

# 兩端힌지 拋物線아치의 自由振動에 관한 研究

Numerical Analysis of Free Vibration of Parabolic Arches with Hinged Ends

黃 鶴 周\*  
Hwang, Hak Joo  
李 炳 求\*\*  
Lee, Byoung Koo

## Abstract

In this paper, the governing differential equations for the free vibration of uniform parabolic arches are derived on the basis of equilibrium equations of a small element of arch rib and the D'Alembert principle. A trial eigen value method is used for determining the natural frequencies and mode shapes. And the Runge-Kutta fourth order integration technique is also used in this method to perform the integration of the differential equations.

A detailed study is made of the first mode for the symmetrical and anti-symmetrical vibrations of hinged arches with the span length equal to 10 m. The effects of the rise of arch, the radius of gyration and the rotary inertia on free vibrations are presented in detail in curves and table.

## 要 旨

本 研究에서는 아치의 微小要素에 대한 平衡方程式과 D'Alembert의 原理를 利用하여 拋物線아치의 自由振動에 관한 微分方程式을 誘導하였고, 이 微分方程式을 Runge-Kutta 積分技法에 適用하여 數値解析할 수 있는 알고리즘을 開發하였고 이를 컴퓨터 프로그램化 하였다.

數値解析例題로는 아치의 支間길이가 10m인 兩端힌지 아치를 擇하였으며 數値解析의 結果를 分析하여 아치의 높이, 回轉半徑 및 回轉慣性이 拋物線아치의 自由振動에 미치는 影響에 대하여 考察하였다.

## 1. 序 論

### 1.1. 研究의 目的 및 範圍

아치는 構造的으로 매우 理想的인 일 뿐만 아니

\*正會員·延世大學校 工科大學 土木工學科 教授

\*\*正會員·圓光大學校 土木工學科 助教授

라 그 美的 感覺때문에 옛부터 많은 構造物에 應用이 되고 있다<sup>(1)</sup>. 아치의 靜的舉動에 대해서는 여러 學者들에 의하여 훌륭한 論文<sup>(2,3,4)</sup>들이 많이 發表되었으나 實際問題에서 아치에는 靜荷重뿐만 아니라 動荷重도 作用하고 있기 때문에 아치의 動的 舉動도 並行하여 研究되어야 할 것이다.

아치의 自由振動에 관한 研究는 많은 參考文獻<sup>(5,6,7,8)</sup>들에서 찾아 볼 수 있지만 大部分이 理論의 展開가 容易한 圓弧아치를 研究의 對象으로 하고 있다. 이러한 觀點에서 本論文에서는 拋物線아치를 研究의 對象으로 하였다.

本論文은 兩端힌지 拋物線아치의 自由振動特性을 把握하는 데에 그 目的이 있으며, 研究의 範圍는

(1) 拋物線아치의 自由振動에 관한 微分方程式의 誘導

(2) 이를 數值解析할 수 있는 알고리즘의 開發

(3) 一連의 數值例를 통한 兩端힌지 拋物線아치의 自由振動的 特性把握에 있다.

### 1.2. 關係文獻考察

아치의 平面振動에 관한 研究에는 다음과 같은 3가지의 接近方法이 있다<sup>(9)</sup>.

- (1) 運動微分方程式의 代數的 解法
- (2) Rayleigh-Ritz 方法
- (3) 運動微分方程式의 數值解析의 方法

첫번째 方法은 Waltking, Morley, Archer 및 Federhofer 등이 研究하였고, 特히 Archer는 剪斷變形과 回轉慣性を 無視하고 減衰效果를 考慮한 圓弧아치의 振動에 대하여 研究하였다. 둘째 方法은 Den Hartog 및 Nelson 등이 剪斷變形과 回轉慣性を 無視한 아치의 振動에 대하여 研究하였다. 세번째 方法은 本 研究에서와 같은 數值解析의 方法으로 Eppink와 Veletsos 등이 研究하였으며 特히 이들은 固有角振動數를 計算하기 위하여 遂次近似法을 發展시켰다.

### 1.3. 記號

本論文에서 使用한 記號는 다음과 같다.

1) 英文字

$A$ : 아치의 斷面積

$a_1 \sim a_{22}$ :  $x$ 의 變數

$C_2, C_3$ : 常數

$D$ : 行列變

$E$ : 彈性係數

$F$ : 無次元振動數媒介變數 $\left(\frac{mp^2r^2}{EA}\right)$

$h$ : 아치의 높이

$I$ : 아치의 斷面 2次모멘트

$k$ : 常數 $(-4h/l^2)$

$l$ : 아치의 支間길이

$M$ : 휨 모멘트

$m$ : 아치의 單位길이당 質量

$P_s$ : 아치接線方向의 單位길이당 慣性力

$P_r$ : 아치曲率中心方向의 單位길이당 慣性力

$P$ : 固有角振動數(rad/sec)

$Q$ : 剪斷力

$R$ : 回轉慣性指標

$r$ : 回轉半徑 $(\sqrt{I/A})$

$v$ : 아치圖心軸의 임의점에서 接線方向의 振幅

$vA, vB$ : 微分方程式을 一階微分方程式으로 表示하기 위한 記號( $v', v''$ )

$w$ : 아치圖心軸의 임의점에서 曲率中心方向의 振幅

$wA, wB, wC$ : 微分方程式을 一階微分方程式으로 表示하기 위한 記號( $w', w'', w'''$ )

$x, y$ : 直交座標系

2) 그리스 文字

$\rho$ : 아치圖心軸의 임의점에서 曲率半徑

$\phi$ : 아치圖心軸의 임의점에서 曲率中心方向과 水平軸이 이루는 角度

$\psi$ : 아치斷面의 回轉角

## 2. 基本微分方程式과 境界條件

### 2.1. 平衡方程式

그림 1과 같이 아치의 頂點을 中心으로 對稱인 拋物線아치의 平面自由振動에 대하여 생각한다. 이때 아치 圖心軸의 方程式은 다음과 같이 表示된다.

$$y = kx(x-l) \quad (1)$$

여기서

$$k = -4h/l^2 \quad (2)$$

아치가 振動하게 되면 아치 圖心軸上의 임의점  $(x, y)$ 의 位置는 一定한 週期를 갖고 變하게 되는데 이 때 接線方向의 振幅을  $v$ , 曲率中心方向의 振幅을  $w$ 라 하고,  $v$ 와  $w$ 는 그림 1과 같

## 2.2. 合應力 및 D'Alembert의 慣性力

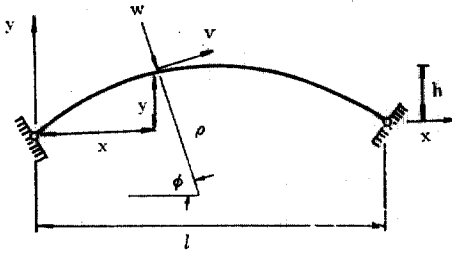


그림 1. Configuration of parabolic arch and displacement notations.

이 화살표의 方向을 (+)로 하며  $x$  만의 函數이다.

本 研究에서는 아치의 平面振動만을 考慮하기 때문에 아치의 임의 斷面에는  $N, M$  및  $Q$ 가 作用하게 된다. 그림 1에서 任意斷面の 曲率中心 方向과 水平軸이 이루는 角度를  $\phi$ , 曲率半徑을  $\rho$ 라 하고, 그림 2와 같이 微小中心角  $d\phi$ 를 갖는 아치의 微小要素에 대한 平衡을 생각한다.

이 微小要素에는 前述한  $N, M, Q$  및  $v$ 와  $w$ 에 依한 慣性力  $P_s, P_r$ 와 斷面回轉에 의한 回轉 慣性偶力  $T$ 가 作用한다. 이 微小要素에 대한 接線方向과 曲率中心方向의 힘에 대한 平衡方程式과 모멘트에 대한 平衡方程式을 세우면 다음과 같다.

$$\frac{dN}{d\phi} - Q + \rho P_s = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dQ}{d\phi} + N + \rho P_r = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\phi} - Q - T = 0 \quad (5)$$

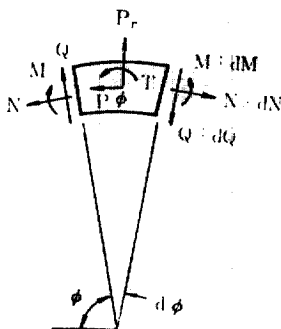


그림 2. Stress Resultant

아치의 一般理論에서 그림 1과 같이 아치 圖心軸上 任意點의 曲率半徑을  $\rho$ , 角座標를  $\phi$ , 이 점의 接線方向의 처짐을  $v$ , 曲率中心方向의 처짐을  $w$ 라 하면 이 斷面に 作用하는  $N$ 과  $M$ 을  $v$ 와  $w$ 에 관한 微分으로 表示하면 다음과 같다<sup>(10)</sup>.

$$N = \frac{EA}{\rho} \left( \frac{dv}{d\phi} + w \right) \quad (6)$$

$$M = \frac{EA r^2}{\rho^2} \left( \frac{d^2 w}{d\phi^2} + w \right) \quad (7)$$

(7)式에서  $r$ 은 다음 式과 같다.

$$r^2 = \frac{I}{A} \quad (8)$$

또 斷面の 回轉角  $\psi$ 는 다음 式과 같이 表示된다<sup>(11)</sup>.

$$\psi = \frac{1}{\rho} \left( \frac{dw}{d\phi} - v \right) \quad (9)$$

아치는 다음 式들로 주어지는 調和振動을 한다 고 假定한다.

$$\begin{aligned} W(\phi, t) &= W(x, t) \\ &= W \sin(Pt + \alpha) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} V(\phi, t) &= V(x, t) \\ &= v \sin(Pt + \alpha) \end{aligned} \quad (11)$$

(10), (11)式에서  $w, v$ 는  $\phi$  또는  $x$ 만의 函數이며 이를 基準函數라 하고  $P$ 는 固有角振動數이다.

아치가 振動을 하여 아치의 變位가 振幅의 變位  $w$  및  $v$ 로 되었을 때 아치의 微小要素에는 다음의 慣性力이 發生한다<sup>(12)</sup>.

$$P_s = m\rho^2 v \quad (12)$$

$$P_r = m\rho^2 w \quad (13)$$

여기서  $m$ 은 아치의 單位길이당 質量이다. 또 斷面の 回轉角  $\psi$ 에 依하여 發生하는 單位길이당 回轉慣性偶力  $T$ 는 다음과 같이 表示된다<sup>(13)</sup>.

$$\begin{aligned} T &= m \frac{I}{A} \rho^2 \psi \\ &= \frac{m\rho^2 r^2}{\rho} \left( \frac{dv}{d\phi} - v \right) \\ &= R \frac{m\rho^2 r^2}{\rho} \left( \frac{dv}{d\phi} - v \right) \end{aligned} \quad (14)$$

(14)式에서  $R$ 은 回轉慣性의 考慮여부를 나타내는 指標로서  $T$ 를 考慮하는 境遇에  $R=1$ .이고,  $T$ 를 考慮하지 않는 境遇에  $R=0$ .이다.

2.3. 微分方程式의 解導

(3)~(4)式의  $\phi$ 에 대한 微分方程式을 拋物線 아치에 適用시키기 위하여  $\phi$ 를  $x$ 에 관한 函數로 變換하여야 한다. 拋物線의 方程式  $y=kx(x-l)$ 에서 任意點  $(x, y)$ 에 대한  $\rho$ 와  $\phi$ 를  $x$ 에 관한 函數로 表示하면 다음과 같다.

$$\rho = -\frac{[1+k^2(2x-l)^2]^{3/2}}{2k} \quad (15)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(2kx - kl) \quad (16)$$

(16)式을 微分하면 다음의 (17)式을 얻을 수 있다.

$$d\phi = -\frac{2k}{1+k^2(2x-l)^2} dx \quad (17)$$

(17)式을 利用하면  $\phi$ 에 관한 微分을 다음 式들과 같이  $x$ 에 관한 微分으로 變換할 수 있다.

$$\frac{dw}{d\phi} = -\frac{1+k^2(2x-l)^2}{2k} \frac{dw}{dx} \quad (18)$$

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} = \frac{1+k^2(2x-l)^2}{2k} \left[ 2k(2x-l) \frac{dw}{dx} + \frac{1+k^2(2x-l)^2}{2k} \frac{d^2w}{dx^2} \right] \quad (19)$$

$$\frac{dv}{d\phi} = -\frac{1+k^2(2x-l)^2}{2k} \frac{dv}{dx} \quad (20)$$

(15), (18), (19), (20)式을 (6), (7), (14)式에 代入하여  $N, M, T$ 를  $x$ 에 관한 微分으로 置換한 후에 이  $x$ 에 관한 微分으로 表示된  $N, M, T$ 式과 (12), (13)式을 (3), (4), (5)式에 代入하여  $Q$ 를 消去하면 拋物線아치의 自由振動에 관한 微分方程式인 (21), (22)式을 얻을 수 있다. 이때 (3), (4), (5)式의  $\rho$  및  $d\phi$ 는 (15), (17)式으로 置換한다.

$$\begin{aligned} w''' &= a_1 w'' + \left( a_2 + \frac{RF}{r^2} a_3 \right) w'' \\ &+ \left( a_4 + \frac{RF}{r^2} a_5 \right) w' + \left( a_6 + \frac{a_7}{r^2} \right. \\ &+ \frac{F}{r^4} a_8 \left. \right) w + a_9 v'' + \left[ a_{10} + \frac{2k}{r^2} \right. \\ &\left. (RF-1) \right] v' + \left( a_{11} + \frac{RF}{r^2} a_{12} \right) v \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} v'' &= r^2 a_{13} w'' + \left[ \frac{a_{14}}{r^2} + (1-RF) a_{15} \right] w' \\ &+ (a_{16} + r^2 a_{17}) w + (a_{18} + r^2 a_{19}) v' \end{aligned}$$

$$+ \left( r^2 a_{20} + \frac{F}{r^2} a_{21} + F a_{22} \right) v \quad (22)$$

(21), (22)式에서 프라임(')은  $x$ 에 관한 微分이고,  $F$ 는 (23)式으로 表示되는 無次元振動數媒介變數이며 境界條件을 滿足하는  $F$  값으로부터 固有角振動數  $\rho$ 를 計算할 수 있다.

$$F = \frac{m \rho^2 r^2}{EA} \quad (23)$$

또 (21), (22)式에서  $a_1 \sim a_{22}$ 는 다음 式들로 주어지는  $x$ 에 관한 變數이다.

$$a_1 = \frac{6k^2(2x-l)}{1+k^2(2x-l)^2} \quad (24)$$

$$a_2 = \frac{-12k^2+24k^4(2x-l)^4}{[1+k^2(2x-l)^2]^2} \quad (25)$$

$$a_3 = -1-k^2(2x-l)^2 \quad (26)$$

$$a_4 = \frac{(2x-l)[312k^4-240k^6(2x-l)^2]}{[1+k^2(2x-l)^2]^3} \quad (27)$$

$$a_5 = 2k^2(2x-l) \quad (28)$$

$$a_6 = \frac{96k^4-768k^6(2x-l)^2}{[1+k^2(2x-l)^2]^4} \quad (29)$$

$$a_7 = \frac{-4k^2}{1+k^2(2x-l)^2} \quad (30)$$

$$a_8 = [1+k^2(2x-l)^2]^2 \quad (31)$$

$$a_9 = \frac{-12k^3(2x-l)}{[1+k^2(2x-l)^2]^2} \quad (32)$$

$$a_{10} = \frac{-48k^3+264k^5(2x-l)^2}{[1+k^2(2x-l)^2]^2} \quad (33)$$

$$a_{11} = \frac{(2x-l)[912k^5-1680k^7(2x-l)^2]}{[1+k^2(2x-l)^2]^4} \quad (34)$$

$$a_{12} = \frac{-12k^3(2x-l)}{1+k^2(2x-l)^2} \quad (35)$$

$$a_{13} = \frac{2k}{[1+k^2(2x-l)^2]^2} \quad (36)$$

$$a_{14} = \frac{24k^3-48k^5(2x-l)^2}{[1+k^2(2x-l)^2]^4} \quad (37)$$

$$a_{15} = \frac{-2k}{1+k^2(2x-l)^2} \quad (38)$$

$$a_{16} = \frac{12k^3(2x-l)}{[1+k^2(2x-l)^2]^2} \quad (39)$$

$$a_{17} = \frac{-96k^5(2x-l)}{[1+k^2(2x-l)^2]^5} \quad (40)$$

$$a_{18} = \frac{2k^2(2x-l)}{1+k^2(2x-l)^2} \quad (41)$$

$$a_{19} = \frac{24k^4(2x-l)}{[1+k^2(2x-l)^2]^4} \quad (42)$$

$$a_{20} = \frac{48k^4-240k^6(2x-l)^2}{[1+k^2(2x-l)^2]^5} \quad (43)$$

$$a_{21} = -1 - k^2(2x-l)^2 \quad (44)$$

$$a_{22} = \frac{-4k^2}{[1+k^2(2x-l)^2]^2} \quad (45)$$

拋物線아치에서 아치의 높이  $h$ 가 0으로 收斂하게 되면 拋物線아치는 보로 收斂한다.  $h=0$ 이므로  $k=0$ 를 (24)~(45)式에 代入한 후에 이를 (21), (22)式에 代入하여 整理하면 보의 自由振動에 관한 微分方程式인 (46), (47)式을 얻을 수 있다.

$$w''' = -\frac{RF}{r^2}w'' + \frac{F}{r^2}w \quad (46)$$

$$v'' = -\frac{F}{r^2}v \quad (47)$$

(46), (47)式은 各各 보의 自由橫振動과 自由縱振動에 대한 微分方程式을 나타내는 것으로 參考文獻<sup>(14,15)</sup>들의 結果와 正確하게 一致되는 것을 알 수 있다.

#### 2.4. 境界條件

##### 1) 아치端의 境界條件

$x=0$ 에서의 境界條件은 다음과 같다.

$$w=0 \quad (48)$$

$$v=0 \quad (49)$$

$$M=0 \quad (50)$$

(7)式에 (19)式을 代入하면, (48)式에서  $w=0$ 이고  $x=0$ 이므로 (50)式은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w' - \frac{1+k^2l^2}{4k^2l}w'' = 0 \quad (51)$$

##### 2) 아치頂의 境界條件

$x=\frac{l}{2}$ 에서의 境界條件은 對稱振動과 逆對稱振動으로 區分하여 생각한다<sup>(16)</sup>.

##### ① 對稱振動

$$w'=0 \quad (52)$$

$$v=0 \quad (53)$$

$$w'''=0 \quad (54)$$

##### ② 逆對稱振動

$$w=0 \quad (55)$$

$$v'=0 \quad (56)$$

$$w''=0 \quad (57)$$

### 3. 數值解析方法 및 數值例

#### 3.1. 微分方程式의 變形

微分方程式의 數值解析의 方法에는 여러가지 方法이 있으나 振動問題에서 많이 應用되고 있으며 精度가 높은<sup>(17)</sup> Runge-Kutta 積分技法<sup>(19)</sup>을 利用하기로 한다. 本 研究에서의 拋物線아치의 自由振動에 관한 微分方程式인 (21), (22)式을 Runge-Kutta 積分技法에 適用하여 數值解析하려면 一階의 微分方程式으로 變形하여야 한다.

$$w' = wA \quad (58)$$

$$wA' = wB \quad (59)$$

$$wB' = wC \quad (60)$$

$$wC' = a_1wC + \left(a_2 + \frac{RF}{r^2}a_3\right)wB + \left(a_4 + \frac{RF}{r^2}a_5\right)wA + \left(a_6 + \frac{a_7}{r^2} + \frac{F}{r^4}a_8\right)w + a_9vB + \left[a_{10} + \frac{2k}{r^2}(RF-1)\right]vA + \left(a_{11} + \frac{RF}{r^2}a_{12}\right)v \quad (61)$$

$$v' = vA \quad (62)$$

$$vA' = r^2a_{13}wB + \left[\frac{a_{14}}{r^2} + (1-RF)a_{15}\right]wA + (a_{16} + r^2a_{17})w + (a_{18} + r^2a_{19})vA + \left(r^2a_{20} + \frac{F}{r^2}a_{21} + Fa_{22}\right)v \quad (63)$$

#### 3.2. 數值解析過程

微分方程式의 數值解析過程을 簡單히 說明하면 다음과 같다.

1) (58)~(63)式의 微分方程式을 Runge-Kutta 積分技法에 適用하기 위해서는 6個의 初期條件이 必要하나 實際의 初期條件은 아치端의 境界條件 (48), (49), (51)式의 3個뿐이므로 이 3式을 滿足하는 6個의 初期條件을 3雙 假定한다. 本 研究에서는 다음과 같이 假定하였다. (61)式에서  $vB$ 는  $v''$ 이므로 (22)式에 의하여 計算한다.

2)  $F$  값을 假定하여 1)에서 假定한 3雙의 初期條件을 Runge-Kutta 積分技法에 適用하여 任意  $x$ 座標에 대한  $w(x)$ ,  $wA(x)$ ,  $wB(x)$ ,  $wC(x)$ ,  $v(x)$  및  $vA(x)$ 의 값을 3雙의 初期條件別

	w	wA	wB	wC	v	vA
1	0	$\frac{1+k^2l}{4k^2l}$	1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	1

로 計算한다.

3) 1)에서 初期條件을 假定한 結果로 實際아치의 自由振動에서  $w(x)$  및  $v(x)$ 는 다음 式으로 表示된다.

$$w(x) = w_1(x) + C_2 w_2(x) + C_3 w_3(x) \quad (64)$$

$$v(x) = v_1(x) + C_2 v_2(x) + C_3 v_3(x) \quad (65)$$

여기서 1, 2, 3은 假定 1, 2, 3에 대한 添字이며  $C_2, C_3$ 는 아치頂의 境界條件으로부터 求해지는 常數이다.

4) 2)에서 假定한  $F$  값이 自由振動에 대한 固有한 값이라면 아치頂( $x = \frac{l}{2}$ )의 境界條件을 다음 式과 같이 滿足하여야 한다.

### ① 對稱振動式

$$wA\left(\frac{l}{2}\right) = wA_1\left(\frac{l}{2}\right) + C_2 wA_2\left(\frac{l}{2}\right) + C_3 wA_3\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad (66)$$

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = v_1\left(\frac{l}{2}\right) + C_2 v_2\left(\frac{l}{2}\right) + C_3 v_3\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad (67)$$

$$wC\left(\frac{l}{2}\right) = wC_1\left(\frac{l}{2}\right) + C_2 wC_2\left(\frac{l}{2}\right) + C_3 wC_3\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad (68)$$

(66), (67), (68)式에서  $C_2, C_3$ 의 解가 存在하기 위해서는 즉 2)에서 假定한  $F$  값이 自由振動의 固有한 값이라면 다음 式을 滿足하여야 한다.

$$D = \begin{vmatrix} wA_1\left(\frac{l}{2}\right) & wA_2\left(\frac{l}{2}\right) & wA_3\left(\frac{l}{2}\right) \\ v_1\left(\frac{l}{2}\right) & v_2\left(\frac{l}{2}\right) & v_3\left(\frac{l}{2}\right) \\ wC_1\left(\frac{l}{2}\right) & wC_2\left(\frac{l}{2}\right) & wC_3\left(\frac{l}{2}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (69)$$

### ② 逆對稱振動

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = w_1\left(\frac{l}{2}\right) + C_2 w_2\left(\frac{l}{2}\right) + C_3 w_3\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad (70)$$

$$vA\left(\frac{l}{2}\right) = vA_1\left(\frac{l}{2}\right) + C_2 vA_2\left(\frac{l}{2}\right) + C_3 vA_3\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad (71)$$

$$wB\left(\frac{l}{2}\right) = wB_1\left(\frac{l}{2}\right) + C_2 wB_2\left(\frac{l}{2}\right) + C_3 wB_3\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad (72)$$

마찬가지로  $C_2, C_3$ 의 解가 存在하기 위해서는 다음 式을 滿足하여야 한다.

$$D = \begin{vmatrix} w_1\left(\frac{l}{2}\right) & w_2\left(\frac{l}{2}\right) & w_3\left(\frac{l}{2}\right) \\ vA_1\left(\frac{l}{2}\right) & vA_2\left(\frac{l}{2}\right) & vA_3\left(\frac{l}{2}\right) \\ wB_1\left(\frac{l}{2}\right) & wB_2\left(\frac{l}{2}\right) & wB_3\left(\frac{l}{2}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (73)$$

만일 2)에서 假定한  $F$  값에 대하여  $D \neq 0$ 이면  $F$  값을  $F + \Delta F$ 로 다시 假定하여 위의 過程을 反復하여  $D = 0$ 인  $F$  값을 찾는다.

5)  $F_1 = F, F_2 = F + \Delta F$ 에 대한  $D$  값을  $D_1, D_2$ 라 할 때  $D_1 \cdot D_2 < 0$ 이면  $F_1$ 과  $F_2$  사이에  $D = 0$ 를 滿足하는  $F$  값이 存在하므로 새로운  $F_3$  값을 다음 式으로 修正하여 Runge-Kutta 積分技法에 適用한다.

$$F_3 = \frac{F_2 |D_1| + F_1 |D_2|}{|D_1| + |D_2|} \quad (74)$$

6) 4)에서 正確하게  $D = 0$ 인  $F$  값을 찾을 수 없으므로 다음의 誤差의 限界를 만족하면  $D = 0$ 으로 간주한다.

$$|D| < 0.00001 \quad (75)$$

7) 이상의 過程에서 (75)式을 만족하는  $F$  값을 찾으면 對稱振動에서는 (66)~(68)式의 逆對稱振動에서는 (70)~(72)式의 聯立方程式을 풀어서  $C_2, C_3$ 의 값을 求하면 (64), (65)式에 의하여 自由振動의 mode shape  $v$ 와  $w$ 를 計算할 수 있다.

以上の 本 研究에서 開發한 數值解析 알고리즘을 컴퓨터 프로그래밍 하였고 本 研究에서의 모든 數值解는 延世大學校의 HP 3000 시스템의 電子計算機를 利用하였다.

### 3.3. 數值解析例

本 研究에서 誘導한 拋物線아치의 自由振動에 관한 基本 微分方程式과 이를 數值解析할 수 있

는 알고리즘을 實際問題에 適用하기 위하여  $l=10$  m인 한지아치를 例題로 擇하여 數值解析하였고 그 結果를 그림 3~그림 6과 表 1에 나타내었다.

그림 3은 아치支間  $\frac{1}{2}$ 의 分割數에 따른  $F$ 의 收斂過程을 나타내는 것으로 이 그림이 보여 주는 바와 같이 對稱振動인 境遇에는 50分割에서, 逆對稱振動인 境遇에는 分割數에 상관없이 充分한 精度(유효숫자 3자리)로 收斂하였다. 따라서 例題의 數值解析은 아치支間  $\frac{1}{2}$ 의 分割數를 50으로 하여 計算하였다.

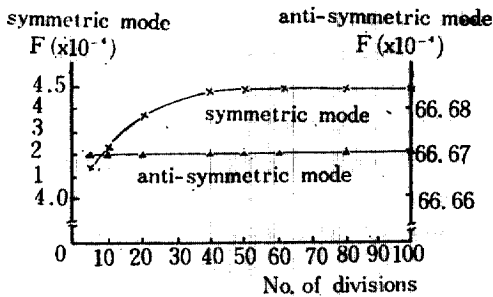


그림 3. Convergence of the numerical solutions as the no. of divisions ( $l=10$  m,  $h=3.42$  m,  $r=0.2$  m,  $R=1$ , first frequency)

그림 4는 對稱振動과 逆對稱振動的 振幅을 연결한 mode shape의 例를 보여주는 것이다.

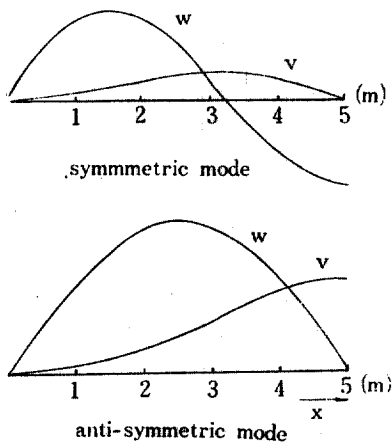


그림 4. Mode shapes ( $l=10$  m,  $h=3.42$  m,  $r=0.2$  m,  $R=1$ , first frequency)

그림 5는 無次元振動數媒介變數  $F$ 와 아치의 높이  $h$ 와의 關係를 나타낸 것으로 對稱振動的 境遇에는  $h=2.42$  m에서  $F$ 의 最大값을 가지며 逆對稱振動的 境遇에는  $h$ 가 增加함에 따라서  $F$  값은 減少함을 알 수 있다.

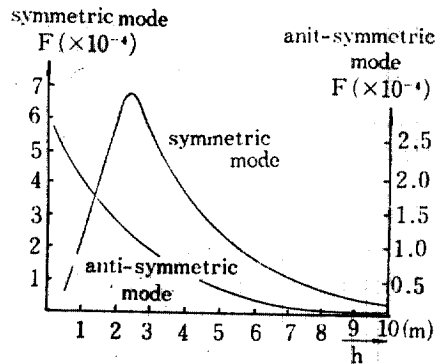


그림 5. Relationship between  $F$  and  $h$  ( $l=10$  m,  $r=0.2$  m,  $R=1$ , first frequency)

그림 6은 無次元振動數媒介變數  $F$ 와 回轉半徑  $r$ 의 關係를 나타낸 것으로, 對稱振動이나 逆對稱振動이나 모두  $r$  값이 增加함에 따라서  $F$  값도 增加함을 알 수 있다.

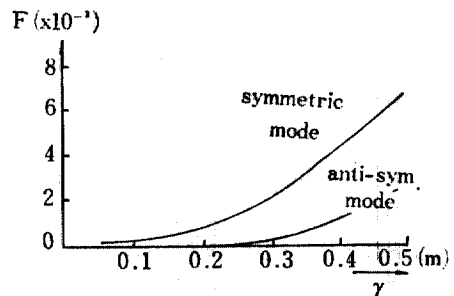


그림 6. Relationship  $F$  and  $r$  ( $l=10$  m,  $h=3.42$  m,  $R=1$ , first frequency)

表 1은 回轉慣性이 自由振動에 미치는 影響을 나타낸 것으로 그 영향은  $-1.75\% \sim 0.16\%$ 로서 약 2%미만인 것을 알 수 있으며 회전관성이 보의 自由振動에 미치는 영향 2%<sup>(19)</sup>와 비슷한 수준임을 알 수 있다.

#### 4. 結 論

本 研究는 兩端한지 拋物線아치의 自由振動에 관한 研究로서 이 研究를 통하여 얻어진 結論은

表 1. Effect of rotary inertia on vibration ( $l=10\text{ m}$ ,  $h=3.42\text{ m}$ ,  $r=0.2\text{ m}$ , first frequency)

mode	比較值	回轉慣性 不考慮(A)	回轉慣性 考慮(B)	$\frac{B}{A}$ (%)	誤差**(%)
對稱 振動	$F$	$4.5593 \times 10^{-4}$	$4.4793 \times 10^{-4}$	98.25	-1.75
	$w^*$	2.504	2.508	100.16	0.16
	$v^*$	1.057	1.057	100.	0.
逆對稱 振動	$F$	$6.7169 \times 10^{-5}$	$6.6748 \times 10^{-5}$	99.37	-0.63
	$w^*$	6.721	6.723	100.03	0.03
	$v^*$	1.648	1.648	100.	0.

\* $x=2.5\text{ m}$ 에서의 相對的 크기

\*\* $B/A-100$ .

다음과 같다.

1) 拋物線아치의 自由振動에 관한 微分方程式을 誘導하였으며, 이 微分方程式은 (21), (22)식과 같다.

2) 이 微分方程式을 Runge-Kutta 積分技法에 適用하여 數值解析할 수 있는 알고리즘을 開發하였고, 이를 컴퓨터 프로그램化 하였다.

實際의 數值解析例를  $l=10\text{ m}$ 인 힌지아치에 適用시킨 結果를 分析하여 다음의 사실을 알았다.

3) 아치支間の  $\frac{1}{2}$ 을 50 分割하여 數值解析할 때 數值解는 充分한 精度로 收斂하였다.

4)  $F$  값은 對稱振動에서는  $h=2.42\text{ m}$ 에서 最大값을 가지며, 逆對稱振動에서는  $h$  값이 增加함에 따라서 감소한다.

5)  $F$  값은 對稱振動에서나 逆對稱振動에서나  $r$  값이 增加함에 따라서 增加한다.

6) 回轉慣성이 自由振動에 미치는 影響은 -1.75%~0.16%程度임을 알았다.

앞으로 더 많은 數值例題를 통하여 拋物線아치의 自由振動特性을 더 광범위하게 把握하고 이를 實驗値와 比較할 수 있도록 實驗的인 研究가 繼續되어야 할 것이다.

#### 參 考 文 獻

1. 黃鶴周, 水平橫荷重을 받는 圓弧아치에 대하여, 大韓土木學會誌, 第15卷 3號, 1967, pp.23.
2. 黃鶴周, 水平橫荷重을 받는 Arch의 變位에 대하여, 大韓土木學會誌, 第16卷 2號, 1968, pp.57~60.
3. Varerian Leontovich, *Frames and Arches*, McGraw-Hill, 1974.
4. Alfred L. Prame and Eugene P. Holland, Parabolic Arches of Variable Thickness, *Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 104, No. ST8*, 1964, pp.65.
5. 李炳求, 兩端固定圓弧아치의 振動에 관한 研究, 延世大學校大學院碩士學位論文, 1975, pp.11.
6. Nelson F.C., In-Plane Vibration of a Simply Supported Circular Ring Segment, *Int. J. Mech. Sci., Vol. 4*, 1962, pp.517~527.
7. Carlos Antonio Lopes Pereira, Free Vibration of Circular Arches, *M.S. Thesis, Rice University, Texas, U.S.A.*, 1968.
8. Walter J. Austin and Anestis S. Veletsos, Free Vibration of Arches Flexible in Shear, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, No. EM4*, 1973, pp.735~753.
9. 李炳求, 黃鶴周, 李元福, 兩端固定圓弧아치의 平面內 固有振動에 관한 研究, 延世大學校產業技術研究所論文集, 第六輯, 1975, pp.65.
10. Josef Henrych, *The Dynamic of Arches and Frames*, Elsevier Scientific Publishing Company, 1981, pp.21~33.
11. Shyr-jen Wung, Vibration of Hinged Circular Arches, *M.S. Thesis, Rice University, Texas, U.S.A.*, 1967, pp.7.
12. Shyr-jen Wung, *ibid.*, pp.10.
13. Ray W. Clough and Joseph Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 1975, pp.298~301.
14. G.B. Warburton, *The Dynamical Behaviour of Structures*, Pergamon Press, 1976, pp.115~117.



15. S. Timoshenko, D.H. Young and W. Weaver Jr., *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, 1974, pp.364~366.
16. 日本土木學會, 構造力學公式集, 技報堂, 1979, p.271.
17. R.W. Hamming, *Numerical Method for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, 1973, pp. 413~414.
18. William T. Thomson, *Theory of Vibration with Application*, Prentice Hall Inc., 1974, pp. 117~118.
19. S. Timoshenko, D.H. Young and W. Weaver, *ibid.*, pp.435.

(接受: 1984. 1. 19)