

沖積河川の河床變動에 관한 數値解析

A Numerical Analysis of River-bed Variation in Alluvial Stream

朴 定 應*
Park, Jung Eng

Abstract

This paper is to exhibit the numerical analysis of sediment transport in the slowly varying flow and the sediment transport relation between the steady and the unsteady flow in the alluvial stream. The gradually varied flow of alluvial stream and the sediment transport are very complicated physical phenomenon. Therefore the mathematical modeling is needed to be established. Linear implicit means of modified indirect method are applied to sediment transport by numerical analysis instead of the conception of steady flow in order to decrease errors. Further more, this study has purpose on reasonable prediction of the river-bed variation by way of this numerical method.

要 旨

沖積河川에서 定流, 不定流 상태에서의 퇴적물 移動現象과 漸變流 상태에서의 流砂移動에 대한 數値解析方法을 提示하였다. 沖積河川の 漸變流 상태 및 土砂移動現象은 상당히 복잡한 物理現象으로 이 때문에 이에 관련된 數學的인 모델의 설정이 必要하다. 流砂移動에 대하여, 從前에 이용한 定流概念보다는 數値解析方法으로 修正間接法의 線形完全陰解法을 適用함으로써 實際現象과의 誤差를 줄일 수 있다.

더나아가 沖積河川에 있어서 漸變流의 개념을 發展시켜 數値解析의 精度를 높이고 實用化함으로써 河床變動을 合理的으로 豫測할 수 있을 것으로 期待된다.

1. 序 論

最近에 있어서 國土開發事業, 工業團地造成事業 등 公共土木事業의 급진적인 擴大에 따라 河川에서의 骨材採取量의 急増은 河川의 自然力에 의한 土砂移動量을 훨씬 超過하고 있으며 이에 따라 河床低下로 護岸이나 橋脚 등의 피해가 잇

따르고 있다. 그러나 이와 같은 河床低下는 洪水의 疏通能力의 增大와 天井川의 解消 및 內水排除의 促進 등의 이익을 招來하는 面도 있다.

一般的으로 沖積河川은 모두 堆積物을 隨伴하고 또 河床에 대하여 沖蝕性을 갖고 있는데 반해 實地는 設計流量에 의해서만 工事를 設計하기 때문에 강물이 흐르는 部分에 沖積되거나 깎겨 내려간다.^{(2),(3)} 그러므로 工事期間內에 豫상했던 바의 目的을 達成하지 못하므로 治水工程은

*正會員·京畿工業開發大學 敎授

만드시 堆積物 問題를 考慮해야 한다. (2) 비록 지금까지는 堆積物과 물의 흐름간의 力學關係가 완전히 밝혀지지 않은 것은 아니나, 만약 特定河川에 대하여 有效한 堆積物 觀測統計值가 있으면 만족할만한 水理特性과 堆積物 移動量과의 관계를 얻을 수 있다. 이러한 적절한 流砂移動公式이 있고, 堆積物 問題를 고려할 수 있을 때 河川 構造物設計에 있어서 河川水가 흘러 沖積하는 問題에 대한 研究는 진전이 있겠으나 아직 완벽한 解決을 보지 못한 主要原因중의 하나는 이러한 設計가 모두 定流의 觀點에서 시작되었기 때문이다. (3) 만약 不定流 과정중의 堆積物 移動現象을 理解하고자 할 때는 河川의 河床變動模型을 利用하여야 하는데 이는 크게 物理的인 모델과 數學的인 모델로 나눌 수 있다.

可動床水路를 利用한 模型實驗은 主要한 物理的인 모델의 하나이다. 그러나 物理的인 모델을 갖추므로서 비교적 精確한 河床地形의 局部變化를 豫見할 수 있으나 적절한 模型尺度는 매우 決定하기 어렵다. 그뿐만 아니라 서로 다른 河道 및 堆積物은 각기 別個의 模型을 만들어야 하므로 相當히 시간이 걸리며 번거롭다. 不定流의 數學的인 모델에는 종종 局部的으로 地形變化가 必要하나 相異한 河道 혹은 同一한 河道의 서로 다른 治水計劃에 대한 統計資料가 다른 것을 除하면 모두 同一한 模型을 使用할 수 있으므로 應用에 있어서 비교적 편리하다. 따라서 本 論文에서는 沖積河川에서 定流, 不定

流 狀態에서의 堆積物移動現象과 漸變流 狀態에서의 流砂移動의 數值解析方法을 提示하고자 한다.

2. 漸變流의 基本理論

2.1 基本方程式

沖積河川에서의 漸變流(slowly varying flow)는 巨視的인 力學의 觀點에서 여러가지 境界層 및 流體의 內在現象을 無視한 것으로 孤立長波로 볼 수 있다. 漸變流란 流速 및 水深의 兩數이며 거리 및 시간의 變化에 따라 모두 相對的으로 작아진다. 그렇다면 얼마나 작아야 비로소 漸變流라 볼 수 있는가는 適當한 數值가 없으므로 基本假說을 세워 다음과 같은 方程式으로 나타낼 수 있다. (3)

2.1.1 흐름의 連續方程式

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A_s}{\partial t} - q_i = 0 \dots\dots\dots (1)$$

2.1.2 흐름의 運動方程式

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta \rho Q V)}{\partial x} + g \cdot A \frac{\partial(\rho y)}{\partial x} + \rho g A \frac{\partial z}{\partial x} + \rho \cdot g \cdot A \cdot S_f = \rho q_L V_L \dots\dots\dots (2)$$

2.1.3 퇴적의 連續方程式

$$\frac{\partial Q_s}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial A_s}{\partial t} + \frac{\partial A_s}{\partial t} - q_i = 0 \dots\dots\dots (3)$$

2.1.4 퇴적 運動方程式

지금까지 不定流狀態에서의 完전한 運動方程

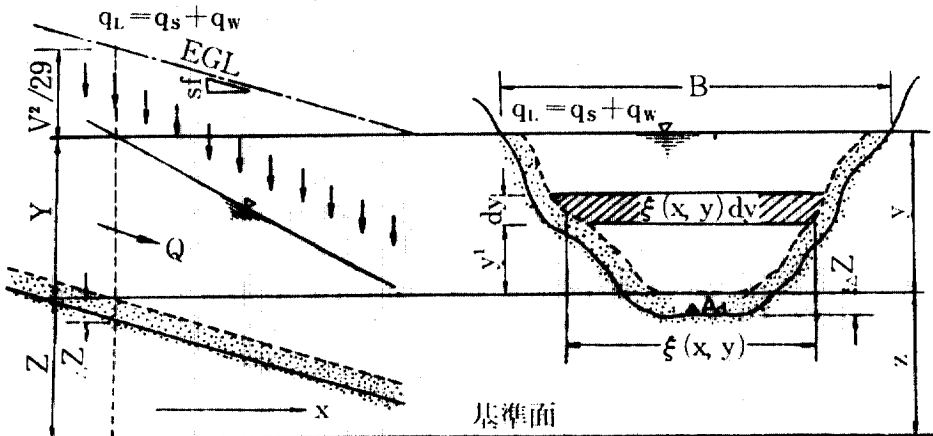


그림 1. 沖積河川의 斷面圖

式은 없으므로 實測值를 토대로 經驗式을 引用하여 流砂移動率을 流量 및 水深의 函數 또는 流速 및 水深의 函數로 表示한다.

$$g_s = f(y, Q) \quad (4-a)$$

$$g_s = f(y, V) \quad (4-b)$$

그러나 보통 式(4-b)을 자주 使用하고 있다. (3, 27, 28) 沖積河川의 代表的인 斷面을 그림 1에 나타내었다.

여기서

x = 흐름方向의 水平距離

t = 時間

A = 通水斷面積

Q = 流量

V = 平均流速 (= Q/A)

y = 水深

g = 重力加速度

β = 運動量 補正係數

Q_s = 堆積物 通過量 (= $g_s/\rho_s g$)

g_s = 流砂移動率

A_s = 堆積層(sediment layer) 또는 河床層(bed layer)의 면적

ρ = 流砂를 包含한 물의 密度 $\{(\rho_w + (\rho_s - \rho_w)Q_s/Q)\}$

ρ_w, ρ_s = 물 및 堆積粒子的 密度

ρ_b = 堆積層의 全體密度(bulk density)

$\rho = \rho_b/\rho_s$

d_m = 河床質의 平均粒徑

q_L = 單位길이당 水路의 側方向에서 流入하는 含砂水流 流入量 (= $q_s + q_w$)

q_s, q_w = 單位길이당 水路의 側方向에서 流入하는 堆積物의 流入流量 및 清水流量

$$S_f = Q|Q|/K^2 \quad (5-a)$$

$$K = AR^{2/3}/n \quad (5-b)$$

여기서

n = Manning 係數

R = 動水半徑 (= A/p_w)

p_w = 潤邊

z = 基準面으로부터 수로바닥까지의 높이

$$\frac{\partial A_s}{\partial t} = p_w \frac{\partial z}{\partial t} \quad (6)$$

여기서

A_s = 단위 길이당 堆積物 負荷體積 (= $A \cdot Q_s/Q$)

V_L = 側流가 流入하는 主方向에서의 速度

沖積河川의 4個 基本方程式中 x 및 t 는 獨立變數이고 Q, y, Q_s 및 A_s 은 4個의 基本變數이다. 上記式으로부터 적절한 境界條件 및 初期條件이 있을 때 沖積河川의 漸變流 流砂移動問題를 解決할 수 있다. (3) 그러나 方程式 自體로는 分析解를 구하기는 어려우므로 數學的인 모델(Mathematical model)을 利用하여 기존의 定流理論에 의한 分析解의 不合理性을 補完할 수 있다.

2.2 流砂移動公式

2.2.1 定流狀態에서의 流砂移動公式

1) 平衡狀態에서의 流砂移動公式

沖積河川에서 흐름과 퇴적운동간의 力學關係가 完全히 밝혀지지 않았기 때문에 오늘날까지 一定한 流砂移動公式은 없다. (3) 그러나 移動率은 流體性質, 堆積物의 性質, 水路의 幾何學的性質 및 通水條件의 函數이다. (1, 3, 24) 따라서 移動率 g_s 는 다음과 같은 式으로 나타낼 수 있다.

$$g_s = f(\rho_w, \nu, \rho_s, d_s, \sigma_s, w, g, B, y, Q) \quad (7)$$

여기서

ρ_w = 流體密度

w = 堆積物粒子的 鉛直沈降速度

ν = 流體의 動粘性係數

ρ_s = 堆積物의 密度

g = 重力加速度

d_s = 堆積物의 幾何平均粒徑

B = 水面幅

σ_s = 堆積物 粒徑分布曲線의 幾何標準偏差

y = 水深

Q = 流量

이미 發表된 많은 公式들은 y 및 V 의 幕次 또는 y 및 Q 의 幕次로 表示하고 있다. (23, 24, 25, 29)

$$g_s = a \cdot y^m V^n \quad (8)$$

$$g_s = a \cdot y^m Q^n \quad (9)$$

2) 非平衡狀態下的 流砂公式

平衡狀態에 이르지 못한 河道는 定流狀態에 있을 때에도 河床은 여전히 沖積된다. 그러나 流砂公式은 一般的으로 平衡狀態의 流砂移動公式을 使用한다. 그러한 理由는 이미 Gessler (3)의 解析에서와 같이 誤差가 심각한 것은 아니며, 또 現在 非平衡狀態의 流砂移動現象에 대한 理解가 부족한 까닭이다.

非平衡狀態에서는 河床에 堆積이 있기 때문에 定流狀態下에서 同一斷面의 水深은 沖積過程에 따라 變化가 있으므로 非平衡狀態下의 定流 流砂移動公式은 式(8)과 式(9) 또는 기타 適當한 流砂移動公式으로 表示하여야 한다.

2.2.2 漸變流 狀態의 流砂移動公式

지금까지 된 論한 不定流 流砂移動公式이 알려진 것은 없다^(3,8,9,10) 實際로 不定流狀態下에서 流砂移動公式은 주로 定流狀態下의 流砂移動公式 또는 式(7)을 使用하고 있다^(3,8,9,10). 그래서 이러한 應用은 아래와 같은 假說이 必要하다. 不定流 流砂移動過程中에 水理條件이 變化하면 流砂率도 變化하므로 水理條件이 定流狀態에서 갖추어야 할 移動率로 調整되어야 하므로 이때 遲滯時間은 없으며 이 現象은 아래와 같이 3가지로 나눌 수 있다.

1) No temporal lag

어떠한 斷面도 不定流 流砂移動過程中에 水理條件이 다시 變하면 堆積移動率도 즉시 變한다.

2) No magnitude lag

어떠한 斷面도 不定流 流砂移動過程中에 어느 한 순간의 堆積 移動率은 그 순간의 水理條件이 定流狀態下의 堆積 移動率과 같다.

3) No spatial lag

同一 河段에 있어 不定流 流砂移動過程中, 어느 한 순간의 堆積物 移動能力이 강한 地點에서 堆積 移動率도 가장 크다.

Grittiths⁽¹⁸⁾와 Gee⁽¹⁶⁾의 實驗結果에 依하면 實際로 遲滯時間이 존재하는 것으로 알려졌다.^(3,16) 그러나 自然河川의 流量變化는 連續的이고 漸次的으로 變하는 것이다. 역시 自然河川中에 流量이 Q_1 으로부터 점차적으로 Q_2 에 이를 때 經過된 時間은 결코 Q_1 의 河床 形態에 不합하는 調整에서 Q_2 의 河床 形態에 不합하는 調整까지 소요되는 時間보다 더 짧은 것이 아니다. 그러므로 流量이 Q_2 로 變할 때 河床 形態도 거의 Q_2 의 形態에 不합하게 된다. 다시 말해서 移動率도 거의 Q_2 의 移動率에 不합하게 되므로 遲滯時間은 無視할 수 있다.

3. 數值解析

河川의 漸變流 解析에 使用되는 基本方程式인

流砂方程式의 數值解法은 基本的으로 모두 有限差分法을 使用한다⁽³⁾. 즉 差分式을 應用한 것으로 微分方程式中의 導函數를 使用하여 얻은 差分方程式에서 解를 구한다. 이 流砂方程式의 數值解法은 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 하나는 特性法^(3,6,7,20)이고 다른 하나는 有限差分法⁽³⁾이다. 有限差分法은 水路 바닥높이를 구하는 方法에 따라 直接 및 間接法으로 나누어지며 間接法을 修正한 즉 修正間接法을 나타내면 다음과 같다.

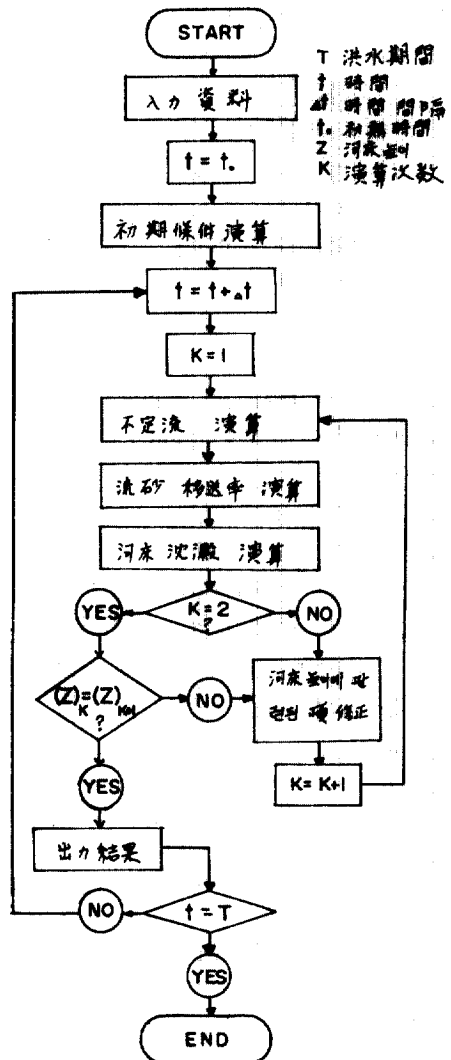


그림 2. 修正間接法의 흐름도

3.1 修正間接法の演算

修正間接法은 근본적으로 間接法이다. 그러나 연산중 Δt 종료시에 水理條件 및 基準面에서부터 水路 바닥까지의 높이를 구한 후 다시 이 높이에서 높이의 差分項에 關한 것을 修正하여 再演算하여 더욱 正確한 水理條件 및 基準面에서 水路 바닥까지의 높이를 구한 후에 다음 演算을 進行한다.

演算의 흐름도는 그림 2에 나타냈으며 진행질차는 아래와 같다.

첫째, 入力資料: 水路의 幾何條件, 抵抗係數, 河床質 代表粒徑, 境界條件(流量-水位曲線, 혹은 水位-流量曲線)

둘째, 初期條件의 演算: 實測한 各 斷面의 초기조건 利用

세째, 第一次 不定流 演算: 式(1) (2)使用

네째, 第一次 流砂 移動率 演算: 實測流砂移動率曲線 혹은 流砂移動公式 使用

다섯째, 河床堆積物 演算: 式(3), (6) 使用

여섯째, 단위시간 Δt 의 不定流 演算: 式(1), (2) 使用

일곱째, 다시 單位時間의 流砂移動率 및 河床堆積物 演算

여덟째, 水理 特性 調整

3.2 線形完全陰解法(linear implicit method)

修正間接法으로 沖積河川의 基本方程式을 구하고자 할 때, 우선 Δt 시간내에 堆積層(Sediment layer)이 작아 무시할 수 있다고 가정한다면 즉 $\frac{\partial A_d}{\partial t} \rightarrow 0$ 그러므로 式(1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} - q_L = 0 \quad (10)$$

또한 그림 1에서

$$A = \int_0^y \xi(x, y') dy'$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \xi(x, y) \frac{\partial y}{\partial t} + \int_0^y \frac{\partial \xi}{\partial t} dy'$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \xi(x, y) \frac{\partial y}{\partial x} + \int_0^y \frac{\partial \xi}{\partial x} dy'$$

$$\therefore \xi(x, y) = B \text{ 라고 가정하면 즉 } \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

그러므로

$$A_x' = \int_0^y \frac{\partial \xi}{\partial x} dy' = \frac{\partial A}{\partial x} l, \quad (11)$$

여기서 A_x' 는 非線形 水路의 단면변화를 表示한다.

또한 式(10) 및 式(2)는 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial y}{\partial t} - q_L = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho Q)}{\partial t} + V \frac{\partial(\beta \rho Q)}{\partial x} + \beta \rho V \frac{\partial Q}{\partial x} - \beta \rho V^2 B \frac{\partial y}{\partial x} \\ & + gA \frac{\partial(\rho y)}{\partial x} = \rho q_L V_L - \rho gA \left(\frac{\partial x}{\partial x} + S_f \right) \\ & + \rho V^2 A_x' \end{aligned} \quad (13)$$

式(12) 및 (13)은 단지 變數가 Q 및 y 이므로 漸變流의 計算으로 解決할 수 있다. 이에 대한 풀이 方法은 많으나 종전에 研究^{3,4)}되었던 바에 依하면 線形完全陰解法(linear implicit method)이 가장 適當한 方法이라고 생각하여 本文에서는 線形完全陰解法을 使用하였다.

有限差分式으로 河川의 漸變流 基本方程式을 表示할 때 河川水路를 $(N-1)$ 개의 小河川으로 나누어야 한다. 河川水路에는 총 N 개의 점이 있고 各點의 間격은 같지 않다. 演算過程을 $(M-1)$ 개의 時間別로 나누면 즉 총 M 개의 시간 間격이 있고 各 時間의 間격도 같지 않다. 그래서 $x-t$ 平面에 그림 3과 같이 나타낼 수 있다.

그림 3의 M 점을 $x_i, x_{i+1}, t_i, t_{i+1}$ 이라 하면 M 점의 임의 函數에 對하여 다음과 같이 表示할 수 있다^(2,21).

$$f(A) \doteq f_i + (f_{i+1} - f_i) \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t} = f_i + W \cdot (f_{i+1} - f_i)$$

$$f(B) \doteq f_{i+1} + (f_{i+1} - f_{i+1}) \cdot \frac{\Delta t'}{\Delta t} = f_{i+1}$$

$$+ W \cdot (f_{i+1} - f_{i+1})$$

$$f(M) \doteq \frac{1}{2} [f(A) + f(B)]$$

$$\doteq [W(f_{i+1} + f_{i+1}) + (1-W)(f_{i+1} + f_i)] / 2 \quad (14)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x} \doteq \frac{f(B) - f(A)}{\Delta x}$$

$$\doteq \frac{W \cdot (f_{i+1} - f_{i+1}) + (1-W)(f_{i+1} - f_i)}{\Delta x} \quad (15)$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial t} = \frac{(f_{i+1} - f_i) + (f_{i+1} - f_{i+1})}{2 \Delta t} \quad (16)$$

$$W = \Delta t' / \Delta t = \text{加重係數 } 0 \leq W \leq 1$$

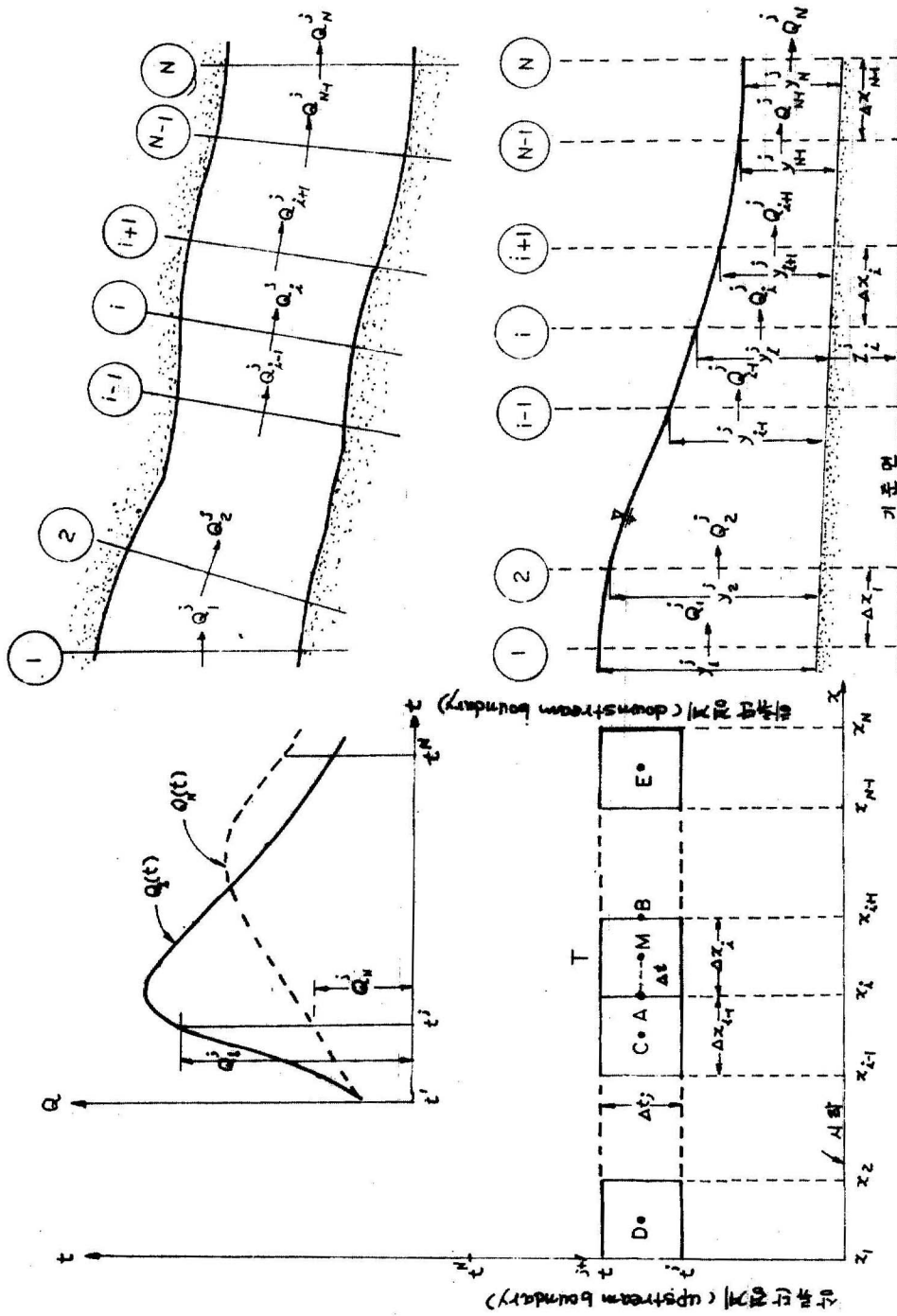


그림 3. 有限差分法 表示圖

만약 t 부터 t^{+1} 까지變化가 크지 않다면 $f^{i+1} \approx f^i$, $f_{i+1}^i \approx f^i$ 이고, 양호한 안정성을 얻기 위해 $W=1.0$ 으로 한다⁽⁹⁾. 그림 3 中의 T 點에서 f 및 그 偏導函數를 取하면 아래와 같다.

$$f(T) \approx (f^i + f_{i+1}^i) / 2 \quad (17)$$

$$\frac{\partial f(T)}{\partial x} \approx (f_{i+1}^i - f^i) / \Delta x \quad (18)$$

$$\frac{\partial f(T)}{\partial t} \approx \frac{(f^{i+1} - f^i) + (f_{i+1}^{i+1} - f_{i+1}^i)}{2 \Delta t} \quad (19)$$

式(17)(18)(19)를 式(10)(11)에 代入하면 線形差分式을 얻게 된다.

$$a_{1i}Q_i^{i+1} + a_{2i}y_i^{i+1} + a_{3i}Q_{i+1}^i + a_{4i}y_{i+1}^i = c_i \quad (20)$$

$$b_{1i}Q_i^{i+1} + b_{2i}y_i^{i+1} + b_{3i}Q_{i+1}^i + b_{4i}y_{i+1}^i = d_i \quad (21)$$

윗 式中 a, b, c, d 는 $t=t^i$ 時의 水理條件의 函數이다. Q_i^{i+1} , y_i^{i+1} , Q_{i+1}^i , y_{i+1}^i 는 $t=t^{i+1}=t^i + \Delta t$ 時의 流量 및 水深이고 미지수이다.

式(20), (21)은 각기 연속방정식 및 運動方程式의 差分式이다. 河川水路를 $(N-1)$ 개의 小河川水路로 나누었으므로 총 $2(N-1)$ 개의 方程式이 있다. 즉 $2N$ 개의 미지수가 존재하므로 따라서 2개의 境界條件이 必要하다. 一般的으로 流量曲線 혹은 水位曲線을 上流의 境界條件으로 하고, 水位曲線 및 水位-流量曲線을 하류의 境界條件으로 한다. 이런 境界條件을 많은 직선으로 나누어 線形方程式으로 表示할 수 있다. 즉 $2N$ 개의 方程式으로 構成할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} b_{30}Q_1 + b_{40}y_1 &= d_0 \\ a_{11}Q_1 + a_{21}y_1 + a_{31}Q_2 + a_{41}y_2 &= c_1 \\ b_{11}Q_1 + b_{21}y_1 + b_{31}Q_2 + b_{41}y_2 &= d_1 \\ &\vdots \\ a_{1i}Q_i + a_{2i}y_i + a_{3i}Q_{i+1} + a_{4i}y_{i+1} &= c_i \\ b_{1i}Q_i + b_{2i}y_i + b_{3i}Q_{i+1} + b_{4i}y_{i+1} &= d_i \\ &\vdots \\ a_{1(N-1)}Q_{(N-1)} + a_{2(N-1)}y_{(N-1)} + a_{3(N-1)}Q_N \\ &\quad + a_{4(N-1)}y_N = c_{N-1} \\ b_{1(N-1)}Q_{(N-1)} + b_{2(N-1)}y_{(N-1)} + b_{3(N-1)}Q_N \\ &\quad + b_{4(N-1)}y_N = d_{N-1} \\ a_{1N}Q_N + a_{2N}y_N &= c_N \end{aligned} \right\} (22)$$

만약 上流의 境界條件을 流量曲線으로 나타낸다면 $b_{40}=0$ 이다. 만약 水位曲線으로 나타내면 $b_{30}=0$ 이다. 그리고 下流의 境界條件을 水深曲線으로 나타내면 $a_{1N}=0$ 이고, 水深-流量曲線으로 나타내면 a_{1N} , a_{2N} 모두 0(Zero)가 되지 않는다

다. 만약 流量曲線으로 나타내면 $a_{2N}=0$ 이다. 式(22)中 $Q_1, y_1, \dots, Q_N, y_N$ 은 모두 $t=t^{i+1}$ 時의 流量 및 水深을 나타낸다. 그리고 式(22)는 총 $2N$ 개의 未知數가 있고 $2N$ 개의 方程式이 있으므로 解를 구할 수 있다.

解는 다음과 같은 方法으로 求한다.

(1) 上流의 境界條件을 水位曲線, $y_1(t)$ 로 取할 때

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= q_1 y_2 - t_1 Q_2 + S_1 \\ y_2 &= -p_2 Q_2 + r_2 \\ &\vdots \\ Q_{i-1} &= -q_{i-1} y_i - t_{i-1} Q_i + S_{i-1} \\ y_i &= -p_i Q_i + r_i \\ &\vdots \\ Q_{N-1} &= -q_{N-1} y_N - t_{N-1} Q_N + S_{N-1} \\ y_N &= -p_N Q_N + r_N \\ a_{1N} Q_N + a_{2N} y_N &= c_N \end{aligned} \right\} (24)$$

위의 各式에서 $q_1, t_1, S_1, p_2, r_2, \dots, q_{i-1}, t_{i-1}, S_{i-1}, p_i, r_i, \dots, q_{N-1}, t_{N-1}, S_{N-1}, p_N, r_N$ 등은 모두 y_1 및 a, b, c, d 의 函數이다. 解의 절차는 아래와 같다.

① t^i 時의 水理條件에 依據하여 a, b, c, d 를 計算한다.

② y_1 및 a, b, c, d 로부터 p, q, r, S, t 를 計算한다.

③ (24)式으로부터 y_N 및 Q_N 을 求한다.

④ y_N 과 Q_N 을 알면 (23)式에서 밑에서 위의 順으로 $Q_{N-1}, y_{N-1}, \dots, y_i, Q_{i-1}, \dots, y_2, Q_1$ 을 求할 수 있다.

(2) 上流의 境界條件을 流量曲線, $Q_1(t)$ 로 取할 때

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -q_1 y_2 - t_1 Q_2 + S_1 \\ Q_2 &= -p_2 y_2 + r_2 \\ &\vdots \\ y_{i-1} &= -q_{i-1} y_i - t_{i-1} Q_i + S_{i-1} \\ Q_i &= -p_i y_i + r_i \\ &\vdots \\ y_{N-1} &= -q_{N-1} y_N - t_{N-1} Q_N + S_{N-1} \\ Q_N &= -p_N y_N + r_N \\ a_{1N} Q_N + a_{2N} y_N &= c_N \end{aligned} \right\} (25)$$

위의 各式에서 $q_1, t_1, S_1, p_2, r_2, \dots, q_{i-1}, t_{i-1}, S_{i-1}, p_i, r_i, \dots, q_{N-1}, t_{N-1}, S_{N-1}, p_N, r_N$ 등은 모두 Q_1 및

a, b, c, d 의 函數이다. 解의 절차는 아래와 같다.

① t^j 時의 水理條件에 의거하여 a, b, c, d 를 계산한다.

② Q_1 및 a, b, c, d 로부터 p, q, r, S, t 를 계산한다.

③ (26)式으로부터 y_N 및 Q_N 을 求한다.

④ y_N 과 Q_N 을 알면 (25)式의 밑에서 위의 順으로 $y_{N-1}, \dots, Q_i, y_{i-1}, \dots, Q_2, y_1$ 을 求할 수 있다.

3.3 河床堆積演算

一次의 不定流 演算을 거쳐 $t=t^{j+1}$ 時의 Q 및 y 를 N 개의 河川水路斷面에서 얻을 수 있고 또한 기타의 水理條件도 구할 수 있다.

따라서 流砂移動公式로부터 河川의 各斷面間의 移動率을 求할 수 있고, 堆積連續方程式인 (3)式에서 河床의 堆積量을 計算할 수 있다.

河床堆積量을 計算하는 方法은 먼저 그림 3의 c 점에서 (3)式을 (14), (15), (16)式을 사용하여 差分方程式으로 展開하고 $W=0.5$ 를 取한다.

그러면,

$$\begin{aligned} \Delta A_{d_{i-\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{2 p_{i-\frac{1}{2}}} \{ 2 \cdot \Delta t \cdot q_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - [(AC)_i]_i^{j+1} \\ &\quad - (AC)_i^{j-1} + (AC)_i^{j+1} - (AC)_i^j \} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x_{i-1}} [(Q_i)^j - (Q_i)^{j-1}] \\ &\quad + (Q_i)^{j+1} - (Q_i)^j \} \end{aligned} \quad (27)$$

윗 식중

$$\begin{aligned} \Delta A_{d_{i-\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{2} (\Delta A_{d_i} + \Delta A_{d_{i-1}}) \\ &= \frac{1}{2} [(A_{d_i}^{j+1} - A_{d_i}^j) + (A_{d_{i-1}}^{j+1} - A_{d_{i-1}}^j)] \end{aligned} \quad (28)$$

$$p_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (p_i + p_{i-1}) \quad (29)$$

$$q_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (q_{i-1}^j + q_i^j + q_{i+1}^{j+1} + q_i^{j+1}) \quad (30)$$

마찬가지로 그림 3의 M 점에서 (3)式을 差分式으로 展開하면

$$\begin{aligned} \Delta A_{d_{i+\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{2 p_{i+\frac{1}{2}}} \{ 2 \cdot \Delta t \cdot q_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - [(AC)_i]_i^{j+1} \\ &\quad - (AC)_i^j + (AC)_i^{j+1} - (AC)_i^{j-1} \} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} [(Q_i)^{j+1} - (Q_i)^j] \\ &\quad + (Q_i)^{j+1} - (Q_i)^j \} \end{aligned} \quad (31)$$

윗 식중

$$\begin{aligned} \Delta A_{d_{i+\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{2} (\Delta A_{d_{i+1}} + \Delta A_{d_i}) \\ &= \frac{1}{2} [(A_{d_{i+1}}^{j+1} - A_{d_{i+1}}^j) + (A_{d_i}^{j+1} - A_{d_i}^j)] \end{aligned} \quad (32)$$

$$p_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (p_i + p_{i+1}) \quad (33)$$

$$q_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (q_i^j + q_{i+1}^j + q_i^{j+1} + q_{i+1}^{j+1}) \quad (34)$$

式(28)~(32)에서 다음을 얻는다.

$$\Delta A_{d_i} = \frac{1}{2} (\Delta A_{d_{i-\frac{1}{2}}} + \Delta A_{d_{i+\frac{1}{2}}}) \quad i=2 \sim (N-1) \quad (35)$$

또한 만약 Q_0^j 및 Q_0^{j+1} 를 $t=t^j$ 및 $t=t^{j+1}$ 일 때 上流端에 進入하는 移動率로 한다면 그 둘은 實測 또는 $Q_0 = Q_1$ 이라 가정하고,

$\Delta A_{d_1} = \Delta A_{d_{1+\frac{1}{2}}}$ 이라 가정한다.

그러면 그림 3의 D 점 및 (31)式에서 다음을 求할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta A_{d_1} &= \frac{1}{2 p_1} \{ 2 \cdot \Delta t \cdot q_{1+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - [(AC)_1]_1^{j+1} - (AC)_1^j \\ &\quad + (AC)_1^{j+1} - (AC)_1^{j-1} \} - \frac{\Delta t}{\Delta x_1} [(Q_1)^j - (Q_1)^{j-1}] \\ &\quad + (Q_1)^{j+1} - (Q_1)^j \} \end{aligned} \quad (36)$$

마찬가지로 下流端에 대하여

$\Delta A_{d_N} = \Delta A_{d_{N-\frac{1}{2}}}$ 이라 가정한다.

그러면 그림 3의 E 점 및 (27)式에서 다음을 求할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta A_{d_N} &= \frac{1}{2 p_N} \{ 2 \cdot \Delta t \cdot q_{N-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - [(AC)_N]_N^{j+1} \\ &\quad - (AC)_N^j + (AC)_N^{j+1} - (AC)_N^{j-1} \} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x_{N-1}} [(Q_N)^j - (Q_N)^{j-1}] \\ &\quad + (Q_N)^{j+1} - (Q_N)^j \} \end{aligned} \quad (37)$$

그러므로 式(35), (36) 및 (37)로부터 各斷面의 Δt 時間中の 堆積量 ΔA_d 를 求할 수 있다. 이 때 河床높이의 變動量은

$$\Delta z_i = \Delta A_{d_i} / p_{w_i}^{j+\frac{1}{2}} = \Delta A_{d_i} / B_i^{j+\frac{1}{2}} \quad \text{이므로} \quad (38)$$

Δt 時間後의 河床高는

$$z_i^{j+1} = z_i^j + \Delta z_i \quad (39)$$

가 된다.

3.4 河床높이에 관련된 項의 修正

式(35), (36) 및 (37)에서 ΔA_d 를 求한 後 이 式들로부터 다음을 求할 수 있다.

$$\frac{\partial A_d}{\partial t} = \frac{1}{2 \Delta t} (\Delta A_{d_i} + \Delta A_{d_{i-1}}) \quad (40)$$

따라서 (20)식의 c_i 값은 다음과 같이 주어진다.

$$c_i = [c_i] - (\Delta A_{d_i} + \Delta A_{d_{i-1}}) / 2.0 \quad (41)$$

윗 식중 $[c_i]$ 는 不定流 演算의 c_i 값을 사용하였다. 마찬가지로 (39)식으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &\doteq \frac{1}{2 \Delta x_i} [(z_{i+1}^{j+1} - z_i^{j+1}) + (z_{i+1}^j - z_i^j)] \\ &\doteq \frac{1}{2 \Delta x_i} [(\Delta z_{i+1} + \Delta z_i) + 2(z_{i+1}^j - z_i^j)] \quad (42) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \doteq \frac{1}{\Delta x_i} (z_{i+1}^j - z_i^j) + \frac{1}{2 \Delta x_i} (\Delta z_{i+1} - \Delta z_i) \quad (43)$$

식(43)으로부터 (21)식중의 d_i 값을 얻는다.

$$\begin{aligned} d_i = [d_i] - \frac{g}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x_i} [(\rho A)_i^j + (\rho A)_{i+1}^j] \\ (\Delta z_{i+1} - \Delta z_i) \quad (44) \end{aligned}$$

윗 식중 $[d_i]$ 는 不定流 演算의 d_i 값이다.

식(41) 및 식(44)으로 c_i 및 d_i 값을 修正한 後式(20) 및 式(21)으로부터 不定流 演算을 다시 시작하여 正確한 水理條件과 移動率을 求할 수 있다.

다시 얻어진 移動率로부터 式(35)에서 式(39)에 이르는 演算을 反復 遂行하여 새로운 河床堆積量과 河床高를 얻는다. 다음에 前後 두 次例 演算에서 얻어진 床河를 比較하여 그 差가 매우 작든가 또는 같을 때까지 上述한 演算을 反復한다.

4. 結 論

沖積河川에 있어서 河床變動에 起因되는 流砂 移動을 漸變流의 개념으로 理論分析 및 數值解析方法을 포괄적으로 檢討한 結果 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

1) 지금까지 應用할만한 不定流 堆積方程式이 없으므로 流砂 移動에 대하여 利用한 定流概念보다는 數值解析法으로 修正間接法의 線形完全陰解法을 適用함으로써 自然現象과의 誤差를 줄일 수 있다.

2) 河道設計에 있어서 終前의 경우는 堆積物問題를 고려하지 않았으나 앞으로는 設計流量 適用時 堆積物을 수반하는 側面에서 接近하여야 할 것이다.

3) 沖積河川에 있어서 漸變流의 概念을 發展시켜 數值解析의 精度를 높이고 實用化함으로서 河床變動을 合理的으로 豫測할 수 있을 것으로 期待된다.

本 研究 發表는 國立建設試驗所 水工課의 연구보고 “河床變動에 관한 研究”의 일부분이다.

參 考 文 獻

1. 建設省 土木研究所: 混合粒徑砂의 流送實驗資料集, 土木資料 第1390號, 昭和 53年 3月.
2. 建設省 土木研究所: 河川における 土砂의 移動機構에 關する 研究 노트 [II], 土木資料 第1543號, 昭和 55年 2月.
3. Tsai, C.T., "Simulation of Unsteady Flow in Alluvial Streams", Taiwan Hydraulics Laboratory, National Cheng Kung University Tainan Taiwan, Rep. of Chania, Dissertation No. 3, pp. 1~30, March 1981.
4. Amein, M. and Frany, C.S. "Implicit Flood Routing in Natural Channel", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 96, No. HY 12*, pp. 2481~2500, Dec. 1970.
5. Amein, M. and Chu, H.L. "Implicit Numerical Modeling of Unsteady Flow", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 102, No. HY6* June, 1975.
6. Becker, L., Yeh, W. W-G., "The Identification of Mutiple Reach Channel Parameter" *Water Resource Research, Vol. 9, No. 2*, pp. 326~335, Apr, 1973.
7. Chang, F.F.M., "Ripple Concentration and Friction Factor", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 96, No. HY2*, pp. 417~430, Feb. 1970.
8. Chang, F.F.M. and Richards, L.D., "Deposition of Sediment in Transient Flow", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 97, No. HY6*, pp. 837~849, June, 1971.
9. Chang, H.H. and Hill, J.C., "Computer Modeling of Erodible Flood Channels and Deltas", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 102, No. HY 10*, pp. 1461~1477, Oct. 1976.
10. Chang, H.H. and Hill, J.C. "Minimum Stream Power for River and Deltas." *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 103, N. HY 12*, Dec. 1977.

11. Chow, V.T., *Open-Channel Hydraulics*, Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New York, N.Y., 1959.
12. Chow, V.T., *Hand book of Applied Hydrology*, Mc Graw-Hill Book Co., New York, N.Y., 1964.
13. Chung, T.J., *Finite Element Analysis in Flood Dynamics*, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y., 1978.
14. Einstein, H.A., "Deposition of Suspended particles in a Gravel Bed", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 96, No. HY 5*, Sept. 1968.
15. Fread, D.L., Smith, G.F., "Calibration Technique for 1-D Unsteady Flow Models", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 104, No. HY 7*, pp. 1027~1044, July, 1978.
16. Gee, D.M., "Bed Form Response to Nonsteady Flows", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 101, No. HY 3* pp. 437~449, March, 1975.
17. Graf, W.H., *Hydraulics of Sediment Transport*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y., 1971.
18. Griffiths, G.A. and Sutherland, A.J., "Bedload Transport by Translation Waves", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 103, No. HY 11*, pp. 1279~1291, Nov. 1977.
19. Henderson, F.M., *Open-Channel Flow*, The Macmillan Co., New York, N.Y., 1966.
20. Komara, S. and Simons, D.B., "River Bed Degradation Below Dams." *J. of Hydraulic Division, ASCE Vol. 93, No. HY 4* pp. 1~14, July 1967.
21. Linsley, R.K. Jr., Kohler, M.A., and Paulhus, J.L.H., *Hydrology for Engineers, 2nd ed.* Mc Grow-Hill Book Co. Inc., New York, N.Y., 1975.
22. Lovera, F. and Kennedy, J.F., "Friction-Factor for Flat-Bed Flow in sand Channels", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 95, No. HY 4*, pp. 1227~1234, July, 1969.
23. Paker, G. and Anderson, A.G., "Basic Principles of River Hydraulics", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 103, No. HY 9*, pp. 1077~1087, Sept. 1977.
24. Raudkivi, A.J., *Loose Boundary Hydraulics, 1st, Edition*, Pergamon, Oxford, 1967.
25. Raudkivi, A.J. *Loose Boundary Hydraulics, 2nd, Edition*, Pergamon, Oxford, 1976.
26. Tywoniuk, No. 9 "Sediment discharge Computation Procedures", *J. of Hydraulics Division, ASCE, Vol. 98, No. HY 3*, pp. 521~530, Mar. 1972.
27. Vanoni, V.A., Discussion of "Basic Principales of River Hydraulics", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 104, No. HY 6*, pp. 941~943, June, 1976.
28. Wu, Chien-Min, Discussion of "Speed of Inertial Bed Load Disturbances", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 104, No. HY 6*, pp. 935~939, June, 1978.
29. Yalin, M.S., *Mechanics of Sediment Transport*, Pergamon Press, Oxford, England, 1972.
30. Yong, C.T., "Incipient Motion and Sediment Transport", *J. of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 99, No. HY 10*, pp. 1679~1704, Oct. 1973.
31. Yen, Chin-Lien and Wang, Tsan-Wen, "Simulation of Unsteady Flow in Rivers", *J. of Chinese Agricultural Engineering, Vol. 22, No. 2*, 1976.

(接受: 1983.12.5)