土砂運搬作業의 適正裝備組合決定을 위한 待期模型의 應用

An Application of Probabilistic Queueing Model for Determination of Optimal Equipment Requirement in Earth Haul Operations

李 培 浩*
Lee, Bae Ho

Abstract

The paper presents an application of the Theory of Queue to a typical eath-haul operations. Field measurements of arrival and serve times were used to analyze the mathematical model for determination of optimal equipment requirements. Despite the model produces somewhat uder estimates of production, the use of the model in solving operation design problems was found satisfactory on the practical basis.

要 旨

本稿는 待期理論을 代表的인 土砂運搬作業에 應用하는 方法論을 提示하고 있다. 現場에서 實測한 車輛到着時間과 積載裝備의 積載時間을 使用해서 適正한 裝備組合을 決定하는 數式模型을 分析하였다. 待期模型은 多少 作業生產量을 過少推定하는 傾向이 있지만 作業設計問題를 解決하는데 이 模型을 活用하는 것은 實際的인 基準에서 보아 滿足스럽다고 보아진다.

1. 緖 說

建設工事에는 일련의 連繫作業이 反復的으로 시행되는 때가 많다. 이러한 作業에서는 各作業의 作業時間과 作業能率의 平衡(line-of-balance)이 全體作業量은 물론 作業單價를 左右하게 된다. 이러한 平衡이 調和있게 유지되지 못하고 作業을 잘못 運營하던가 運延시키는 일이 있는 경우에는 作業工程에 파탄이 일어나게 된다. 作業設計에 있어서 作業의 平衡을 前提로 하는 것은 作業에 소요되는 모든 資源을 適正하게 配分함으로써 作業生產性을 極大化하는데 目的이 있다.

土砂運搬作業은 土取場에서 土砂를 積載裝備로 運搬車輛에 積載해서 捨土場 또는 盛土場所에 運搬하는 일련의 作業으로서 使用하는 裝備의 機種, 規格, 臺數 및 이들의 組合이 積載와 運搬으로 이어지는 反復作業의 生產性을 決定지우게 된다.

이러한 作業의 分析에는 待期理論이 基礎가 되어 왔으며[5,6] 確率論的分析이 實際가 符合되는 것으로 알려지고 있는 反面에 이러한 分析은 計算過程이 單純한 만치 過少推定하는 것으로 指摘되고 있다[1,2,3]. 確率論的待期模型은 Teicholz[6], O'Shea et al.[5], Griffis[4], Gaarslev[2]에

*正會員・中央大學校 工科大學 副敎授 土木工學科

의해 다루어져 왔으며 Halpin과 Woodhead[3]는 模擬技法을 提示하고 있다.

이 論文은 多數의 積載裝備를 갖는 土砂(또는 施工材料) 運搬作業에 대한 裝備의 適正臺數를 決定하는 待期模型의 應用方法을 提示하고 實測資料를 基礎로하여 應用上의 問題點을 分析한다.

2. 分析方法의 展開

(1) 槪 說

土砂運搬作業은 土取場에서 土砂를 積載裝備를 使用해서 運搬車輛에 (여기서는 덤프 트럭) 積載하는 것이 體系의 中心이 된다. 單一積載裝備의 體系에서는 1臺의 運搬車輛에 대한 平均積載時間(Ts)과 土取場에 到着하는 運搬車輛이 平均到着時間(Ta)에 따라 體系의 利用係數(Ts/Ta)가 左右된다. 즉 $Ta>Ts$인 경우 $Ts/Ta<1.0$이므로 積載裝備는 充分히 稼動되지 않는 반면에 $Ta<Ts$인 경우에는 積載裝備의 能力은 到着하는 運搬車輛에 대하여 即時積載가 不可能하게 되므로 運搬車輛은 待期行列을 이루어 積載를 기다려야 한다. 이러한 待期行列의 樣狀은 到着時間과 積載時間이 確定的인 값을 갖거나 確率的인 分布를 갖던 관계없이 無限히 긴 行列을 이루게 된다.

待期行列體系에서는 積載를 위해 到着하는 運搬車輛의 到着이 入力이 되고 積載를 마친 運搬車輛의 出發이 出力이 되며 待期行列을 구성하는 車輛은 體系內에 있게 된다. 그러므로 待期行列體系를 分析하는 데는 다음 事項이 前提되어야 한다.

① 運搬車輛의 到着時間分布
② 積載裝備의 臺數 또는 制約
③ 到着하는 車輛에 대한 積載要領 즉 先着順積載原則
④ 積載方法 및 積載時間

建設工事에서 典型的으로 待期模型을 適用할 수 있는 土砂運搬作業에서는 1臺 또는 그 以上의 積載裝備가 循環走行하는 N臺의 運搬車輛에 土砂를 積載하는 反復作業이므로 有限待期模型이 된다.

지금 運搬車輛의 臺數가 無限이고 積載裝備가 1臺인 경우 到着時間과 積載時間을 期待値가 各各 $1/\lambda$ 및 $1/\mu$인 指數分布로 假定하면 定常狀態에서 體系內에 i臺의 車輛이 待期하는 狀態確率은 다음과 같이 Markov의 離散方程式으로 나타낼 수 있다[7].

$$(\lambda+\mu)P_i=\lambda P_{i-1}+\mu P_{i+1} \tag{1}$$

여기서 P_i=狀態確率

λ=到着率($=1/Ta$)

μ=積載率($=1/Ts$)

λ는 單位時間에 1臺의 車輛이 到着해서 S_i로부터 S_{i+1}로의 移行確率이 되며 μ는 1臺가 積載해서 出發함으로써 S_i로부터 S_{i-1}로의 移行確率이다. 그러므로 式(1)은 定常狀態에서 S_i로부터 S_{i-1} 또는 S_{i+1}로 移行하는 確率의 흐름은 S_{i-1} 또는 S_{i+1}로부터 S_i로 移行하는 흐름과 같다는 뜻이 된다. 初期條件에서는 S_0로부터 S_1 또는 S_1으로부터 S_0로 移行하는 경우이므로

$$\lambda P_0=\mu P_1 \tag{2}$$

된다.

따라서 式(1) 및 (2)로부터 體系內에 i臺의 車輛이 待期하고 있을 狀態確率은 初期狀態確率 P_0를 써서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_i=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0 \tag{3}$$

(2) 單一積載裝備의 待期模型

運搬車輛이 N臺이고 積載裝備가 1臺인 경우 體系內에 待期中인 車輛을 除外한 $N-i$臺가 走行中이므로 Markov의 離散方程式은 다음과 같이 變形할 수 있다.

$$[(N-i)\lambda+\mu]P_i$$
$$=(N-i+1)P_{i-1}+\mu P_{i+1} \tag{4}$$

初期 및 末期條件은 각각 다음과 같다.

$$N\lambda P_0=\mu P_1 \tag{5}$$

$$\mu P_N=\lambda P_{N-1} \tag{6}$$

여기서 N=運搬車輛의 臺數

式(5) 및 (6)의 條件을 써서 式(4)를 順次的으로 풀면 狀態確率은 P_0에 의해 나타낼 수 있다.

$$P_i=\frac{N!}{(N-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0 \tag{7}$$

여기서

$$\sum_{i=0}^{N} P_i=0 \qquad (8)$$

이므로

$$P_0=\left[\sum_{i=0}^{N} \frac{N!}{(N-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\right]^{-1} \qquad (9)$$

된다.

土砂運搬作業은 待期行列의 길이가 運搬車輛의 臺數에 限定되는 有限待期模型으로 보았을때 體系의 中心인 土取場에는 적어도 1臺의 運搬車輛이 있을 경우에 作業時間에 걸친 運搬土砂量은 다음 式으로 구할 수 있다.

$$W=T(1-P_0)\mu C \qquad (10)$$

여기서 W=運搬土砂量

T=1日作業時間

C=運搬車輛의 1回積載量

式에서 $(1-P_0)\mu$는 單位時間積載車輛臺數로서 積載裝備의 作業能率이 된다. 즉

$$K=(1-P^0)\mu \qquad (11)$$

이다.

(3) 複數積載裝備의 待期模型

運搬車輛이 N臺이고 積載裝備가 M臺인 경우에는 각 積載裝備가 1臺의 車輛에 積載하는 單純體系로 보면 體系內에 있는 車輛의 臺數 $i<M$일때 i臺의 積載裝備가 積載하게 되고 $i \geq M$일때 M臺 모두가 積載하게 된다. 그러므로 앞에서와 같은 要領으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$i<M$일때

$$[(N-i)\lambda+j\mu]\ P_i=(N-i+1)\ \lambda P_{i-1} + (j+1)\mu P_{i+1} \qquad (12)$$

$i \geq M$일때

$$[(N-i)\lambda+M\mu]\ P_i=(N-i+1)\lambda P_{i-1} + M\mu P_{i+1} \qquad (13)$$

$$N\lambda P_0=\mu P_1 \qquad (14)$$

$$M\mu P_N=\lambda P_{N-1} \qquad (15)$$

여기서 j는 積載裝備의 稼動臺數로서 $i<M$일때 $j=i$이다.

위의 式들을 順次로 풀면 다음과 같다.

$0 \leq i \leq M$일때

$$P_i=\frac{N!}{i!(N-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0 \qquad (16)$$

$M<i \leq N$일때

$$P_i=\frac{N!}{M!(N-i)!}\ \frac{1}{M^{i-M}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0 \qquad (17)$$

따라서 式(8)의 條件으로부터

$$P_0=\left[\sum_{i=0}^{M} \frac{N!}{i!(N-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i+\sum_{=M+1}^{N} \frac{N!}{M!(N-i)!}\ \frac{1}{M^{i-M}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_i\right]^{-1} \qquad (18)$$

式(10)은 $M=1$이면 積載裝備가 1臺인 경우의 式(9)와 같게 된다. 그러므로 式(16)~(18)은 積載裝備가 1臺 또는 그 以上인 경우에 대한 一般式이 된다.

이 경우 積載裝備의 作業能率 K는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K=\left(\sum_{i=1}^{M} i\,P_i+M\sum_{i=M+1}^{N} P_i\right)\mu \qquad (19)$$

(4) 土砂運搬作業의 最適條件

運搬車輛과 積載裝備로 構成되는 土砂運搬作業의 最適條件은 現場의 事情에 따라 作業量을 最大로하는 경우와 運搬單價를 最低로 하는 경우라 볼 수 있으며 이 條件의 選擇에 따라 裝備의 構成은 달리 하게 된다[7].

土砂運搬單價는 다음 式으로 구할 수 있다.

$$u=\frac{(N\cdot C_N+M\cdot C_M)\cdot T}{W} \qquad (20)$$

여기서 u=土砂의 運搬單價

C_N=運搬車輛의 時間使用料

C_M=積載裝備의 時間使用料

3. 資料分析

(1) 資　料

앞에서 展開된 待期模型을 分析하는데 使用된 資料는 實測한 것으로 道路鋪裝工事의 路面補助基層材料의 運搬作業에 관한 것이다.

積載裝備 : 堀鑿機(0.7 m³) 1臺

運搬裝備 : 덤프트럭(15톤 10 m³) 12臺

運搬距離 : 15 km(2車線, 非鋪裝)

觀測期間 : 1983.5.16~22(7日間)

이 資料를 써서 時間分析을 하여 車輛의 到着時間과 積載時間의 分布를 決定하였고 本 硏究의 分析에는 5月 17日의 記錄과 分析結果를 使用하였다.

作業時間 : 669.6 分
車輛臺數 : 12 臺
日作業量 : 840 m^3
裝備時間使用料 :
덤프트럭 : 12,000 원
掘 鑿 機 : 15,000 원

(2) 到着時間分布

待期模型에서는 到着時間分布를 期待値가 $1/\lambda$인 指數分布로 나타내어 Markovian process를 單純化시키고 있다. 이 경우 t時間의 到着分布는 λt를 期待値로하는 Poisson 分布가 된다.

土砂運搬作業에서는 運搬裝備가 積載後 土取場으로부터 出發하여 捨土後 다시 土取場으로 歸還하는 循環走行이므로 1臺의 運搬車輛을 고려한다면 到着時間은 1回往復走行時間이 된다. 走行時間에는 土取場에서 出發前準備, 捨土地點까지의 走行, 捨土, 土取場까지의 回走가 포함되므로 走行距離에 따라 달라지지만 一定한 最短走行時間이 있게 되는 것이 事實이며 走行時間의 變動은 相當히 클 수 있다. 그러므로 運搬車輛의 走行時間分布는 一般的으로 指數分布와는 달리 하고 있으며 代表的인 것으로 指數分布, 對數正規分布, 감마分布 등이 代表的으로 사용되고[1,3,5] 있으나 本 硏究에서 使用한 實測資料에서는 截頭指數分布가 위에서 든 다른 分布에 비하여 妥當한 것으로 提示되었다.

즉 $$f_1(t)=a_1e^{-a_1(t-c_1)},\quad t\geq c_1 \tag{21}$$

여기서 $f_1(t)$=到着時間의 確率密度函數

a_1=平均到着率(=0.043)

c_1=始點時間(=59.463)

따라서 到着時間의 期待値는 다음과 같이 주어진다.

$$Ta=c_1+\frac{1}{a_1} \tag{22}$$

그러므로 Ta=82.505 分이 된다.

式(21)로 나타낸 截頭指數分布는 c_1을 初期値로 하고 있으므로 實測資料에서 常數 a_1과 c_1을 決定하는데는 c_1보다 작은 값의 一部는 除外해야 하는 번거러움이 있으므로 注意를 要한다[1].

(3) 積載時間分布

積載時間도 模型의 展開에서 期待値가 $1/\mu$인 指數分布로 나타내고 있으나 實測資料의 分析에서 到着時間分布와 같이 截頭指數分布로 주어졌다.

즉 $$f_2(t)=a=e^{-a_2(t-c_2)},\quad t\geq c_2 \tag{23}$$

여기서 $f_2(t)$=積載時間의 確率密度函數

a_2=平均積載率(=0.530)

c_2=始點時間(=3.812)

따라서 積載時間의 期待値는 다음과 같이 주어진다.

$$Ts=c_2+\frac{1}{a_2} \tag{24}$$

그러므로 Ts=5.699 분이 된다.

積載時間을 測定하는데는 2개의 다른 狀況이 있다. 하나는 體系內에 待期하는 車輛이 없는 경우로서 積載時間은 車輛의 到着時刻부터 積載後 出發時刻까지이며 다른 하나는 待期車輛이 있는 경우로서 앞 車輛의 積載後 出發時刻부터 該當車輛이 積載後 出發時刻까지가 된다.

(4) 作業量 : 單一積載裝備의 경우

體系利用係數 :

$$e=\frac{Ts}{Ta}=\frac{5.699}{82.505}=0.069$$

理論車輛臺數 :

$$N=a_2/a_1=0.530/0.043\fallingdotseq 12\text{臺}$$

式(9)에 의해서 計算하면

$$P_0=0.292$$

資料에서 T=669.6 분

C=10 m^3

$\mu=1/Ts=1/5.699=0.1754$

이므로 式(10)에 의해서 作業量은

$$W=T(1-P_0)\mu C=831.5\ m^3$$

된다. 이것은 實際運搬量 830m^3에 비하여 1% 낮은 매우 近似한 값이다.

裝備使用料를 써서 式(20)에 의해서 運搬單價를 計算하면

$$u=2,134\ W/m^3$$

된다. 運搬車輛의 臺數를 變動시켜서 같은 計算을 하고 그 結果를 비교하면 表 1과 같다.

表에서 보는 바와 같이 單價는 車輛臺數가 10 臺일때 가장 낮은 값을 나타내고 있으며 12臺의 경우와 비교하면 3.1% 낮고 作業量은 車輛臺數가 增加할수록 크게 나타나고 있어서 12.4

表 1. 車輛의 臺數에 따른 比較

項　　目	車輛의 臺數 (N)				
	8	9	10	11	12
K (臺/分)	0.0877	0.0982	0.1087	0.1175	0.1245
W(m³/日)	587.2 (70.6)	657.7 (79.1)	728.2 (87.6)	786.9 (94.6)	831.5 (100)
u (W/m³)	2,109.6 (98.9)	2,087.1 (97.8)	2,068.9 (96.9)	2,684.8 (97.7)	2,134.0 (100)
Lq_5(臺)	0.83	1.01	1.22	1.46	1.74

% 낮은 값이다. 單價의 變動은 12臺의 경우가 10臺의 경우에 비하여 車輛의 待期行列의 길이(L_q)가 긴데 연유한다고 볼 수 있다. 즉 1.74/12=0.145와 1.22/10=0.122의 비교로 볼 수 있다.

(5) 作業量 : 複數積載裝備의 경우

積載裝備가 1臺以上인 單純待期模型에 대해서는 M=2, 3, 4에 대하여 車輛의 理論臺數를 到着率과 積載率이 對等한 狀態로 보아서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$N=\frac{M\cdot a_2}{a_1} \tag{25}$$

따라서

$M=2$일 때　　$N=\dfrac{(2)(0.530)}{(0.043)}\fallingdotseq 25$臺

$M=3$일 때　　$N\fallingdotseq$　37臺

$M=4$일 때　　$N\fallingdotseq$　49臺

각각의 경우에 車輛臺數를 理論臺數의 근방에서 變動시키면서 式(18), (19) 및 (20)에 의해서 計算한 結果를 最低單價에 대하여 정리하면 表2와 같다.

表에서 알 수 있는 바와 같이 積載裝備의 臺數가 增加할수록 作業量은 많아지고 반면에 單價는 낮아지고 있다. 그러므로 土砂所要量이 큰 경우에는 積載裝備의 臺數를 增加시키고 運搬車輛의 臺數를 適正하게 決定하는 것이 重要하다. 運搬車輛의 最適臺數는 M가 클수록 理論臺數에 接近하고 있음을 알 수 있다.

表 2. 積載裝備의 臺數에 따른 最低單價比較

項　　目	M=1	M=2	M=3	M=4
	N=10	N=22	N=34	N=47
K (臺/分)	0.11	0.24	0.38	0.52
W (m³/日)	728.2	1,607.5	2,512.9	3,490.1
u (W/m³)	2,068.9	2,041.1	2,011.8	1,995.3
Lq (臺)	1.22	0.82	0.89	1.02

4. 討議 및 結論

實測資料를 使用한 分析에서 待期模型이 土砂運搬作業의 作業量 또는 單價豫測에 잘 適用될 수 있음을 보았다. 一般的으로 待期模型은 作業量을 多小過小推定하는 반면 模擬技法은 過大推定하는 傾向이 있다[1].

土砂運搬作業에 待期模型을 適用하는 데는 模型의 展開에 設定한

① 定常狀態의 假定

② 到着時間과 積載時間에 대한 指數分布假定

이 問題가 된다. 作業開始로부터 定常狀態에 到達하기까지는 相當한 時間이 걸린다는 점에서 보면 이 假定은 多少 無理가 있다. 또한 到着時間과 積載時間의 分布는 對數正規分布로 알려져 있으나[2,4,5,6] 本硏究에서는 截頭指數分布로 適用하였다. 어느 것이나 當初의 指數分布假定과는 距離가 있으나 分析結果에서는 큰 差異가 없는 것으로 나타나고 있다.

待期模型을 待期行列이 일어나는 建設工事의 많은 作業에 適用하는 데는 多少의 變形을 거쳐서 模型의 展開가 可能하며 作業量과 單價의 豫測精度는 實用的인 水準이라고 할 수 있다. 그러므로 待期模型은 土砂運搬作業과 유사한 材料取扱作業에 대하여 裝備의 組合을 適正水準으로 決定하는데 活用性이 있는 것으로 보아진다.

謝　辭

本 硏究를 위해 支援해주신 中央文化院에 感謝드리며 助力을 해온 大學院生 여러분에도 感謝의 뜻을 전한다. 그러나 本 硏究의 展開와 結論은 著者自身에 의한 것임을 밝혀 둔다.

參 考 文 獻

1. 金明煥, "土砂運搬作業의 確率待期模型에 관한 硏究", 中央大學校土木工學科 碩士學位論文. 1983年 6月.

2. Gaarslev, Axel. "Stochastic Models to Estimate the Production of Material Handling System in Construction Industry", *Technical Report No. 3, Department of Civil Engineering*, Stanford University, Aug. 1969.

3. Halpin, D.W. and R.W. Woodhead, "*Design of Construction and Process Operations*", Johon Wiley & Sons, Inc., 1976.

4. Griffis, F.H. "Optimizing Haul Fleet Size Using Queueing Theory", *Journal of Construction Division, Proceedings ASCE., Vol. 5753, No. Co 1*, Jan. 1968, pp.75~88.

5. O'Shea, J.B., G.N. Sulutkin and L.R. Shaffer, "An Application of the Theory of Queues to the Forecasting of Shovel-Tauck Fleet Productions", *Civil Engineering Studies, Construction Research Series No. 3*, Department of Civil Engineering, University of Illinois, June 1964.

6. Teicholz, P. "An Analysis of Two-Link Material Handling Systems with One Carrier in One of the Links," *Technical Report No. 29, Department of Civil Engineering*, Stanford University, Aug. 1963.

7. Rau, J.G. "*Optimization and Probability in Systems Engineering,*" Van Nostrand Reinhold Co., New York, N.Y., 1970

(接受 : 1984. 8. 20)