

靜水壓 形態의 荷重을 받는 鐵筋콘크리트 슬래브의 降伏線解析

The Yield-Line Analysis of Reinforced Concrete Slabs
Subjected to Loads of Hydrostatical Type

吳	柱	源*
Oh,	Jue	Won
李	奎	遠**
Lee,	Kyu	Wan

Abstract

The yield-line analysis is used for carrying out the limit analysis of reinforced concrete slabs which are for example like those of vertical walls of tanks subjected to the loads of hydrostatical type.

It is considered both isotropic and orthotropic reinforcement using the coefficient of orthotropy with different edge conditions. The yield-line analysis is carried out by using the vertical work method and four collapse mechanisms including the fan mechanisms which is more realistic than over diagonal mechanisms is considered.

It is found that the fan mechanisms are more complicated than ever simple diagonal mechanisms which have used for the orthotropically reinforced concrete slabs subjected to hydrostatic pressures. Especially Horton's study is extended in this study, and they are formulated to the constrained multi-variables nonlinear optimization problems, which are solved by the Rosen-Brock Hillclimb Procedure Program and are more critical.

要 旨

탱크의 垂直壁과 같은 靜水壓 形態의 荷重을 받는 鐵筋콘크리트 슬래브의 極限解析을 遂行하기 위하여 降伏線解析을 使用하였다. 슬래브의 直交異方性係數를 使用하여 等方性 및 直交異方性 鐵筋의 경우를 모두 考慮하였으며 여러 가지 端條件을 考慮하였다.

降伏線解析은 假想일의 原理를 使用하여 遂行하였으며, 從來의 對角線메카니즘에 비하여 좀 더 實際的인 부채꼴메카니즘을 포함하여 4 가지 崩壞메카니즘들에 대하여 考慮하였다.

解析結果는 部채꼴메카니즘들이 지금까지의 靜水壓을 받는 鐵筋콘크리트 슬래브에 使用되었던 單단한 對角線메카니즘들에 비하여 복잡하였으며, 特히 本 研究에서는 Horton의 研究를 擴張하여 制約條件을 받는 多變數 非線型 最適化問題로 形成한 후 the Rosen-Brock Hillclimb Procedure Program 에 의하여 解를 구하였고 그 結果는 從來의 다른 메카니즘들에 비하여 精密하였다.

*正會員·全州工業專門大學 專任講師, 土木科

**正會員·全北大學校 工科大学 教授, 土木工學科

1. 序 論

슬래브를 解析하고 設計하는 데는 彈性理論이나 塑性理論을 利用할 수가 있다. 지금까지 대부분의 構造物을 實際로 解析하고 設計하는데 있어서는 彈性的 線型理論(linear theory of elasticity)을 많이 使用하여 왔다. 實際로 우리의 示方書에서도 ACI 제 1 方法, 제 2 方法, 제 3 方法과 같이 根本적으로 단순화된 모델의 彈性解析에 기초를 두어 왔다. 그러나, 이제 우리는 점점 슬래브의 設計에 있어서 塑性理論의 使用을 깨닫고 있다. 현재 슬래브를 解析하는 데는 1) 降伏線理論(yield-line theory)⁽¹⁻⁸⁾, 2) 띠理論(strip theory)⁽⁹⁻¹³⁾, 3) 下限界接近法(lower-bound approach)⁽¹⁴⁻¹⁶⁾ 등이 利用되고 있다. 下限界接近法은 一種의 上限界接近法(upper-bound approach)의 하나인 降伏線理論에 비하여 보다 安全하게 되며 鐵筋콘크리트 슬래브에서 正鐵筋과 負鐵筋의 分布에 대한 必要하고도 有用한 情報를 알려 주게 된다⁽¹⁶⁾. 띠理論에서는 슬래브의 모든 점에서 비틀림모멘트가 零이라고 假定하여 作用荷重이 가로, 세로方向으로 짜여진 많은 띠(strip)들의 疊작용에 의하여 支點에 전달되는 것으로 한다⁽¹¹⁾.

降伏線理論은 鐵筋콘크리트의 崩壞荷重을 計算하는 半經驗的 手段으로 發展되었다. 슬래브에 대한 試驗을 하는 동안 관찰된 崩壞메카니즘을 理想的인 公式으로 나타내어 슬래브의 崩壞荷重과 抵抗모멘트를 관련시킨다. 슬래브 斷片(slab segment)들의 境界에서 抵抗모멘트를 荷重에 관련시키는 平衡方程式을 調整하는 기술을 完成시킨 것은 Johansen⁽⁸⁾의 研究에서였다. 그 후 많은 論文에서 슬래브를 解析하는데 이 降伏線理論을 利用하였다^(18,19). 그러나, 靜水壓 形態의 荷重을 받는 슬래브의 경우에 降伏線理論을 적용시킨 경우는 불과 몇 편에 불과하다^(10,15).

Pectou⁽²⁾는 固定端과 回轉端의 여러 條件으로 주위 전체를 따라 支持되어 있는 鐵筋콘크리트 矩形슬래브들이 靜水壓 形態의 荷重을 받고 있다고 생각하여 解析하였다. 이러한 것들은 密閉된 矩形탱크(closed rectangular tank)의 壁에 해

당하는 것 들이다. 그러나, 보다 精密할 것으로 생각되는 角部效果(corner effect)를 고려한 부채꼴메카니즘(fan mechanism)은 考慮치 않고 3개의 對角線메카니즘(diagonal mechanism)만을 취급하였다.

Horton⁽¹⁾은 上邊이 自由이고 다른 3邊이 固定端과 回轉端으로 支技되어 있는 上部가 開放된 矩形탱크(open rectangular tank)의 壁에 해당하는 슬래브의 解析을 試圖하였다. 하나의 부채꼴메카니즘을 포함한 3가지 메카니즘에 대하여 考慮하고 있으나 부채꼴메카니즘에 대하여서는 보다 精密할 것이라고 제안하였을 뿐 그 結果는 구하지 못하였다. 그 計算式이 무척 복잡하였으며 誘導된 公式에 部分的으로 錯誤가 있었다.

本 研究의 目的은 Horton의 研究를 擴張하여 基本的인 2개의 對角線메카니즘에 2개의 부채꼴메카니즘을 포함한 4개의 메카니즘에 대하여 抵抗모멘트와 荷重과의 關係式을 밝히고 그 塑性舉動과 設計에 必要한 結果值를 여러 가지 端條件과 形狀比, 直交異方性係數(the coefficient of orthotropy) 등에 따라 提示하는데 있다.

降伏線解析은 Horton의 研究와 同一하게 假想일의 原理를 使用하였고, 解析되는 슬래브도 垂直狀態에서 靜水壓 荷重을 받으며 3邊이 支持되어 있고 上邊은 自由이다.

2. 降伏線理論

降伏線理論은 슬래브의 設計를 위한 極限荷重理論(ultimate-load theory)으로서 假定된 崩壞 메카니즘과 過少鐵筋슬래브의 塑性特性에 근거하고 있다. 슬래브의 降伏線解析을 위해서는 먼저 한 타당한 崩壞메카니즘이 가정된다⁽¹¹⁾. 이때 슬래브의 破壞는 降伏線(yield-line)이라 불리는 鐵筋이 降伏하는 線을 따라 發生하고 그 슬래브는 여러 개의 剛區域(rigid region)인 斷片들로 나누어지며 破壞時에 彈性變形들은 無視된다. 단지 降伏線에서만 變形이 일어나는데 각각의 剛區域들은 이 降伏線들을 中心으로 回轉한다. 假想일의 原理에 의하면 이 假想變位狀態下에서 作用荷重에 의한 外的일은 剛區域들이

降伏線들을 中心으로 回轉함으로써 發生하는 에너지의 內的分散(內的 일)과 같다. 이들을 式으로 나타내면

$$\sum \left[\int_A P \delta dA \right] = \sum \left[\theta_n \int_S M_n dS \right] \quad (1)$$

여기서

P = 微小剛區域 dA 에 作用하는 荷重

δ = P 荷重으로 인한 그 作用點에서의 假想 처짐

M_n = 降伏線 위의 한 點에서 單位길이당 垂直 모멘트

$\theta_n = M_n$ 이 作用하는 點에서 降伏線의 垂直 回轉角

本 研究에서는 直交異方性係數를 使用하여 等方性 鐵筋과 直交異方性 鐵筋을 모두 考慮한다. 鐵筋콘크리트는 鐵筋이 降伏狀態에 있을 때 鐵筋콘크리트가 降伏狀態에 있다고 假定할 수 있고, 이때 그 슬래브의 極限強度는 주어진 鐵筋의 重量에 직접 관계되므로 直交異方性係數는 두 直角方向의 鐵筋重量比가 된다.

한편, 假想일에 의한 方法은 理論적으로 上限界解임을 알아야 한다. 이는 崩壞荷重을 위하여 安全치 못하거나 正確성이 不足할 수 있기 때문에 過度하게 安全하거나 正確한 값을 주는 下限界解를 얻는 것이 必要하게 된다. 그러나, 直交異方性 슬래브들에 대하여 下限界解는 아직 一般化되어 있지 못하며 또 實際적으로는 降伏線解析이 1) 變形硬化(strain hardening)와 2) 膜作用(membrane action)을 無視하였기 때문에 安全하다고 본다⁽¹¹⁾.

假想일의 方法은 崩壞荷重에 대하여 上限界解를 提供하기 때문에 주어진 메카니즘들에 대하여 最小의 上限界解가 必要하다. 아니면 抵抗塑性모멘트(M_p)가 最大의 下限界解일 것이 必要하다. 이제 M_p 를 취하게 되면 幾何學的 媒介變數들의 函數인 일에 관한 方程式으로부터 이 媒介變數들에 대하여 M_p 를 最大化 할 수 있다. 이와 같이 하여 正確한 幾何學的 配列을 얻을 수 있고 각 메카니즘에 必要한 M_p 의 가장 큰 下限界解를 얻는다. 그리하면 考慮했던 메카니즘들 중 어떤 모드가 주어진 條件下에서 適用될 것인가 하는 것을 決定할 수 있게 된다.

3. 降伏線모드

假定된 崩壞메카니즘들은 降伏線들의 모드(mode)에 의하여 定義된다. 3邊이 支持되어 있고 上邊이 自由인 鐵筋콘크리트 矩形슬래브가 垂直狀態에서 靜水壓荷重을 받을 때 降伏線모드는 基本的으로 그림 2와 그림 3과 같은 2개로 볼 수 있다. 여기에 각각의 경우에 대하여 角部效果를 고려한 그림 4와 그림 5와 같은 부채꼴 메카니즘을 고려하면 4개의 降伏線모드를 생각할 수 있게 된다.

4개의 각각의 모드들이 여러 가지 條件, 平面形狀比, 直交異方性係數, 둘레의 端支持條件들에 대하여 考慮된다.

그림 1과 같이 正모멘트와 負모멘트들을 區別할 수 있도록 媒介變數 i_1, i_2 가 使用된다. i_1 과 i_2 는 鐵筋이 上下의 두 層으로 配筋된 경우 각각의 두 直角方向에서 한 層의 鐵筋重量의 다른 層의 鐵筋重量에 대한 比를 나타내게 된다. 슬래브의 바닥길이와 높이의 比를 K 로 하였으며, 直交異方性係數는 μ 로 하였다. 그러므로, 設計者는 K, μ, i_1, i_2 의 값을 指定할 수 있다.

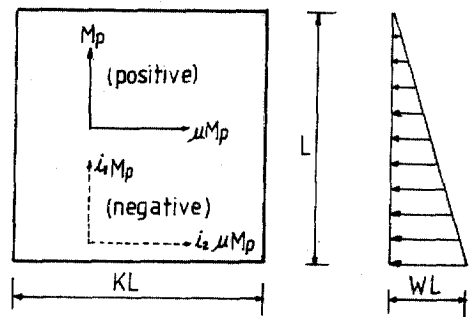


그림 1. 荷重 및 塑性모멘트

4. 降伏線解析

(1) 降伏線모드 I

그림 2에 나타난 바와 같이 降伏線에 의하여 3개의 剛區域으로 나누어지거나 좌우대칭의 特性을 考慮하면 計算을 위해서는 A, B 2개의 部分에 대하여 계산하면 된다.

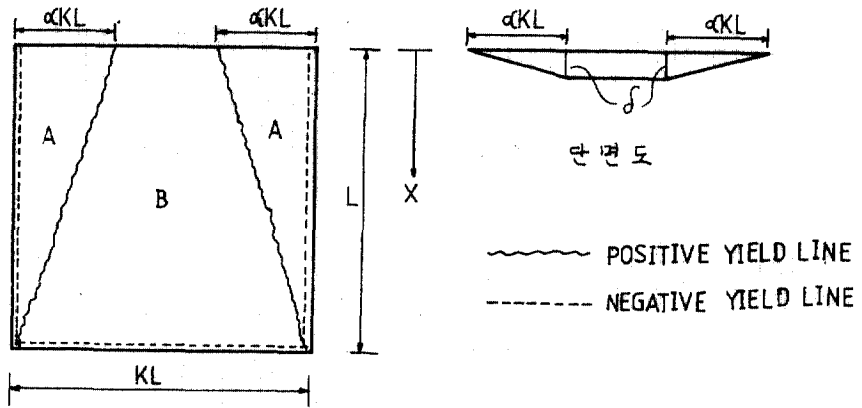


그림 2. 降伏線모드 I

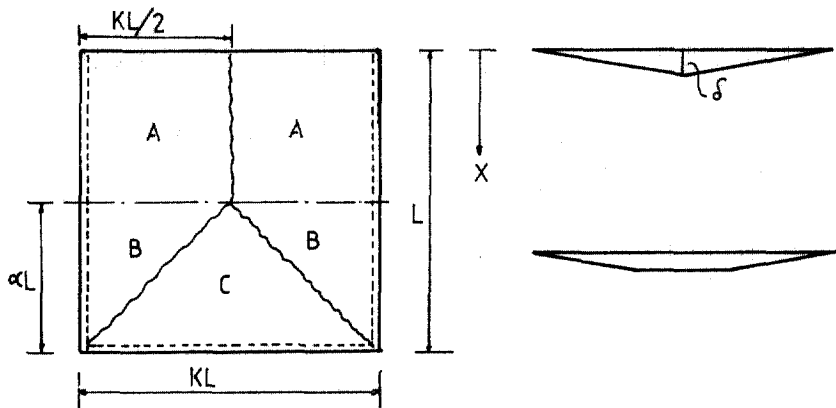


그림 3. 降伏線모드 II

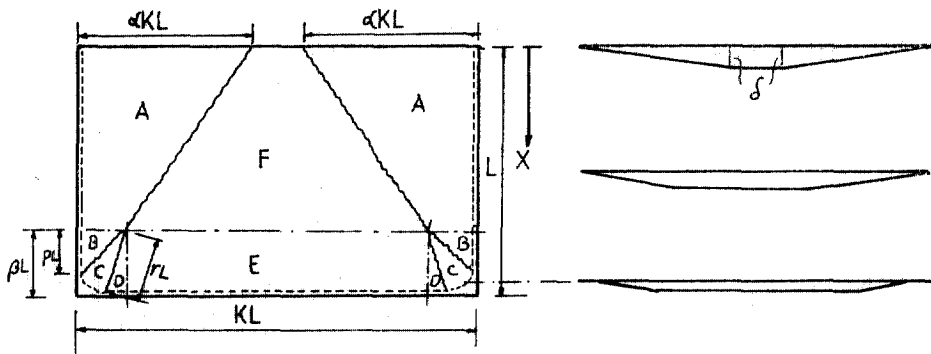


그림 4. 降伏線모드 III

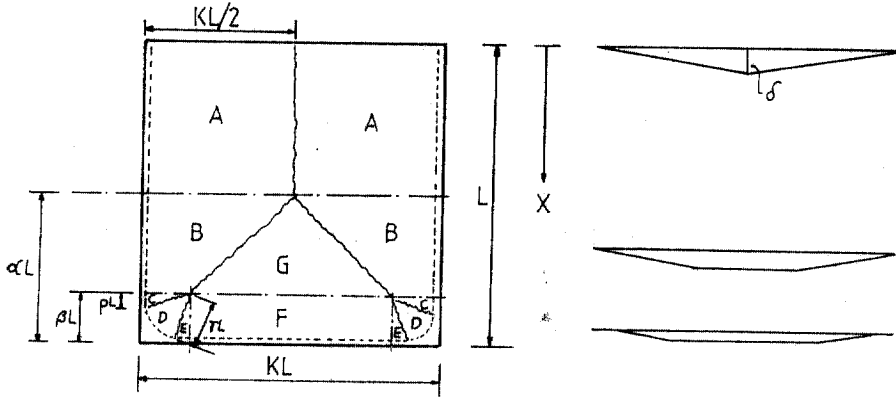


그림 5. 降伏線모드Ⅳ

$$\begin{aligned} \text{外的일} &= 2 \times \int_0^L \omega x (\alpha KL - \alpha Kx) \frac{\delta(L-x)}{2L} dx \\ &+ \int_0^L \omega x \{ (KL - 2\alpha KL - Kx) \} \frac{\delta(L-x)}{L} dx \\ &= \frac{\delta \omega L^3}{12} K(2-\alpha) \end{aligned}$$

$$\text{內的일} = \frac{M_p \delta}{\alpha K} \{ 2(i_1+1) + \mu \alpha K^2(i_2+2\alpha) \}$$

따라서, 식(1)에 의하여 그 결과를 종합하면

$$\frac{M_p}{\omega L^3} = \frac{\alpha K^2(2-\alpha)}{12 \{ 2(i_1+1) + \mu \alpha K^2(i_2+2\alpha) \}} \quad (2)$$

여기서 M_p = 塑性抵抗모멘트

ω = 液體의 單位重量

α 는 降伏線의 위치를 나타내는 媒介變數로서 M_p 가 最大가 되도록 決定되어야 하므로

$$\frac{\partial M_p}{\partial \alpha} = 0 \text{ 에서}$$

$$\alpha = 2 \times \left[-i_1 - 1 + \{ (i_1+1)(i_1+1 + \mu K^2(i_2+4)) \}^{\frac{1}{2}} \right] / \{ \mu K^2(i_2+4) \} \quad (3)$$

이때 α 의 범위는 슬래브의 幾何學의 特性을 고려하면 $0 \leq \alpha \leq 0.5$ 가 되어야 한다.

(2) 降伏線모드Ⅱ

그림 3에 보인 바와 같이 3개의 剛區域들로 나누어지거나 계산상 편하도록 A, B, C의 3개 부분에 대하여 考慮한다.

$$\begin{aligned} \text{外的일} &= 2 \times \int_0^{L-\alpha L} \omega \times \frac{KL}{2} \times \frac{\delta}{2} \times dx \\ &+ 2 \times \int_{L(1-\alpha)}^L \omega x \frac{K(L-x)}{2\alpha} \cdot \frac{2\delta}{KL} \cdot \frac{K(L-x)}{2\alpha} \cdot \frac{1}{2} dx \\ &+ \int_{L(1-\alpha)}^L \omega x \frac{K[x-L(1-\alpha)]}{\alpha} \cdot \frac{(L-x)\delta}{\alpha L} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{\delta \omega L^3}{24} K(\alpha^2 - 4\alpha + 6)$$

$$\text{內的일} = 2M_p(i_1+1) \frac{2\delta}{K} + \mu M_p(i_2+1) \frac{K\delta}{\alpha}$$

그 결과를 종합하면

$$\frac{M_p}{\omega L^3} = \frac{\alpha K^2(\alpha^2 - 4\alpha + 6)}{24 \{ 4\alpha(i_1+1) + \mu K^2(i_2+1) \}} \quad (4)$$

$$\frac{\partial M_p}{\partial \alpha} = 0 \text{ 에서}$$

$$\begin{aligned} 8(i_1+1)\alpha^3 - \{ 16(i_1+1) - 3\mu K^2(i_2+1) \} \alpha^2 \\ - 8\mu K^2(i_2+1)\alpha + 6\mu K^2(i_2+1) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

이때 주어진 슬래브의 幾何學의 特性을 考慮하면 α 의 범위는 $0 \leq \alpha \leq 1$ 이 되어야 하므로 이 범위내에서 식(5)로부터 α 를 구하여 식(4)에 代入하여 M_p 의 最大値를 求할 수 있다. 또는 最適化 技法을 利用할 수도 있는데 만족해야 될 α 의 범위를 制約條件으로 하여 직접 식(4)에서 M_p 의 最大化 問題로 解決할 수가 있다.

(3) 降伏線모드Ⅲ

그림 2의 降伏線모드Ⅰ에서 降伏線의 한 끝은 바닥선과 垂直線의 만나는 角에서 끝나게 된다. 그러나, 實際적으로 角에서의 破壞는 降伏線이 角끝까지 이르지 않고 角에 가까워 오면 부채꼴로 된다. 따라서, 降伏線은 角부근에 오면 支流로 나누어지게 되고, 두 나누어진 降伏線들 사이에도 또 다른 剛區域이 發生하게 된다. 이런 모우드의 메카니즘을 그림 4에 보인 바와 같은 부채꼴메카니즘으로 假定하여 解決할 수가 있다. 이런 부채꼴메카니즘은 그림 2와 같은 메카니즘에 비하여 매우 복잡하게 되나 일반적으로

로 좀더 精密한 것이 보통이다^(11,18). 그림 4에서 보듯이 부채꼴은 원형으로 假定하였다. 따라서, P 는 α, β, γ, K 의 함수로 구하여지게 되어 降伏線의 配列을 決定짓는 媒介變數들은 α, β, γ 의 3개가 된다. 剛區域은 降伏線에 의하여 5개로 나누어졌으나 계산상 편리하도록 A, B, C, D, E, F 의 6개 部分들에 대하여 式(1)을 適用하여 解를 求하였다.

$$\text{外的일} = 2\bar{A}_3 + 2\bar{B}_3 + 2\bar{C}_3 + 2\bar{D}_3 + \bar{E}_3 + \bar{F}_3$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{A}_3 &= \int_0^{(1-\beta)L} \omega x \cdot \alpha K (L-x) \frac{\delta(L-x)}{2L} dx \\ &= \frac{\delta \omega L^3 \alpha K}{2} \left\{ \frac{(1-\beta)^2}{2} - \frac{2(1-\beta)^3}{3} + \frac{(1-\beta)^4}{4} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_3 &= \int_{(1-\beta)L}^{(1-\beta+P)L} \omega x \cdot \frac{\alpha\beta K}{P} (L-\beta L+PL-x) \cdot \\ &\quad \frac{\delta\beta}{2PL} (L-\beta L+PL-x) dx \\ &= \frac{\delta \omega L^3 \alpha \beta^2 K}{2} \left\{ \frac{P^2}{12} + \frac{P}{3} (1-\beta) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_3 &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\gamma L} \omega x \cdot \gamma' \frac{\beta\delta}{\gamma L} (\gamma L - \gamma') d\gamma' d\theta \\ &= \delta \omega L^3 \frac{\beta\gamma^2}{12} \left\{ 2(1-\beta) \left[\cos^{-1} \left(\frac{P}{\gamma} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos^{-1} \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) \right] + \gamma \left(\frac{\alpha\beta K}{\gamma} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}{\gamma} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_3 &= \int_{L(1-\beta)}^L \omega x \cdot \frac{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}{\beta} \{x - (1-\beta)L\} \cdot \\ &\quad \frac{\delta}{L} (L-x) dx \\ &= \delta \omega L^3 \frac{\beta^2 \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}{12} (2-\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_3 &= \int_{(1-\beta)L}^L \omega x \cdot L (K - 2\alpha\beta K) \cdot \frac{\delta(L-x)}{L} dx \\ &= \delta \omega L^3 K \beta^2 (1-2\alpha\beta) \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_3 &= \int_0^{L(1-\beta)} \omega x \{KL(1-2\alpha) + 2\alpha Kx\} \\ &\quad \frac{\delta}{L} (L-x) dx \\ &= \delta \omega L^3 \frac{K(1-\beta)^2}{6} \{1-\alpha+2\beta-2\alpha\beta-3\alpha\beta^2\} \end{aligned}$$

$$\text{內的일} = 2 \times \bar{X}_3 + 2 \times \bar{Y}_3 + \bar{Z}_3$$

여기서

$$\bar{X}_3 = M_p \delta (1+i_1)(1-\beta+P) \frac{1}{\alpha K}$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_3 &= M_p \delta \frac{\beta}{2} \left\{ (1+i_1+\mu+\mu i_2) \left(\cos^{-1} \frac{P}{\gamma} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos^{-1} \frac{\beta}{\gamma} \right) + (1+i_1-\mu-\mu i_2) \frac{\beta}{\gamma^2} (\alpha K P \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_3 &= M_p \delta \mu \{K(i_2+2\alpha) - 2(\alpha\beta K \\ &\quad - \sqrt{\gamma^2 - \beta^2})(i_2+1)\} \end{aligned}$$

그 結果를 綜合하면

$$\begin{aligned} \frac{M_p}{\omega L^3} &= \{2A_3 + 2B_3 + 2C_3 + 2D_3 + E_3 \\ &\quad + F_3\} / [2X_3 + 2Y_3 + Z_3] \end{aligned} \quad (6)$$

여기서

$$A_3 = \frac{\alpha K}{2} \left\{ \frac{(1-\beta)^2}{2} - \frac{2(1-\beta)^3}{3} + \frac{(1-\beta)^4}{4} \right\}$$

$$B_3 = \frac{\alpha\beta^2 K}{2} \left\{ \frac{P^2}{12} + \frac{P}{3} (1-\beta) \right\}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{\beta\gamma^2}{12} \left\{ 2(1-\beta) \left[\cos^{-1} \frac{P}{\gamma} - \cos^{-1} \frac{\beta}{\gamma} \right] \right. \\ &\quad \left. + \gamma \left(\frac{\alpha\beta K}{\gamma} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}{\gamma} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$D_3 = \frac{\beta^2 \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}{12} (2-\beta)$$

$$E_3 = K\beta^2 (1-2\alpha\beta) \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{3} \right)$$

$$F_3 = \frac{K(1-\beta)^2}{6} (1-\alpha+2\beta-2\alpha\beta-3\alpha\beta^2)$$

$$X_3 = (1+i_1)(1-\beta+P) \frac{1}{\alpha K}$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= \frac{\beta}{2} \left\{ (1+i_1+\mu+\mu i_2) \left(\cos^{-1} \frac{P}{\gamma} - \cos^{-1} \frac{\beta}{\gamma} \right) \right. \\ &\quad \left. + (1+i_1-\mu-\mu i_2) \frac{\beta}{\gamma^2} (\alpha K P - \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}) \right\} \end{aligned}$$

$$Z_3 = \mu \{K(i_2+2\alpha) - 2(\alpha\beta K - \sqrt{\gamma^2 - \beta^2})(i_2+1)\}$$

이때 만족해야 될 각 媒介變數들의 범위는

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ 0 \leq \beta \leq \gamma \\ \beta \leq \gamma \leq \beta \sqrt{1+\alpha^2 K^2} \\ 0 \leq \beta \leq 1 \\ \alpha\beta K \leq \gamma \leq \beta \sqrt{1+\alpha^2 K^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

따라서, 式(7)의 制約條件을 만족하면서 M_p 가 最大로 되는 값을 求하면 된다. 이러한 問題는 制約條件을 가지는 多變數 最適化問題로 形成되기 때문에 잘 알려진 最適化 技法들을 利用하여 解決할 수가 있다.

(4) 降伏線모드 N

降伏線모드 I 과 III의 관계와 마찬가지로 降伏線모드 II의 경우에도 直線의 降伏線이 구석부근에서 원형의 부채꼴로 形成된다고 假定하였다. 따라서, 그림 5에서 보듯이 5개의 剛區域들로 나누어지나 計算의 便易를 위하여 A, B, C, D, E, F, G의 7개 部分들로 나누어 計算하였다. 降伏線의 配列을 決定짓는 媒介變數들도 α, β, γ 의 3개가 되며 P는 α, β, γ, K 의 函數로 決定된다.

$$\text{外的일} = 2\bar{A}_4 + 2\bar{B}_4 + 2\bar{C}_4 + 2\bar{D}_4 + 2\bar{E}_4 + \bar{F}_4 + \bar{G}_4$$

여기서

$$\bar{A}_4 = \int_0^{L(1-\alpha)} \omega x \frac{KL}{2} \frac{\delta}{2} dx = \delta \omega L^3 \frac{K}{8} (1-\alpha)^2$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_4 &= \int_{L(1-\alpha)}^{L(1-\beta)} \omega x \frac{K}{2\alpha} (L-x) \cdot \frac{\delta(L-x)}{2\alpha L} dx \\ &= \delta \omega L^3 \frac{K}{48\alpha^2} \{4(\alpha^3 - \beta^3) - 3(\alpha^4 - \beta^4)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_4 &= \int_{L(1-\beta)}^{L(1-\beta+P)} \omega x \frac{\delta K \beta^2 L}{4\alpha^2} \left[1 - \frac{x-L(1-\beta)}{PL}\right]^2 dx \\ &= \delta \omega L^3 \frac{K \beta^2}{4\alpha^2} \left\{ \frac{P^2}{12} + \frac{P}{3}(1-\beta) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_4 &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{rL} \omega (L-L\beta + \gamma' \cos \theta) \gamma' \frac{\beta \delta}{\alpha \gamma L} (\gamma L - \gamma') \\ & \quad d\gamma' d\theta = \delta \omega L^3 \frac{\beta \gamma^2}{\alpha} \left\{ \frac{(1-\beta)}{6} \left(\cos^{-1} \frac{P}{\gamma} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \cos^{-1} \frac{\beta}{\gamma} \right) + \frac{\gamma}{12} \left(\frac{K\beta}{2\alpha\gamma} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}{\gamma} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_4 &= \int_{L(1-\beta)}^L \omega x \frac{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}{\beta} \{x - L(1-\beta)\} \frac{\delta}{\alpha L} \\ & \quad (L-x) dx = \delta \omega L^3 \frac{\beta^2}{12\alpha} (2-\beta) \sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_4 &= \int_{L(1-\beta)}^L \omega x KL \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{\delta}{\alpha L} (L-x) dx \\ &= \delta \omega L^3 \frac{K(\alpha-\beta)}{\alpha^2} \beta^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_4 &= \int_{L(1-\alpha)}^{L(1-\beta)} \omega x \frac{K}{\alpha} \{x - L(1-\alpha)\} \frac{\delta}{\alpha L} (L-x) dx \\ &= \delta \omega L^3 \frac{K}{\alpha^2} \left\{ \frac{(2-\alpha)}{3} \{(1-\beta)^3 - (1-\alpha)^3\} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\{(1-\beta)^2 - (1-\alpha)^2\}}{4} \{2(1-\alpha) + (1-\beta)^2\} \right. \\ & \quad \left. + (1-\alpha)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\text{內的일} = 2\bar{X}_4 + 2\bar{Y}_4 + \bar{Z}_4$$

여기서

$$\bar{X}_4 = M_p \delta \frac{2}{K} (1+i_1)(1-\beta+P)$$

$$\bar{Y}_4 = M_p \frac{\delta \beta}{\alpha} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{(1+i_1) \sin^2 \theta + \mu(1+i_2)$$

$$\cos^2 \theta\} d\theta = M_p \delta \frac{\beta}{2\alpha} \left\{ (1+i_1 + \mu + \mu i_2) \right.$$

$$\left(\cos^{-1} \frac{P}{\gamma} - \cos^{-1} \frac{\beta}{\gamma} \right) + (1+i_1 - \mu - \mu i_2)$$

$$\left. \left(\frac{K\beta P}{2\alpha\gamma^2} - \frac{\beta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}{\gamma^2} \right) \right\}$$

$$\bar{Z}_4 = M_p \delta \mu (i_2 + 1) \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{K}{\alpha} (\alpha - \beta) + 2\sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \right]$$

그 結果를 綜合하면

$$\begin{aligned} \frac{M_p}{\omega L^3} &= (2A_4 + 2B_4 + 2C_4 + 2D_4 + 2E_4 + F_4 \\ & \quad + G_4) / (2X_4 + 2Y_4 + Z_4) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서

$$A_4 = \frac{K}{8} (1-\alpha)^2$$

$$B_4 = \frac{K}{48\alpha^2} \{4(\alpha^3 - \beta^3) - 3(\alpha^4 - \beta^4)\}$$

$$C_4 = \frac{K\beta^2}{4\alpha^2} \left\{ \frac{P^2}{12} + \frac{P}{3}(1-\beta) \right\}$$

$$\begin{aligned} D_4 &= \frac{\beta \gamma^2}{\alpha} \left\{ \frac{(1-\beta)}{6} \left(\cos^{-1} \frac{P}{\gamma} - \cos^{-1} \frac{\beta}{\gamma} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\gamma}{12} \left(\frac{K\beta}{2\alpha\gamma} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}{\gamma} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$E_4 = \frac{\beta^2}{12\alpha} (2-\beta) \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$$

$$F_4 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} K(\alpha-\beta) \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} G_4 &= \frac{K}{\alpha^2} \left\{ \frac{(2-\alpha)}{3} \{(1-\beta)^3 - (1-\alpha)^3\} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4} \{(1-\beta)^2 - (1-\alpha)^2\} \{2(1-\alpha) \right. \\ & \quad \left. + (1-\beta)^2 + (1-\alpha)^2\} \right\} \end{aligned}$$

$$X_4 = \frac{2}{K} (1+i_1)(1-\beta+P)$$

$$\begin{aligned} Y_4 &= \frac{\beta}{2\alpha} \left\{ (1+i_1 + \mu + \mu i_2) \left(\cos^{-1} \frac{P}{\gamma} - \cos^{-1} \frac{\beta}{\gamma} \right) \right. \\ & \quad \left. + (1+i_1 - \mu - \mu i_2) \left(\frac{K\beta P}{2\alpha\gamma^2} - \frac{\beta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}{\gamma^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$Z_4 = \mu(i_2 + 1) \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{K}{\alpha} (\alpha - \beta) + 2\sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \right]$$

이때 만족해야 될 각 媒介變數들의 범위는

$$\left. \begin{aligned} \beta &\leq \alpha \leq 1 \\ 0 &\leq \beta \leq \gamma \\ \beta &\leq \gamma \leq \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{K^2 + 4\alpha^2} \\ \frac{K\beta}{2\alpha} &\leq \gamma \leq \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{K^2 + 4\alpha^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

따라서, 식(9)의 制約條件을 만족하면서 M_b 가 最大가 되도록 값을 구하면 된다. 이 問題도 앞의 降伏線모드 III과 마찬가지로 制約條件을 가지는 多變數 最適化 問題로 形成되기 때문에 最適化 技法을 사용하여 解決할 수가 있다.

5. 最適化 問題形成

降伏線모드 I과 II는 간단하여 수치적으로 쉽게 결과를 구할 수가 있으나, 降伏線모드 III과 IV는 制約條件을 가지는 非線型多變數 最適化 問題로 되기 때문에 여기서는 잘 알려져 있는 最適化 알고리즘(Algorithm)을 利用하였다. SLP, SUMT法 등의 利用도 가능하겠으나 本 研究에서는 式(6) 및 式(18)에서 보는 바와 같이 目的 函數가 매우 복잡하기 때문에 微分을 하지 않고도 수렴하는 連續的 探查技法인 Rosenbrock의 自動化 方法으로서의 Hill 알고리즘을 使用하였다.

Hill 알고리즘에 대한 一般的 最適化 問題는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \text{Optimize : } &F(X_1, \dots, X_n) \\ \text{Subject to : } & \\ &G_i \leq X_i \leq H_i \\ &i=1, \dots, n, n+1, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

여기서

X_1, \dots, X_n = explicit independent variables

X_{n+1}, \dots, X_m = implicit variables

이에 따라서 降伏線모드 III에 대한 最適化 問題를 形成하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \text{maximize : } &(2A_3 + 2B_3 + 2C_3 + 2D_3) \\ &+ E_3 + F_3) / (2X_3 \\ &+ 2Y_3 + Z_3) \\ \text{Subject to : } &0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ &0 \leq \beta \leq \gamma \\ &\beta \leq \gamma \leq \beta \sqrt{1 + \alpha^2 K^2} \\ &0 \leq \beta \leq 1 \\ &\alpha \beta K \leq \gamma \leq \beta \sqrt{1 + \alpha^2 K^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

또, 降伏線모드 IV에 대한 最適化 問題를 形成하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \text{maximize : } &(2A_4 + 2B_4 + 2C_4 + 2D_4 \\ &+ 2E_4 + F_4 + G_4) / \\ &(2X + 2Y + Z) \\ \text{subject to : } &\beta \leq \alpha \leq 1 \\ &0 \leq \beta \leq \gamma \\ &\beta \leq \gamma \leq \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{K^2 + 4\alpha^2} \\ &\frac{K\beta}{2\alpha} \leq \gamma \leq \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{K^2 + 4\alpha^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(11)과 式(12)에 대하여 문헌 20에서의 Hill 알고리즘에 의한 最適化 알고리즘을 要約하면 다음과 같다.

(1) 制約條件을 만족하며, 境界領域에 놓이지 않는 初期值 $\{X_i\} = (X_1, X_2, X_3)^T$ 와 step size $\{S_i\} = (S_1, S_2, S_3)^T$ 를 決定한다.

(2) 制約條件이 만족되는 점에 대한 現在의 最上의 目的函數값을 F° , 制約條件이 만족되지 않거나 境界領域에 위반되지 않는 점에 대한 最上의 目的函數값을 F^* 라고 하면 最初出發點에서 F° 와 F^* 는 같다.

(3) 境界領域이나 制約條件을 위반하지 않고 目的函數값이 증가하는 경우에는 $F^* = F^\circ$ 로 놓고 $S_{i(\text{new})} = \alpha S_{i(\text{old})}$, $\alpha \leq 1$ 로 하여 다음 設計點 $X_{i(\text{new})} = X_{i(\text{old})} + S_{i(\text{new})}$ 을 求하여 探查過程을 계속한다.

(4) 만일, 現在의 點에서 目的函數값이 F° 보다 작아지거나, 또는 制約條件을 위반할 때는 $S_{i(\text{new})} = -\beta S_{i(\text{old})}$, $0 < \beta \leq 1$ 로 하여 다음 設計點 $X_{i(\text{new})} = X_{i(\text{old})} + S_{i(\text{new})}$ 을 求하여 探查過程을 계속한다.

(5) 만일, 現在의 點이 境界領域에 있다면 目的函數는 다음과 같이 修正된다.

$$F_{(\text{new})} = (F_{(\text{old})} - F^*) (3\lambda - 4\lambda^2 + 2\lambda^3)$$

여기서

$$\lambda = \frac{G_i + (H_i - G_i) \cdot 10^{-4} - X_i}{(H_i - G_i) \cdot 10^{-4}}$$

$$\text{or } \frac{X_i - \{H_i - (H_i - G_i) \cdot 10^{-4}\}}{(H_i - G_i) \cdot 10^{-4}}$$

(6) 모든 方向에서 目的函數의 增加와 減少가 있었다면 座標軸을 回轉시켜 探查를 계속한다.

(7) 收斂限界에 도달하면 探查를 끝낸다.

以上の 알고리즘을 흐름도로 나타내면 그림 6

과 같다.

와 表를 利用하여 結果分析을 하였으며 最終의 으로 가장 精密한 값을 表 2에 推薦하였으므로 設計者는 이 값을 設計에 使用할 수 있을 것이다. 여기서 端支持狀態는 그림 7과 같이 4가지 경우로 하였다.

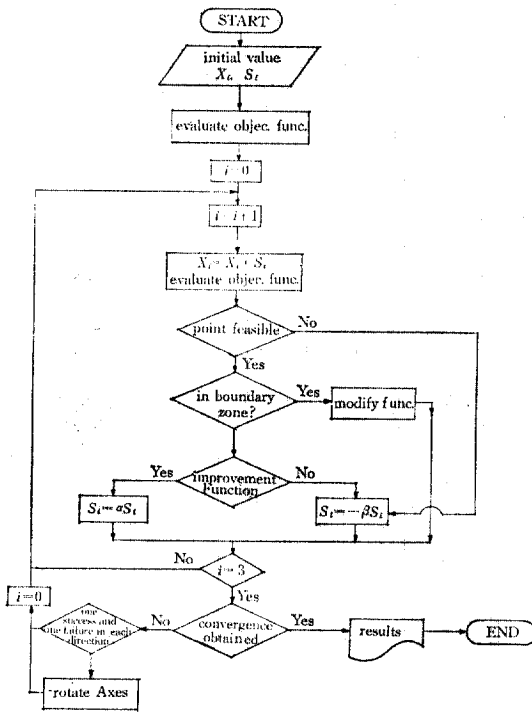


그림 6. Flowchart of Hill Algorithm

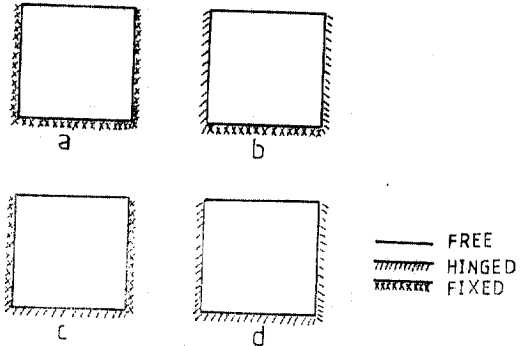


그림 7. 端支持狀態

(1) 降伏線모드 I과 II는 비교적 계산이 간단하였으며 basic program을 作成하여 쉽게 구할 수 있었다. 그 計算結果值들은 表 1에서 보는 바와 같이 문헌 1의 結果와 一致하였으며, 그림 8,9,10,11에 나타난 바와 같다. 그래프는 두 모드들의 값들 중 높은 값들만을 취하여 하나의 曲線을 만들었다.

(2) 降伏線모드 III과 IV의 計算結果는 그림 8,9,10,11과 表 2에 나타난 바와 같다. 하나의 그래프는 두 모드들의 값 중 큰 값들만으로 構成시켜 精密하게 되도록 하였으며, 그래프의 복잡성을 피하기 위하여 $K=1.0, K=2.0, K=3.0$ 의 경우만을 例示하였다. 그림 8~11에서 보면

6. 結果 및 分析

降伏線모드 I과 II 그리고 降伏線모드 III과 IV의 각각의 $\frac{M_p}{\omega L^3}$ 의 값을 여러 가지 狀態의 K, μ , 端支持條件들에 대하여 求하였다. 그래프

表 1. 降伏線모드 I, II의 結果 (端支持狀態 a)

K	비교문헌	$M_p/\omega L^3 \times 10^2$									
		$\mu=0.5$	$\mu=1.0$	$\mu=1.5$	$\mu=2.0$	$\mu=2.5$	$\mu=3.0$	$\mu=3.5$	$\mu=4.0$	$\mu=4.5$	$\mu=5.0$
0.5	문헌 1	0.60	0.53	0.48	0.45	0.43	0.40	0.38	0.37	0.35	0.34
	본 연구	0.5901	0.5279	0.4856	0.4533	0.4270	0.4048	0.3858	0.3690	0.3542	0.3408
1.0	문헌 1	1.81	1.48	1.27	1.13	1.02	0.93	0.86	0.80	0.74	0.70
	본 연구	1.8131	1.4762	1.2708	1.1258	1.0157	0.9282	0.8565	0.7963	0.7449	0.7004
1.5	문헌 1	3.18	2.40	1.96	1.68	1.49	1.36	1.25	1.16	1.08	1.02
	본 연구	3.1876	2.4014	1.9646	1.6761	1.4911	1.3557	1.2472	1.1577	1.0825	1.0180
2.0	문헌 1	4.50	3.18	2.56	2.20	1.94	1.74	1.59	1.46	1.36	1.27
	본 연구	4.5031	3.1852	2.5641	2.1980	1.9382	1.7420	1.5873	1.4616	1.3570	1.2683
2.5	문헌 1	5.68	3.92	3.14	2.65	2.32	2.07	1.87	1.71	1.58	1.47
	본 연구	5.6810	3.9220	3.1424	2.6563	2.3178	2.0657	1.8693	1.7112	1.5806	1.4706
3.0	문헌 1	6.70	4.63	3.65	3.05	2.64	2.34	2.11	1.92	1.77	1.64
	본 연구	6.7044	4.6310	3.6514	3.0532	2.6425	2.3399	2.1061	1.9192	1.7658	1.6373

表 2. 降伏線モードⅢ,Ⅳ의 結果

端支持 狀 態	K	$M_p/\omega L^2 \times 10^2$									
		$\mu=0.5$	$\mu=1.0$	$\mu=1.5$	$\mu=2.0$	$\mu=2.5$	$\mu=3.0$	$\mu=3.5$	$\mu=4.0$	$\mu=4.5$	$\mu=5.0$
a	0.5	0.6241 (5.76)	0.5492 (4.03)	0.5170 (6.59)	0.4954 (9.29)	0.4740 (11.01)	0.4550 (12.40)	0.4447 (15.27)	0.4336 (17.51)	0.4242 (19.76)	0.4150 (21.77)
	1.0	1.9870 (9.59)	1.5668 (6.14)	1.3950 (9.77)	1.2702 (12.83)	1.1721 (15.40)	1.0933 (17.79)	1.0244 (19.60)	0.9637 (21.02)	0.9098 (22.14)	0.8616 (23.02)
	1.5	3.6059 (13.12)	2.5676 (6.92)	2.1815 (11.04)	1.9293 (15.11)	1.7559 (17.76)	1.6127 (18.96)	1.5058 (20.73)	1.3949 (20.49)	1.3243 (22.34)	1.2501 (22.80)
	2.0	5.0181 (11.44)	3.4065 (6.95)	2.8705 (11.95)	2.5415 (15.63)	2.2875 (18.02)	2.0845 (19.66)	1.9205 (20.99)	1.7833 (22.01)	1.6540 (21.89)	1.5415 (21.54)
	2.5	6.7701 (19.17)	4.2243 (7.71)	3.4967 (11.27)	3.0295 (14.05)	2.7003 (16.50)	2.4453 (18.38)	2.2359 (19.61)	2.0567 (20.19)	1.9198 (21.46)	1.7827 (21.22)
	3.0	7.9643 (18.79)	5.0020 (8.01)	4.0800 (11.74)	3.4551 (13.16)	3.0328 (14.77)	2.7518 (17.60)	2.4959 (18.51)	2.2721 (18.39)	2.1254 (20.36)	1.9615 (19.80)
b	0.5	1.0985 (4.04)	0.9950 (9.76)	0.9070 (12.02)	0.8406 (13.89)	0.7834 (14.92)	0.7343 (15.56)	0.6919 (16.36)	0.6590 (17.07)	0.6469 (21.23)	0.6167 (21.45)
	1.0	3.1336 (6.14)	2.5063 (11.32)	2.1990 (18.46)	1.9490 (22.38)	1.7495 (24.37)	1.6177 (26.18)	1.5199 (28.61)	1.4277 (29.91)	1.3424 (30.44)	1.2688 (30.93)
	1.5	5.1351 (6.92)	3.9361 (17.42)	3.2163 (18.63)	2.8259 (22.04)	2.5287 (24.20)	2.3089 (26.47)	2.1052 (26.78)	1.9518 (27.85)	1.8126 (28.06)	1.6744 (26.73)
	2.0	6.8128 (6.94)	5.0711 (15.36)	4.1702 (19.70)	3.5331 (20.86)	3.1139 (22.76)	2.7732 (23.21)	2.5538 (25.85)	2.3133 (24.91)	2.1058 (24.43)	1.9420 (22.64)
	2.5	8.4486 (7.71)	6.1071 (14.96)	4.9202 (19.09)	4.1425 (21.04)	3.5677 (21.30)	3.1486 (21.30)	2.8185 (21.46)	2.5560 (21.34)	2.3658 (22.47)	2.1908 (22.68)
	3.0	10.0038 (8.01)	6.8784 (12.64)	5.4154 (15.71)	4.5391 (18.26)	3.8075 (16.27)	3.3655 (17.40)	2.9939 (17.12)	2.6847 (16.17)	2.5264 (19.56)	2.3965 (23.12)
c	0.5	0.6632 (3.69)	0.6230 (5.58)	0.5808 (4.59)	0.5492 (4.03)	0.5330 (5.50)	0.5210 (7.29)	0.5054 (7.88)	0.4954 (9.29)	0.4849 (10.33)	0.4740 (11.01)
	1.0	2.3295 (10.31)	2.0066 (10.67)	1.7533 (8.27)	1.5668 (6.14)	1.4460 (6.07)	1.3754 (8.23)	1.3130 (10.08)	1.2399 (10.14)	1.1892 (11.42)	1.1362 (11.86)
	1.5	4.4479 (12.45)	3.5327 (10.83)	2.9940 (9.87)	2.5676 (6.92)	2.3077 (6.97)	2.1667 (10.29)	2.0605 (11.93)	1.9686 (12.52)	1.9054 (14.01)	1.8434 (14.98)
	2.0	6.8268 (15.62)	5.0307 (11.72)	4.0123 (8.07)	3.5107 (7.92)	3.2878 (10.13)	3.1204 (12.33)	3.0141 (15.47)	2.8595 (15.72)	2.7342 (16.20)	2.6515 (17.78)
	2.5	9.1071 (16.56)	6.3900 (12.48)	5.1981 (8.67)	4.6750 (9.49)	4.3050 (10.41)	4.0867 (13.06)	3.8869 (14.77)	3.7328 (16.70)	3.5944 (18.24)	3.4523 (18.90)
	3.0	11.3101 (17.74)	8.1922 (17.07)	6.5567 (10.00)	5.8803 (11.06)	5.3562 (11.16)	5.0910 (14.26)	4.8366 (16.08)	4.6151 (17.46)	4.4672 (19.79)	4.2814 (20.33)
d	0.5	1.2495 (5.87)	1.0985 (4.04)	1.0358 (6.64)	1.0120 (11.64)	0.9893 (15.86)	0.9675 (19.49)	0.9467 (22.71)	0.9229 (25.04)	0.9076 (28.12)	0.8893 (30.45)
	1.0	4.0622 (12.03)	3.1328 (6.11)	2.8118 (10.64)	2.5296 (12.35)	2.3175 (14.09)	2.1382 (15.19)	2.0655 (20.58)	1.9409 (19.32)	1.8594 (19.58)	1.8001 (20.59)
	1.5	7.2118 (13.12)	5.1351 (6.92)	4.3631 (11.04)	3.9730 (13.55)	3.7313 (16.37)	3.5393 (18.76)	3.3607 (20.11)	3.2195 (21.61)	3.0937 (22.79)	2.9476 (22.34)
	2.0	10.1396 (12.59)	7.0214 (7.91)	6.2492 (12.48)	5.6978 (15.29)	5.2773 (17.21)	4.9341 (18.42)	4.8046 (23.24)	4.5523 (23.76)	4.3127 (23.48)	4.1219 (23.69)
	2.5	13.5401 (19.17)	9.3500 (9.49)	8.2119 (13.60)	7.5029 (17.28)	6.9273 (19.29)	6.4586 (20.51)	6.0666 (21.23)	5.7551 (22.10)	5.5553 (24.30)	5.3131 (24.71)
	3.0	16.3116 (16.55)	11.7605 (11.06)	10.2303 (14.80)	9.4136 (19.79)	8.4290 (18.45)	7.7284 (17.89)	7.1367 (16.75)	6.6774 (16.11)	6.4568 (18.52)	6.2816 (21.06)

()는 {(모드Ⅲ,Ⅳ의 결과)-(모드Ⅰ,Ⅱ의 결과)}×100/(모드Ⅰ,Ⅱ의 결과)

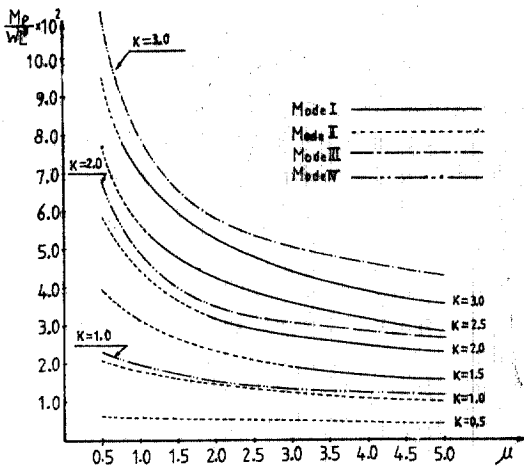


그림 8. 端支持狀態 a의 結果 ($i_1=1.0, i_2=1.0$)

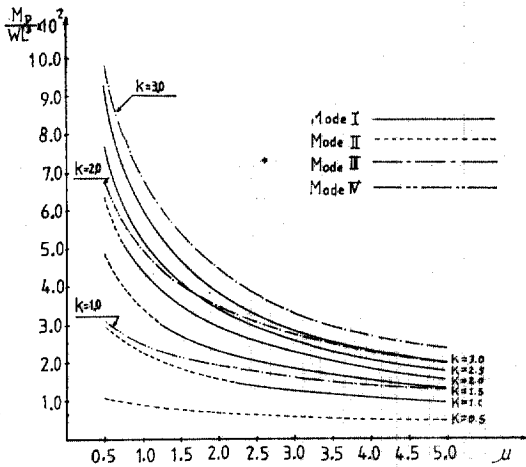


그림 9. 端支持狀態 b의 結果 ($i_1=0.0, i_2=1.0$)

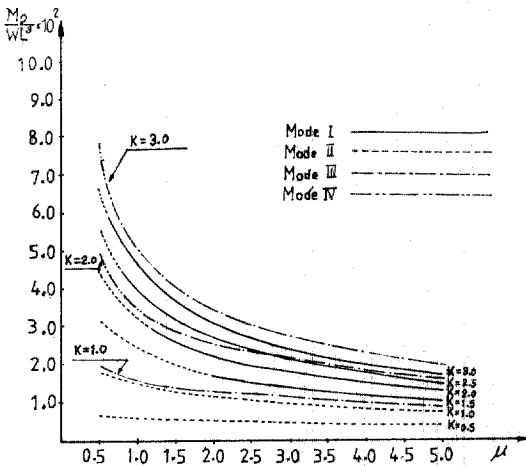


그림 10. 端支持狀態 c의 結果 ($i_1=1.0, i_2=0.0$)

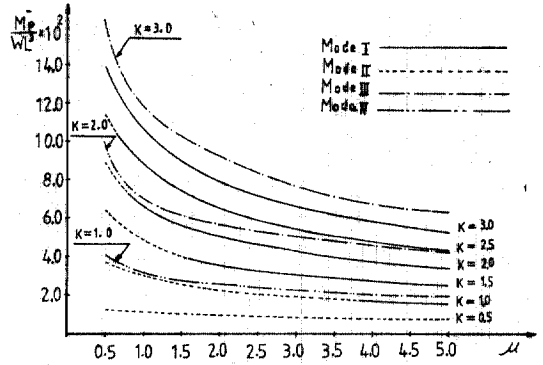


그림 11. 端支持狀態 d의 結果 ($i_1=0.0, i_2=0.0$)
모드 III, IV의 塑性舉動은 모드 I, II와 一致된다. 곧, 임의의 條件下에서 모드 I은 모드 III과 모드 II는 모드 IV와 대응된다.

(3) 表 2에서 보면 모드 III, IV의 結果值들은 條件에 따라 모드 I, II의 結果值들에 비하여 4~30% 정도로 增加함을 보임으로써 모드 III, IV의 結果值들이 보다 精密함을 알 수 있다. 특히 直交異方性係數가 커질수록 더욱 增加幅이 커지고 있음을 알 수 있다. 만일, 設計에 利用하고자 할 때는 表 2의 結果를 利用하면 된다.

(4) Horton의 研究에서는 부채꼴메카니즘에 대하여 모드 IV에 대해서만 公式를 誘導하였으나 完全치 못하였으며 그 結果도 또한 구할 수 없었다. 本 研究에서는 Horton이 생각한 모드 IV의에 모드 III까지 고려하여 公式를 誘導하였고 그 結果를 計算하는데 있어서도 最適化 技法인 Hill 알고리즘을 利用하여 용이하게 計算할 수가 있었다.

(5) 本 研究에서는 원형의 부채꼴을 假定하였으나 타원의 부채꼴을 假定하는 경우에는 특히 直交異方性係數가 커질수록 보다 精密한 값을 얻을 수 있을 것으로 판단되므로, 이에 대한 研究가 필요한 것으로 생각된다.

7. 結 論

本 研究는 上邊이 開放된 短形의 鐵筋콘크리트 탱크의 垂直壁에 해당하는 短形鐵筋콘크리트 슬래브에 靜水壓形態의 荷重이 作用할 때 4가지 메카니즘을 假定하고 여러 가지 形狀比, 直交異方性係數, 端支持狀態에 따라 슬래브를 降伏線理論에 의하여 解析한 것으로서 얻어진 結論을 要約하면 다음과 같다.

(1) 矩形鐵筋콘크리트 슬래브로 된 垂直壁이 靜水壓形態의 荷重을 받을 때 원형의 부채꼴메카니즘에 의한 方程式을 구하였으며 그 方程式은 式(6), 式(8)과 같다.

(2) Horton은 부채꼴메카니즘에 대하여 結果值를 구할 수 없었으나 本 研究에서는 最適化 알고리즘을 使用하여 부채꼴메카니즘에 대하여 誘導된 公式로부터 용이하게 結果值를 구할 수 있었다.

(3) 부채꼴메카니즘에 의한 降伏線解析의 結果는 對角線메카니즘에 의한 解析結果와 塑性舉動이 一致하였으나 塑性모멘트는 4~30% 정도 로 더 增加하였다. 특히 直交異方性係數가 클수록 增加幅은 컸다.

(4) 보다 正確하고 安全한 값은 下限界解가 구하여질 때만이 얻어질 수 있으나 變形硬化와 膜作用을 고려치 않았으므로 부채꼴메카니즘에 의한 結果로써 表 2의 값은 實際設計에 使用할 수 있을 것이다.

參 考 文 獻

1. Horton, T.G., "The Yield-line Analysis of Rectangular Reinforced Concrete Tanks", *Thesis Presented to Oxford University*, at Oxford, England, in 1969.
2. Petcu, V., "Plastic Design of Reinforced Concrete Rectangular slabs subjected to Loads of Hydrostatic Type," *Indian Concrete Journal*, pp. 947~973, Sept. 1965.
3. Clyde, D.H., "Yield-line Theory and Plasticity", *Magazine of Concrete Research*, Vol. 24, No. 78, pp. 37~42, March 1972.
4. Johansen, K.W., *Yield-line Formulas for Slabs*, Cement and Concrete Association, London, pp. 103, 1972.
5. Hognestad, E., "Yield-line theory for the ultimate flexural strength of reinforced concrete slabs", *Proc. ACI*, 49, No. 7, March pp. 637~656, 1953.
6. Morley, C.T., "Experiments on the yield criterion of isotropic reinforced concrete slabs," *Proc. ACI*, 64, No. 1, pp. 40~45, Jan. 1967.
7. Reddy, D.V., and Murphree, E.L., "Ultimate-load analysis of edge-loaded foundation slabs," *The structural Engineer*, Vol. 46, No. 1, pp.

- 13~16, Jan. 1968.
8. Johansen, K.W., *Yield-line Theory*, Cement and Concrete Association, London, England, pp. 181.
9. Hillerberg, A., "A Plastic Theory for the Design of Reinforced Concrete Slab," *Sixth Congress, International Association for Bridge and Structural Engineering*, Stockholm, Sweden, June, 1960.
10. Wilby, C.A., "Application of the Strip Method to the design of Tanks," *Indian Concrete Journal*, pp. 109~113, April 1979.
11. Moy, S.S.T., *Plastic Methods for Steel and Concrete Structures*, The Macmillan Press LTD., London, 1981.
12. Armer, G.S.T., "The strip method: a new approach to the design of slabs," *Current paper*, CP 81/68, Watford, Building Research Establishment, p. 6, 1968.
13. Wood, R.H., and Armer, G.S.T., "The theory of the strip method for design of slabs," *Proc. ICE*, 41, pp. 285~311, Oct 1968.
14. Kemp, K.O., "A Lower Bound Solution to the Collapse of an Orthotropically Reinforced Slab on Simple Supports," *Magazine of Concrete Research*, Vol. 14, No. 41, pp. 79~84, July 1962.
15. Rangan, B.V., "Lower Bound Solutions for Continuous Orthotropic Slabs," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 99, No. ST3, pp. 443~452, March 1973.
16. Rangan, B.V., "Limit State Design of Slabs Using Lower Bound Approach," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 100, No. ST2, pp. 373~389, Feb 1974.
17. Wilby, C.A., "Structural Analysis of Reinforced Concrete Tanks," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 103, No. ST5, pp. 989~1004, May 1977.
18. Hodge, P.G., *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1959.
19. Massonet, C.E., *Plastic Analysis and Design of Plates, Shells and Disks*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1972.
20. Kuester, T.L., and Mize, T.H., *Optimization Techniques with Fortran*, McGraw-Hill, New York, 1973.

(接受: 1984. 8. 30)