜, 힘을 받는 부분의 처짐량을 변하게 하여 형상오차를 생기게 한다. 그러므로 가공오차는 절삭력의 함수가 된다.

더우기, 절삭력은 가공변수 및 공구 재질에 따른 변수로 표현이 되며 V·ARSHINOV 와 G·ALEKSEEV는 절삭력을

$$F_y = C_k f^\alpha (S + \Delta)^\beta V^r$$

로 정의하기도 했다. 이때 경도 200HB (인장강도 55N/mm<sup>2</sup>)인 SM45C를 초경팁 공구 (Rake角 6°)를 사용하여 가공을 한다고 하면 절삭력은

$$F_y = 240 f^{0.6} (S + \Delta)^{0.9} V^{-0.3}$$

$$\text{但, } \alpha = 0.6$$

$$r = -0.3$$

$$\beta = 0.9$$

$$C_k = 240$$

가 되며, 이를 이용하여 式(2-5)를 다시 쓰면

$$\delta_x = 240 f^{0.6} (S + \Delta)^{0.9} V^{-0.3}$$

$$\left[ G_c + \left(\frac{L-X}{L}\right)^2 G_{hs} + \left(\frac{X}{L}\right)^2 G_t + \frac{1000(L-X)^2 X^2}{3E(\pi D^4/64)L} \right] \quad (2-6)$$

이 된다.

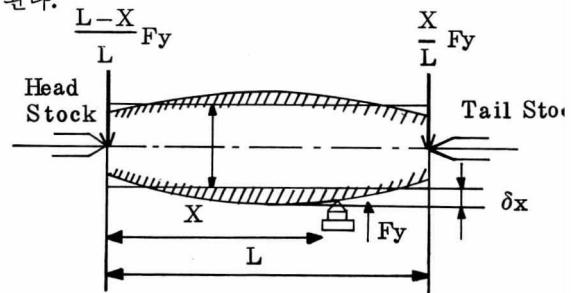


그림1.

### 2.2 加工System의 質의 效果

工作機械의 performance는 주어진 허용조건하에서 최소의 費用과 최소의 加工時間으로 정밀한 加工品을 생산하는 하나의 기준으로 말할 수 있다. 그러므로 이와같은 사실을 Column matrix(Performance matrix)로 배열을 하면 이는 기계의 品質效果를 나타낸다.

$$M = \begin{bmatrix} C \\ T \\ \delta \end{bmatrix} \quad \text{여기서 } C, T, \delta \text{ 는 optimum value}$$

특히, 2種 이상의 기계에 대해서 優劣을 比較할 때는 使用者의 觀點이 각기 다를 수가 있으므로 이때는 Weighting coefficient인  $a_i$ 를 이용하여 比較를 한다면 效率的인 方法이 된다. 즉,

$$M_m = \begin{bmatrix} C \\ T \\ S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

$$\text{但, } a_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 a_i = 1$$

가 되며, 이와같이 Optimum value인  $C, T, \delta$ 의 표기로 工作機械System 特性의 Performance를 나타내 보일 수가 있다. 따라서, 機械의 價値를 比較시  $M_m$ 값이 작은 기계일수록 성능은 좋지 않게 된다.

### 3. 最適設計問題의 數式化

가공시 주어진 여러 변수에 따라 Performance를 결정하는 것은 制限條件式을 만족하도록 目的函數를 최소화 하는 것으로부터 구할 수가 있다. 이러한 問題를 해결하는데는 주로 비선형 형태들로 이루어져 있으므로 制限條件式이 있는 Non-linear programming을 이용하여 해결해 나간다.

### 3.1 問題의 設定

가공조건들로부터 Machining cost를 최소화하는 最適設計問題의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$\text{Minimize } C(V, f, S) \\ \text{Subject to } \phi_i(V, f, S) \leq 0 \quad (3-1)$$

- 但,  $i = 1 \dots \dots \dots n$
- $C$ ; 목적함수
- $\phi_i$ ;  $i$ 번째 제한조건식
- $n$ ; 제한조건식의 갯수

#### 3.1.1 目的函數

目的函數는 加工費用으로 하고 이를 最小化해 나간다. 그러므로 式(2-3)으로부터

$$C = C_o \frac{\pi D L f^{-1} V^{-1}}{1000} + \frac{(C_o t_c + C_t) \pi D L f^{(\frac{m}{n}-1)} V^{(\frac{1}{n}-1)}}{1000^{1/n}} + C_o t_h \quad (3-2)$$

이 된다.

#### 3.1.2 制限 條件式

(1) 加工時間 制限 條件式

切削條件의 變數로 구성된 加工時間 制限條件式은 式(2-4)로부터 다음과 같이 된다.

$$T = \frac{\pi D L f^{-1} V^{-1}}{1000} + \frac{t_c \pi D L f^{(\frac{m}{n}-1)} V^{(\frac{1}{n}-1)}}{1000 K^{1/n}} + t_h \leq T' \quad (3-3)$$

(2) 加工誤差 制限 條件式

機械의 시스템 성분과 加工條件式으로 조합된 가공오차의 制限條件式은 탄소강의 공작물에 대해서 式(2-6)으로 부터

$$\delta_x = 240 f^{0.6} (S + D)^{0.9} V^{-0.3} \left[ G_c + \left( \frac{L-X}{L} \right)^2 G_{hs} + \left( \frac{X}{L} \right)^2 G_t + \frac{1000 (L-X)^2 \cdot X^2}{3 E (\pi D^4 / 64) L} \right] \leq \delta' \quad (3-4)$$

가 된다.

(3) 設計變數 制限 條件式

旋盤加工에 있어서 效果的인 加工能率을 위하여는, 切削速度, 移送量, 切削깊이에 대한 最大 最小의 허용한계가 필요하며, 이는 設計變數의 上限値와 下限値에 해당된다.

$$\begin{aligned} f_{min} &\leq f \leq f_{max} \\ V_{min} &\leq V \leq V_{max} \\ 0 &< S \leq S_{max} \end{aligned} \quad (3-5)$$

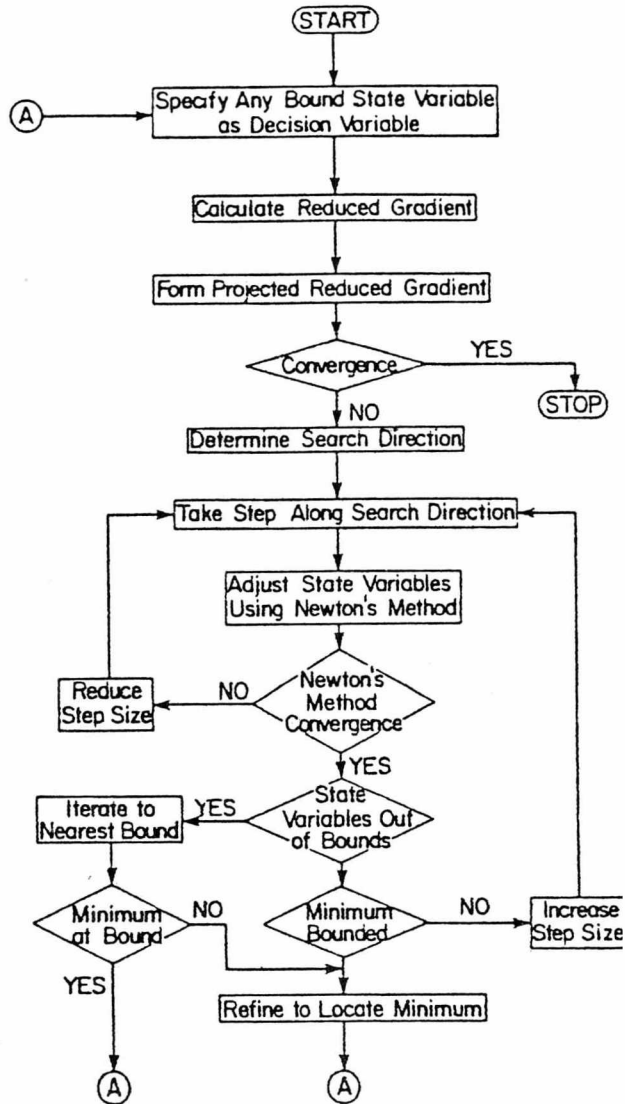
3.2 最適化 方法

모델의 式(3-2), (3-3), (3-4), (3-5)는 工具와 工作物 및 機械의 特性과 加工條件의 함수들이며 제한조건을 만족하면서 목적함수를 최소화 하도록 설계변수 V, f, S를 결정해 나간다.

즉, 여기서의 최적설계 문제는 3-D-dimensional인

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & C = C(V, f, S) \\ \text{Subject to} \quad & T = T(V, f, S) \leq T' \\ & \delta = \delta(V, f, S) \leq \delta' \\ & f_{min} \leq f \leq f_{max} \\ & V_{min} \leq V \leq V_{max} \\ & 0 < S \leq S_{max} \end{aligned}$$

을 푸는 결과로 귀착이 되고 制限條件式이 있는 Non-linear programming의 Gradient projection method를 이용하면 最適化, 狀態에서의 設計變數를 구할 수가 있다. 즉, 이 프로그램은 Feasible한 Contour 상의 한 초기점으로부터 Gradient 方向으로 Step를 반복 수행하여 목적함수를 최소화로 향하게 하는 것이다. 다음 그림 2는 이에 대한 Algorithm의 전산 Flow chart를 보여준다.



## 4. 應 用

2章과 3章에서 설명한 最適設計 方法을 立證하기 위하여 아래와 같이 주어진 변수들로부터 문제를 Programming한다.

### 1) 공작기계 사양 (선반)

- (1) 회전수 (N)  
;  $28 \leq N \leq 2500$  (rpm)
- (2) 이송량 (f)  
;  $0.07 \leq f \leq 1.12$  (mm/rev)
- (3)  $G_c = 1.3$  ( $\mu\text{m}/N$ )
- (4)  $G_{hs} = 0.15$  ( $\mu\text{m}/N$ )
- (5)  $G_t = 0.75$  ( $\mu\text{m}/N$ )
- (6)  $t_k = 1.5$  (min/pc)
- (7)  $C_o = 1$  (Won/min)

### 2) 공작물 사양

- (1) 재질 ; SM45C
- (2) 직경 (D) ; 80 (mm)
- (3) 길이 (L) ; 300 (mm)
- (4) 단성계수 (E) ; 2100 ( $N/\text{mm}^2$ )
- (5) 표면거칠기 ( $\Delta$ ) ; 0.5 (mm)
- (6) 가공 위치 (X) ; 150 (mm)

### 3) 공구 사양

- (1) 재질 ; 초경팁
- (2) 비절삭 저항 ( $C_k$ )  
; 240 ( $N/\text{mm}^2$ )
- (3)  $m = 0.65$
- (4)  $n = 0.25$
- (5)  $K = 150$
- (6)  $C_t = 15$  (won/edge)
- (7)  $t_c = 0.8$  min/edge)

### 4) 요구 사양

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } C \\ & \text{Subject to } T \leq 12 \text{ (min)} \\ & \quad \delta \leq 150 \text{ (}\mu\text{m)} \end{aligned}$$

## 4.1 問題의 Computation

주어진 上記의 變數값들로부터 最適設計問題를 Formulate하면

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } C = C(V, f, S) \\ & \text{Subject to } T = T(V, f, S) \leq 12 \\ & \quad \delta = \delta(V, f, S) \leq 150 \\ & \quad 7.5 \leq V \leq 625 \\ & \quad 0.07 \leq f \leq 1.12 \\ & \quad 0 < S \leq 5 \end{aligned}$$

이 되고 이는 式 (3-2), (3-3), (3-4), (3-5)로부터 다음과 같이 간단한 형태로 줄일수가 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } C = 75.3982 f^{-1} V^{-1} \\ & \quad + 23.53 \times 10^{-7} f^{1.6} V^3 \\ & \quad + 1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Subject to } T = 75.3982 f^{-1} V^{-1} \\ & \quad + 11.9 \times 10^{-8} f^{1.6} \\ & \quad \times V^3 \leq 10.5 \\ & \quad \delta = f^{0.6} (S + 0.5)^{0.9} \\ & \quad \times V^{-0.3} \leq 0.40959 \\ & \quad 7.5 \leq V \leq 625 \\ & \quad 0.07 \leq f \leq 1.12 \\ & \quad 0 < S \leq 5 \end{aligned}$$

그리고, 設計變數 變化를 초기치로 부터 반복적으로 수행하여 最適點을 찾아 나간다.

## 4.2 結果 및 考察

最適化問題를 풀기 위해서 사용된 프로그램은 Non-linear programming으로 Gradien projection method이며, 이에 의한 결과치는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} V &= 92 \text{ (m/min)} \\ f &= 0.115 \text{ (mm/rev)} \\ S &= 4.15 \text{ (mm)} \end{aligned}$$

공작물 1개당 가공시간;  $T = 8.63(\text{min})$

공작물 1개당 가공오차;  $\delta = 102.7(\mu\text{m})$

공작물 1개당 가공비용;  $C = 8.68(\text{Won})$

한편, 設計變數중에서 切削깊이를 다른 變數와 함께 일정하게 주어졌다고 가정하면, 이 프로그램은 變數로서  $V, f$ 를 가진 2-Dimensional 문제가 된다. 즉 그림 3 에서와 같이 移送量과 切削速度 및 費用 사이의 관계를 그래프를 통하여 볼 수가 있으며, 여기서 點 P 는 Optimum solution 에 해당된다.

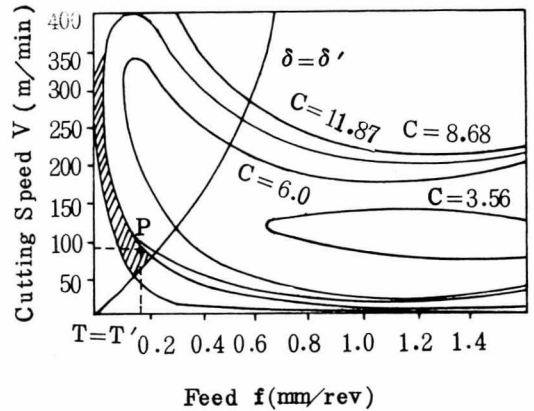


그림 3.

### 5. 結 論

本研究의 주된 結論은 다음과 같다.

- 1) 工作機械 특히 旋盤에서의 Performance 는 最適 加工狀態를 생각하는데에 있으며, Computer 에 의한 Non-linear programming 으로 결정할 수 있다.
- 2) Performance 는 加工중의 주요한 變數를 가지고 간단한 표기로 나타내 진다.

3) 變數에서 일정한 값만 주어지면 本 프로그램으로서 最適解는 용이하게 구해지므로 생산 공장에서의 실제적 이용이 가능하다.

4) 지금까지의 결과는 가공시 Single pass 상태에 대해서 수행했으나, 이것을 토대로 Multi-pass 상태의 最適化問題 Search 도 가능하다.

### 參 考 文 獻

- 1) D.S. ERMER and S. KROMODIHARDJO "Optimization of Multipass Turning with Constraints" Journal of Engineering for Industry. ASME. Vol. 103 November 1981, pp.462-468.
- 2) M. FIELD. and N. ZLATIN "Computerized Determinaation and Analysis of Cost and Production Rates for Machining Operations Part 1 - Turning" Journal of Engineering for Industry, ASME. August 1968 pp.455-466.
- 3) G. A. GABRIELE and K. M RAGSDELL "The Generalized Reduced Gradient Method: A Reliable Tool for Optimal Design" Journal of Engineering for Industry. ASME. May. 1977, pp. 394-400.
- 4) G. BOOTHROYD "Fundamentals of Metal Machining and Machine Tools" McGraw-Hill Inc. 1981.

- 5) E. J. HAUG and J. S. ARORA "Applied Optimal Design" John Wiley & Sons Inc. 1979.
- 6) BAZARAA, M. S and C. M, SHETTY, "Non-linear Programming, Theory and Algorithms" John Wiley & Sons. 1979.
- 7) F. KOENIGSBERGER, "Design Principles of Metal-Cutting Machine Tool" PERGAMON PRESS 1964.
- 8) F. KOENIGSBERGER, and J. TLUSTY, "Machine Tool Structures", Volume 1, PERGAMON PRESS 1970.