混合二進整数目標計画法을 利用한 多数目標의 設備立地選定 및 割當問題에 關한 研究

(A Mixed Zero-One Integer Goal programming Approach to Facility Location-Allocation Problem with Multiple Objectives)

康 仁 善*
尹 德 均*

Abstract

This paper is concerned with the facility location-allocation problem (FLAP) with multiple objectives.

A branch-and-bound procedure is presented to solve the mixed zero-one integer goal programming problem which is to determine facility locations from given candidate locations and to allocate facility capacity to given customer markets simultaneously.

A numercial example is given to illustrate this procedure.

1. 序 論

一般的으로 設備의 立地選定 및 割當에 関한 研究의 目的은 他地域間의 物的流通経路를 通한 大量化, 迅速化, 効率化를 図謀할 수 있는 立地條件에 適正配置함과 同時에 物動量을 分配하는데 있으며, 立地代案의 選定基準으로서는 土地利用條件, 道路交通上의 條件, 企業活動上의 條件 等을 勘案하여, 対象地域의 立地可能性을 検討하므로서 妥當한 数個의 地域을 選定하게 된다.

立地選定分析方法은 分析者의 経険과 現場調査의 資料를 通한 主観的 接近方法과 数理計劃法(Mathematical Programming)等을 適用한 計量的方法으로 大別할 수 있으며, 本 研究의 立地選定 評価는 立地의 基準이 되는 客観的要素(経済的要素)와 主観的要素(非経済的要素) [1]를 고려한 計量的方法을 適用한다. 立地分析問題를 다루어온 一般的인 接近方法으로서는 混合整数計劃法, 発見的方法, 動的計劃法[2,

* 漢陽大学校

3, 5]等이 研究되어 왔으며, 이들 模型의 目的函数는 輸送費用의 最小化 혹은 諸費用을 고려한 総費用의 最小化라는 単一目標를 追求하는 経済的인 要素에만 関心두어왔다. 그러나 実在 環境的으로 複雑한 社会構造下에서 意思決定者는 諸費用을 最小化로 하는 単一目標로서 전환하기 어려운 公共의 便益性, 交通環境의 側面等 多数의 相衝되는 目標들이 発生되므로서 単一目標計劃法으로는 現実의 要求를 만족할 수 없는 状況을 접하게 된다. 따라서 本 研究는 目標計劃法(Goal Programming) [4]를 適用하여, 相衝되는 多数目標를 지닌 設備立地 選定 및 割当問題를 模型化하여, 이에대한 解法研究에 臨하고자 한다.

2. 混合二進 整数目標計劃 模型

本 模型은 다음과 같은 假定下에서 定式化 된다. M個의 設備立地候補地가 設定되어 있으며, 単一計劃期間을 基準으로 하여 需要와 供給의 予測値는 確定的이다. 計劃期間을 基準으로 하여 需要와 供給의 予測値는 確定的이다. 流通経路는 1段階模型으로 単一品目의 形態이며, 費用要素는 設備立地候補地로부터 需要地까지의 輸送費와 設備의 開設로 因한 固定費로 区分되며 函数関係는 線型이다.

本 研究에서 使用되는 記号를 定義하면 다음과 같다.

K : 目標函数의 数 $k=1, 2, \cdots, K$.

π_k : k번째 目標函数의 優先順位 ($\pi_k >>> \pi_{k+1}$)

n_k : k번째 目標函数에 대한 負의 偏差(Negative Deviation), $n_k \geq 0$.

P_k : k번째 目標函数에 대한 正의 偏差(Positive Deviation), $P_k \geq 0$.

i : 設備立地候補地番号 $i=1, 2, \cdots, M$.

I ($=\{i\}$) : 設備立地候補地의 集合.

j : 需要地番号 $j=1, 2, \cdots, N$.

J ($=\{j\}$) : 需要地의 集合.

C_{ij} : 設備立地候補地 i로부터 需要地j 까지의 単位製品當 輸送費用.

X_{ij} : 設備立地候補地 i로부터 需要地j 까지의 製品供給量.

F_i : 設備立地候補地 i에 設備를 開設하는데 드는 固定費用.

D_j : 需要地j 의 需要量.

S_i : 設備i 에서 供給할 수 있는 生産能力.

Y_i : 設備立地候補地 i에서의 設備開設 與否変数.

($y_i=1$ 이면 開設, $y_i=0$ 이면 閉鎖를 表示)

B : 目標로 하는 予算費用.

多数의 目標를 지닌 立地選定 및 割當問題는 다음과 같이 混合二進整数目標計劃法(A Mixed Zero-One Integer Goal programming)으로 定式化된다.

成就函数 : 最小化 $\Sigma_{k=1}^{k} \pi_k (n+p)$

制約式

$$\Sigma_{i\varepsilon I} \Sigma_{j\varepsilon J} C_{ij} X_{ij} + \Sigma_{i\varepsilon I} F_i Y_i + n - p = B \quad (1)$$

$$\Sigma_{j\varepsilon J} X_{ij} \qquad + n - p = S_i Y_i \quad \forall i\varepsilon I \quad (2)$$

$$\Sigma_{i\varepsilon I} X_{ij} \qquad + n - p = D_j \quad \forall j\varepsilon J \quad (3)$$

$$Y_i = 0 \text{ 또는 } 1 \quad \forall i\varepsilon I$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad \forall i\varepsilon I, j\varepsilon J$$

$$n, p \geq 0$$

成就函数에서 意思決定者는 制約式에 存在하는 해당偏差変数를 最小化할 경우, 制約式(1)은 輸送費에 대한 総 予算額 B로 制限하여, 偏差変数p(予算超過分)를 最小化하며, 制約式 (2)는 設備i의 生産能力 S_i를 最大로 하기 위하여 偏差変数 n(生産量未成就分)를 最小化한다. 그리고 制約式(3)은 需要地 j 에 対한 需要量 D_j을 만족시키기 위하여 偏差変数n(需要量未成就分)을 最小化 한다.

3. 分岐限界法

分岐限界解法을 提示하기 위하여 다음과 같은 記号가 定義된다.

$E_1[q]$: 노우드(Node)q에서 $Y_i=1$로 固定된 i의 集合($i=1, 2, \cdots, M$). 즉 $E_1[q]=\{i \mid Y_i=1\}$, 노우드 q에서 設備i를 開設.

$E_0[q]$: 노우드 q에서 $Y_i=0$으로 固定된 i의 集合($i=1, 2, \cdots, M$). 즉 $E_0[q]=\{i \mid Y_i=0\}$, 노우드 q에서 設備i를 閉鎖.

$E_2[q]$: 노우드 q에서 $Y_i=1$ 또는 0으로 決定되지 않은 i의 集合($i=1, 2, \cdots, M$). 즉 $E_2[q]=\{i \mid (E_1[q] \cup E_2[q])^c\}$.

$B[q]$: 노우드 q에서 分岐(Branching out)할 変数Y_r.

$A[q]$: 노우드 q에서 成就函数(Achievement Functon)의 값.

分岐限界過程은 問題의 모든 實行可能解에서 最適解가 나올 可能性이 큰 領域을 反復分割하여, 最終的인 解를 구하는 것으로서, 解法에 의한 反復的인 過程에서 생기는 部分解는 노우드로 表示한 Tree와 形

態로 이루어지며, 어떤 노우드q에 대하여 解에서 除外되는(Explicitly Exculuded) 集合 $E_0(q)$와 包含되는 (Explicitly Included) 集合 $E_1(q)$ 그리고 未決定된 集合 $E_2(q)$의 세가지 形態로 構成된다. 分割過程은 解法의 順予段階에 의해 노우드는 $q=1,2,\cdots$로 일련번호가 부여된 順次的인 計算을 하며, 分割되지 않는 노우드를 終結노우드(Terminal Node)라 한다.

Fiqure 1.의 Tree節次는 노우드 q^*가 現在 最小下限値$A(q^*)$를 갖는다고 할때, 노우드 q^*에서 두개의 노우드 q^1과q^0로 分割하여, 各 노우드는 E_1, E_0, E_2, B, A에 대한 解가 구해진다. 分岐限界節次에서 下限値를 구하기 위하여 0, 1整数條件은 連続変数로 緩和하며, 分岐決定方法은 0.5에 가장 가까운 決定変数 Yr를 択하여 各各 $Y_r=1, Y_r=0$로하는 後続노우드인 二進分岐形態에서 解를 얻는다.

노우드選択方法은 最小下限値(Least Lower Bound)를 갖는 노우드를 選択하며, 下限値 比較時 成就函数의 最優先順位로부터 차례로 比較하여 成就만족의 程度가 큰 노우드가 選択되고, 決定変数 Yi, $i\varepsilon I$가 모두 0 또는 1로 이루어진 集合 $E_2(q)=\phi$ 에서 最適解가 구해진다. 本 解法을 適用키 위하여〔FLAP〕問題를 다음과 같은 修正된 混合二進整数目標計劃法의 問題로 전환한다.

成就函数 : 最小化 $A=\Sigma_{k=1}^{k}\pi_k(n+p)$

制約式

$$\Sigma_{i\varepsilon}(E_1(q)\cup E_2(q))\ \Sigma_{j\varepsilon J}C_{ij}X_{ij}+n-p=B-\Sigma_{i\varepsilon}E_1(q)\ F_iY_i \quad (4)$$

$$\Sigma_{j\varepsilon J}X_{ij}\quad +n-p=S_iY_i\ \forall\ i\varepsilon\ (E_1(q)\cup E_2(q)) \quad (5)$$

$$\Sigma_{i\varepsilon}(E_1(q)\cup E_{22}(q))\ X_{ij}\quad +n-p=D_j\quad \forall\ j\varepsilon J \quad (6)$$

$$Y_i=1 \quad i\varepsilon E_1(q)$$

$$Y_i=0 \quad i\varepsilon E_0(q)$$

$$0<Y_i<1 \quad i\varepsilon E_2(q)$$

$$X_{ij}>0 \quad \forall\ i\varepsilon I, j\varepsilon J$$

$$n, p>0$$

노우드 q에서의 予算残余分, 즉 $B(q)=B-\Sigma_{i\varepsilon}E_1(q)F_iY_i$는 未決定集合 $E_2(q)$에서 選択되어 成就函数에 대한 下限値 LB(q)는 다음과 같다.

$$LB(q)=\Sigma_{k=1}^{k}\pi_k(n+p) \quad (7)$$

〔MFLP〕問題를 解決키위하여 分岐限界節次는 다음과 같이 要約할수 있다(Fiqure 1参照).

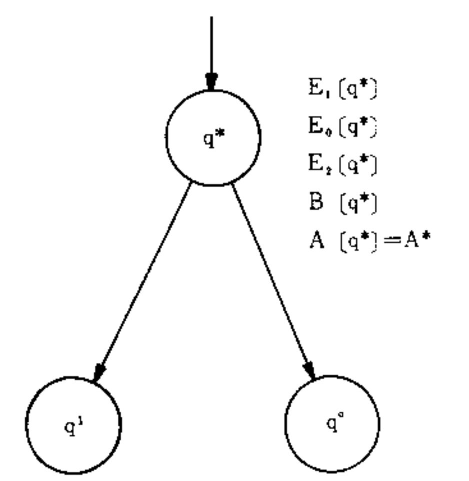
段階 1. 0, 1整数條件을 $0<y_i<1$, $i\varepsilon I$로 緩和한〔MFLAP〕問題를 目標計劃法으로 풀어 노우드 数(Node Number) q=0에서 下限値 A(0)를 구한다. 그리고 集合은 $E_0(q)=\phi$, $E_2(q)=\phi$, $E_1(q)=\{I\}$로 定義되며 分岐決定方法($i\varepsilon E_2(q)$에서 0.5에 가장 가까운 変数 Y_r를 選択)에 의하여 B(q)가 定義된다. 만약 모든 $Y_i, i\varepsilon I$가 0또는 1이면 最適解로서 끝난다.

段階 2. 最小下限法에 의하여 選択된 q^*에서 q^1과q^0의 노우드로 分岐한다.

가) $E_1(q^1)=E_1(q^*)+B(q^*)$, $E_0(q^1)=E_0(q^*)$ $E_2(q^1)=E_2(q^*)-\{B(q^*)\}$인 集合이 定義되어 (7)에 의하여 下限値$A(q^1)$이 구해지며, $B(q^1)$이 決定된다.

나) $E_1(q^0)=E_1(q^0)$, $E_0(q^0)=E_0(q^*)+B(q^*)$ $E_2(q^0)=E_2(q^*)-\{B(q^*)\}$인 集合이 定義되어, 式(7)에 의하여 下限値$A(q^0)$가 구해지며, $B(q^0)$이 決定된다.

段階 3. 두개의 노우드로 分岐한 노우드 q^*는 제거되며 最小値를 갖는 下限에서 集合$E_2(q^*)=\phi$ 일때 노우드 q^*는 最適解로서 끝나며 $E_2(q^*)\neq\phi$인 경우, 段階 2로 가서, 分岐限界節次를 反復 行한다($Y_i=0$일때 実行不可能解가 되면 最適解에서 設備i는 반드시 開設한다).



$E_1(q^1)=E_1(q^*)+\{B(q^*)\}$ | $E_1(q^0)=E_1(q^*)$

$E_0(q^1)=E_0(q^*)$ | $E_0(q^0)=E_0(q^*)+\{B(q^*)\}$

$E_2(q^1)=E_2(q^*)-\{B(q^*)\}$ | $E_2(q^0)=E_2(q^*)-\{B(q^*)\}$

$B\ (q^1)$ | $B\ (q^0)$

$A\ (q^1)$ (From Eq. 7) | $A\ (q^0)$ (From Eq. 7)

Figure 1. Branching Procedure of a Binary Tree

4. 数値例에 의한 解法研究

K社는 産業構造의 再編成에 따라 三輪車生産을하게되어 特定地域에 組立工場의 最適立地選定과 割當量을 同時에 決定하고자 한다. 予備調査를 통해서 다섯곳의 立地候補地와 네곳의 需要対象地域이 設定되었다. 各組立工場의 候補地에 대한 固定費와 設備生産能力, 需要地의 需要量, 그리고 輸送費用 (괄호안 表示)関係는 Table 1과 같다①

Table 1. Illustrative Problem 単位：萬원

固定費	組立工場	需要地域 1	2	3	4	生産能力(台)
160	I	X_{11} (3)	X_{12} (11)	X_{13} (4)	X_{14} (9)	450
150	II	X_{21} (18)	X_{22} (9)	X_{23} (4)	X_{24} (8)	420
125	III	X_{31} (5)	X_{32} (20)	X_{33} (23)	X_{34} (3)	300
130	IV	X_{41} (4)	X_{42} (16)	X_{43} (20)	X_{44} (4)	350
135	V	X_{51} (2)	X_{52} (4)	X_{53} (5)	X_{54} (3)	400
需要量(台)		200	240	160	80	

K社의 意思決定者의 立場은 다음과 같은 優先順位로 目標를 設定하였다.

π_1：各設備에 대한 設備能力을 最大로 提高시킨다.

π_2：各 需要地의 需要量을 100% 만족시킨다.

π_3：道路交通上의 위험성을 고려하여 組立工場 IV→需要地 3의 運行回数를 最小化한다.

π_4：固定費用은 年間 300万원으로 制限한다.

π_5：固定費와 輸送費를 고려한 総予算額은 年間 3,000万원으로 制限한다.

π_6：輸送費用은 年間 2,500万원으로 制限한다.

決定된 目標의 優先順位에 대한 成就函数 및 制約式은 다음과 같다.

成就函数 最小化 $A=\pi_1(\sum_{k=1}^{5} n_k)+\pi_2(\sum_{k=5}^{9} n_k)+\pi_3 P_{10}+\pi_4 P_{11}+\pi_5 P_{12}+\pi_6 P_{13}$

1) π_1

$$\sum_{j=1}^{4} X_{ij}+n_1-p_1=450y_1$$
$$\sum_{j=1}^{4} X_{2j}+n_2-p_2=420y_2$$
$$\sum_{j=1}^{4} X_{3j}+n_3-p_3=300y_3$$
$$\sum_{j=1}^{4} X_{4j}+n_4-p_4=350y_4$$
$$\sum_{j=1}^{4} X_{5j}+n_5-p_5=400y_5$$

各 目標의 制約式에서 n_k(設備能力未成就分)을 最小化($k=1,2,3,4,5$)

2) π_2

$$\sum_{i=1}^{5} X_{i1}+n_6-p_6=200$$
$$\sum_{i=1}^{5} X_{i2}+n_7-p_7=240$$
$$\sum_{i=1}^{5} X_{i3}+n_8-p_8=160$$
$$\sum_{i=1}^{5} X_{i4}+n_9-p_9=80$$

各 目標의 制約式에서 n_k(供給量未成就分)을 最小化($k=6,7,8,9$)

3) π_3

$$X_{43}-p_{10}=0$$

p_{10}(運行回数超過分)을 最小化

4) π_4

$$160y_1+150y_2+125y_3+130y_4+135y_5+n_{11}-p_{11}=300$$

p_{11}(固定費超過分)을 最小化

5) π_5

$$160y_1+150y_2+125y_3+130y_4+135y_5+\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}X_{ij}+n_{12}-p_{12}=3,000$$

p_{12}(総予費用超過分)을 最小化

6) π_6

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}X_{ij}+n_{13}-p_{13}=2,500$$

P_{13}(輸送費用超過分)을 最小化

7) 変数의 定義에 의하여 $0\leqslant y_i\leqslant 1, X_{ij}\geqslant 0$ ($i=1,2,3,4,5,\ j=1,2,3,4$)로 한다.

위 問題를 本 解法의 컴퓨터 프로그램에 適用하여 다음과 같은 結果가 구해진다.

1) 0－1 整変数(Integer Variahles)

$Y_1=1$, 組立工場立地候補地 I을 開設.

$Y_5=1$, 組立工場立地候補地 V을 開設.

2) 供給量変数(Real Variables)

$X_{11}=200$(台), 立地候補地 I에서 需要地 1로 供給할 量.

$X_{12}=80$(台), 立候補地 I에서 需要地 2로 供給할 量.

$X_{52}=160$(台), 立地候補地 V에서 需要地 2로 供給할 量.

$X_{53}=160$(台), 立地候補地 V에서 需要地 3로 供給할 量.

$X_{54}=80$(台), 立地候補地 V에서 需要地 4로 供給할 量.

3) 偏差変数(Deviation Variables)

$P_{12}=455$

$P_{13}=600$

그외 모든 変数들은 0이다.

組立工場 I, V가 最適立地로 選定되어, 組立工場

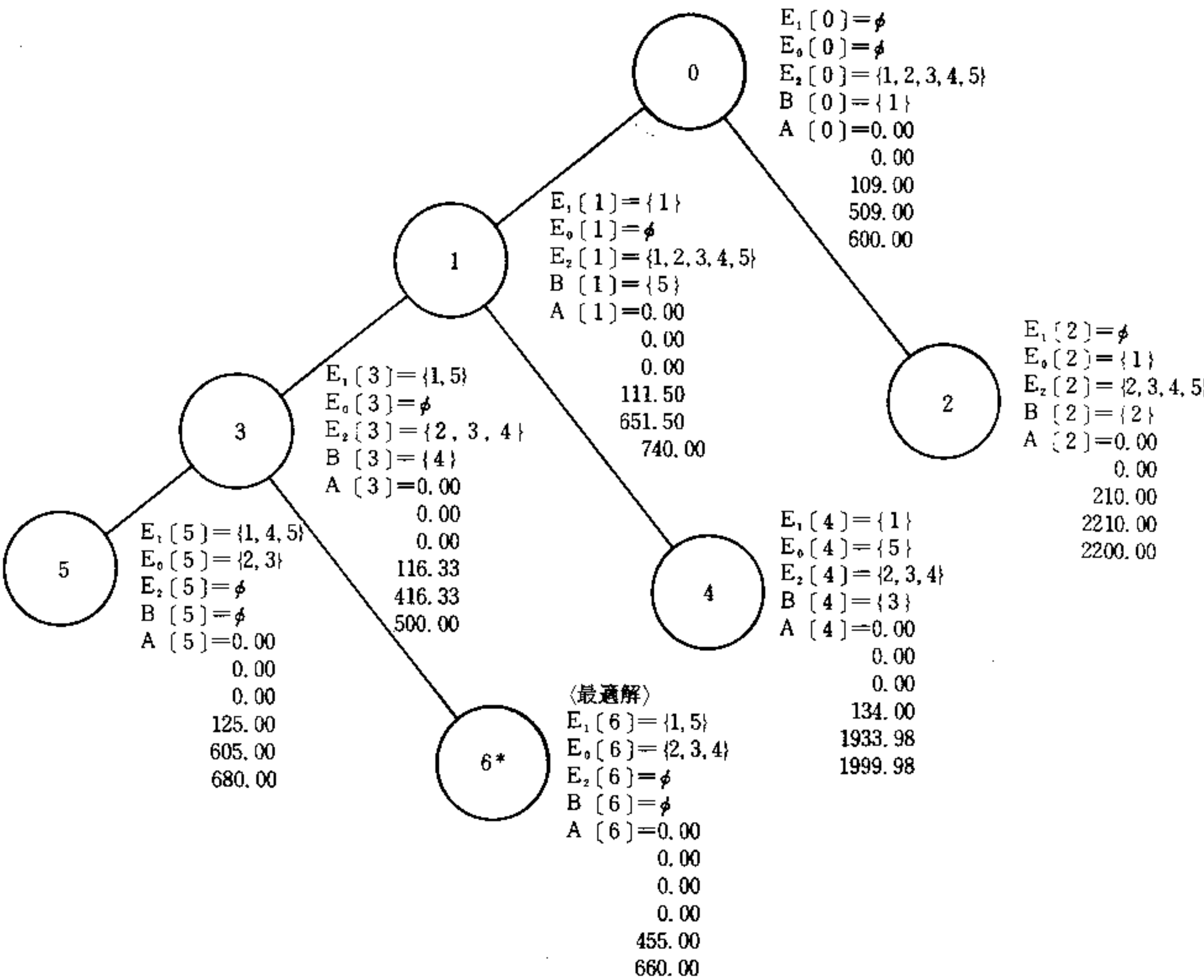


Figure 2. Binary tree for illustrative problem

Ⅰ은 需要地 1,2에 各各 200台, 80台씩 總 280台을 供給하며, 組立工場Ⅴ는 需要地 2,3,4에 各各 160台, 160台, 80台씩 總 400台을 供給한다. 優先順位 π_1, π_2 π_3, π_4의 目標는 完全히 成就되었으며, π_5는 策定된 予算보다 15.2%增加된 34,550,000원의 總費用이 発生하였으며, π_6는 26.4% 增加된 31,600,000원으로 輸送費用이 発生하였다(Figure 2. 参昭).

5. 結 論

本 研究는 単一流通構造에서 多数의 相衝되는 目標를 지닌 設備(工場, 創庫, 流通団地)들의 最適立地 選定과 該當需要地에 消費할 割當量을 同時에 決定하는 問題를 混合二進整数目標計劃法으로 模型化하여 本 問題의 解法을 提示하였다. 本 模型의 解法으로서, 分岐限界過程에서 下限値를 구하기 위하여, 整数條件을 緩和하였으며 分岐方法은 0.5에 가장 가까운 決定変数를 選択하여, 二進分岐의 形態를 이룬다. 数値的 例로서 本 解法의 妥當性을 보였으며, 多数目標를 지닌 類以한 問題의 適用에 좋은 解法이 될 수 있다. 앞으로 単一流通段階에서 擴張된 多段階流通問題로 전환하여, 輸送의 多品種化 그리고 諸費用과 設備能力의 相関을 고려한 多数目標를 지닌 設備의 立地 및 割当에 関한 研究가 必要하다.

參 考 文 献

1. Brown, P.A., and Gibson, D.F., "A Quantified Model for Facility Site Selection -Application to a Multiplant Locatin Problem," *AIIE Transactions*, Vo 4, No. 1, pp. 1-10, 1972.
2. Ellwein, L.B., and Gray, P., "Solving Fixed Charge Location-Allocation problem with Capacity and Configuration Constraints," *AIIE Transactions*, Vol. 3, No. 4, pp. 290-298, 1971.
3. Curry, G.L., and Skeith, R.W., "A Dynamic Programming Algorithm for Facility Location-Allocation," *AIIE Transactions*, Vol. 1, No. 2, pp. 133-137, 1969.
4. Ignizio, J.P., *Goal Programming and Extensions*, Lexington, Mass.: Lexington Books, 1976.
5. Khumalwala, B.M., "An Efficient b & b Algorithm for the Warehouse Location problem," *Man. Sci.*, Vol. 18, No. 12, pp. 718-731, 1972.
6. Mcginnis, L.E., "A Survey of Recent Results for a class of Facilities Location problems," *AIIE Transactions*, Vol. 9, No. 1, pp. 11-18, 1977.