

## Spectrum 解析을 통한 遲滯時間의 算出에 關한 研究

崔 漢 圭\* · 黃 任 九\*\*

### A study on the Computation of Lag Time from the Spectrum Analysis

Choi Han Kuy\* · Hwang Im Koo\*\*

#### Abstract

The cross correlation function are applied to find the Lag time between the rainfall and runoff at Chuncheon Dam which is located the upstream of the North Han River.

In the result, we think that spectrum analysis is better than synthetic unit hydrograph of Snyder at the river basin with the actual data.

#### 第一章 序 論

自然 水文現象에는 많은 變數(Parameter)가 관련되어 있으며 이들 變數 相互作用으로 이루어지는 水文現象을 정확하게 解析한다는 것은 매우 어려운 일이다.

이와같이 복잡한 水文現象 가운데 降雨과 流出의 問題는 특히 중요시되고 있으며 이는 對象流域에 對한 水文學的 解析이나 設計에 매우 중요한 정보를 제공하는 수단으로써 많은 연구가 거듭되어온 바 있다. 특히 降雨-流出解析 中의 일부인 降雨가 流集하여 下流의 量水地點에 도달할 때까지 걸리는 時間, 즉 遲滯時間(Lag time)의 決定方法에 대하여는 國內·外를 통하여 많은 연구가 이루어 졌다.

A. J. ASKEW는 降雨로부터 流出까지의 遲滯時間을 流出量의 指數函數로 나타내었고 이를 利用하여 尹龍男, 鮮于仲皓<sup>10)</sup>는 國內의 錦江流

域에 對하여 검토한 결과  $t_e = 4.6q^{-0.315}$ 의 式을 제시하였으며, Snyder<sup>9)</sup>는 美國 Appalachian High Land 流域을 對象으로 한 연구에서 1932年 Sherman이 제안한 單位圖의 결정요소인 尖頭크기와 發生時間, 基底時間을 流域의 特性因子와 相關시켜 合成單位圖를 구하였다. 즉, 有效降雨量의 重心에서 單位圖의 尖頭까지 걸리는 遲滯時間을 流路延長 L 및 流域出口에서 流域의 重心에 가장 가까운 點까지의 流路延長  $L_c$ 와 相關시키고 流域의 特性을 나타내는 流域形狀係數  $C_c$ 를 도입하여  $t_e = C_c(L \cdot L_c)^{0.3}$ 의 式을 구하였으며 이를 利用하여 尹龍男, 鮮于仲皓<sup>10)</sup>는 國內의 漢江流域에 대하여 검토한 결과  $t_e = 1.444(L \cdot L_c)^{0.304}$ 의 式을, 錦江流域의 경우  $t_e = 0.1141(L \cdot L_c)^{0.5155}$ 의 式을 제시하였다. 또한 Hino<sup>4)</sup>는 情報理論을 利用하여 日 降雨로부터 流出까지의 遲滯時間을 統計學的 解析方法인 相互相關函數 및 Spectrum, Coherence에 對하여 연구한 바 있다.

\* 江原大學校 工科大学 土木工學科 副教授

\*\* 瑞逸專門大學 土木科 專任講師

\* Associate Professor, Dept. of Civil Eng., Kangweon Natl. University.

\*\* Full time instructor

前記한 國內·外의 研究結果에 反하여 本 論 文에서는 小流域을 選定하여 多數의 豪雨期間의 降雨量과 流出量의 實測值를 利用하여 時系列 理論의 解析 수단인 Spectrum 分析을 통하여 구하여진 遲滯時間과 流域形狀을 變數로 하여 구한 遲滯時間과의 비교 검토 및 모든 流域에 확대 적용할 수 있는가의 實用성 여부를 판단하는데 主目的이 있다고 할 수 있다.

## 第二章 Spectrum 解析

### 2. 1 定常 無作為過程

Spectrum 은 時系列 解析에 利用되는 推計學的 해석도구로서 時間과 더불어 變하는 水文現象의 變化를 統計的 特性을 利用하여 定性的으로 해결하려는 無作為 資料(random data)의 解析法이다.

따라서 時間의 變化에 대한 變數는 確率法則이 時間의 變化에 대하여 變하지 않을 때 이를 定常(Stationary)이라 하며 그렇지 않을 경우를 evlutive 라 한다. 대부분의 時系列은 完全한 定常의 경우가 많지 않기 때문에 아래의 두 moment 에 근거를 두고 弱定常(weak stationary) 또는 廣義의 定常으로 취급하여 해석한다.

$$\mu(t) = E[X(t)] \quad (2. 1)$$

$$\gamma(t, \tau) = E\{[X(t) - \mu(t)] [X(t-\tau) - \mu(t)]\} \quad (2. 2)$$

여기서  $E[\ ]$ 는 수학적 기대값,  $\mu(t)$ 는 自己共分散函數(auto-covariance function)이다. 弱定常 時系列의 경우  $\mu(t)$ 와  $\gamma(t, \tau)$ 는 時間의 變化에 대하여 統計的 特性이 變하지 않음으로  $\mu(t) = \mu$ 로 常數가 되며  $\gamma(t, \tau) = \gamma(\tau)$ 로 時間 遲滯  $\tau$ 만의 函數가 되어야 한다. 또한 ensemble 平均과 時間平均이 同一한 ergodic 性을 전제로 취급하여야 하며 대체로 定常水文現象으로 나타나는 無作為 資料는 ergodic인 경우가 많다.<sup>1)</sup>

### 2. 2 自己相關函數와 power Spetral 密度 函數

自己相關函數(auto-correlation fuction)는 水文現象의 장래값에 대하여 어떤 時間에서의 값

이 미치는 영향을 推定할 수 있는 函數로서 아래 식으로 정의 된다.

$$R_{xx}(\tau) = E[X(t) \cdot X(t+\tau)] \quad (2. 3)$$

ergodic 性을 고려하여 치환하면

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) \cdot X(t+\tau) dt \quad (2. 4)$$

여기서  $R_{xx}(\tau)$ 는  $\tau=0$ 에서 최대인 우함수로서 Power Spectrum 과 自己相關函數의 項으로 표시되는 自己相關係數를 구할 수 있다. 즉,

$$C_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{R_{xx}(0)} \quad (2. 5)$$

실제로 계산에 利用된 自己相關函數는 실측자료가 有限한 離散型임으로 아래 식으로 계산한다.<sup>6)</sup>

$$R_{xx} = \frac{1}{(n-k)} \sum_{i=1}^{n-k} X_{(i)} \cdot X_{(i+k)} \\ = \frac{1}{(n-k)^2} \sum_{i=1}^{n-k} X_{(i)} \cdot \sum_{i=1}^{n-k} X_{(i+k)} \quad (2. 6)$$

또한 power Spectral 密度函數는 不規則 現象에 대한 各 周波數 成分의 寄與分을 나타내거나 分散이 周波數에 대하여 어떻게 分布되어 있는가를 나타내며 이는 Cramér, Kolmogoroff, Wiener 등<sup>3)</sup>이 제시한 自己相關函數로부터 치환된 周波數 項의 식으로 구할 수 있다. 즉, 定常過程  $X(t)$ 는

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itw} dz(w) \quad (2. 7)$$

로 나타낼 수 있으며 自己相關函數는

$$R_{xx} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itw} dF(w) \quad (2. 8)$$

로 표시할 수 있다. 식(2. 8)에서  $F(w)$ 는  $F(-\pi) = 0$ ,  $F(\pi) = \sigma^2$ 을 만족하는 階段函數(step function)로 미분가능하다면

$$\frac{dF(w)}{dw} = P(w) \quad (2. 9)$$

가 되며, 그러므로 식(2. 8)은

$$R_{xx} = \int_{-\pi}^{\pi} P(w) \cdot e^{itw} dw \quad (2. 10)$$

가 된다. 식(2. 10)의  $P(w)$ 를 Power Spectral 密度函數, 또는 分散 Spectrum 이라하며 自己相關函數인 식(2. 10)의 Fourier 變換으로 나타낼 수 있다.

$$P(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2. 11)$$

離散型 資料에 대한 Power Spectrum 은

$$P(w) = R(0) + 2 \sum_{k=1}^m R(k) \cos k\omega \quad (2. 12)$$

를 利用할 수 있으며 Blackman-Tukey 가 시도한 加重函數(Weighting function)를 적용하여 平滑하게 하여야 한다.

이 加重函數는

$$D_k = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi k}{m} \right), \quad |k| < m \\ = 0 \quad |k| > m \quad (2. 13)$$

이다. 식(2. 13)을 적용한 식(2. 12)는

$$V_k = \frac{1}{2\pi} [R(0) + 2 \sum_{j=1}^m D_j R(j) \cos j\omega] \quad (2. 14)$$

$$V_k = \frac{1}{m} [R(0) + 2 \sum_{j=1}^m R(j) \cos \frac{\pi k j}{m} + R(m) \cos \pi k] \quad (2. 15)$$

이 된다. 여기서  $m$  은 最大遲滯이며 식(2. 15)는 有限한 資料로부터 야기되는 Spectrum의 屈折이 발생하여 이를 제거하기 위한 Hanning의 Lag window 를 적용하면 다음과 같다. <sup>1,3,5,8)</sup>

$$P_0(\omega) = 0.54(V_0 + V_1) \\ P_k(\omega) = 0.25V_{k-1} + 0.54V_k \\ + 0.25V_{k+1} \quad (1 \leq k \leq m-1) \\ P_m(\omega) = 0.54(V_{m-1} + V_m) \quad (2. 16)$$

여기서  $P_0, P_k, P_m$ 은 各各 遲滯時間이  $0, R, m$ 에서의 Power Spectrum이다.

### 2. 3 相互相關函數와 Cross Spectral 密度函數

두 無作爲 過程의 相互相關函數는 두 時系列의 相關關係를 나타내는 函數로서 두 定常時系列을 各各  $X(t), Y(t)$ 라 하면 아래식으로 정의할 수 있다.

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) \cdot Y(t+\tau) dt \quad (2. 17)$$

$R_{xy}(\tau)$ 는  $\tau=0$ 에서 최대가 되지는 않으며 그 성질은 다음과 같다.

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau) \\ |R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0) \cdot R_{yy}(0)$$

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2} [R_{xx}(0) \cdot R_{yy}(0)] \quad (2. 18)$$

만일  $R_{xy}(\tau)=0$ 이면  $X(t)$ 와  $Y(t)$  사이에는 相關이 없다고하며,  $X(t)$ 와  $Y(t)$ 가 통계적으로 독립이면 모든 時間變位에 대하여  $R_{xy}(\tau)=0$ 이 되고  $X(t)$  또는  $Y(t)$ 가 0의 平均값을 가지는 것으로 가정된다. 또,  $X(t)$ 와  $Y(t)$ 의 平均이 모두 0이 아닐경우  $R_{xy}(\tau)$ 는 모든 時間變位에 대하여  $\mu_x, \mu_y$ 의 값을 갖는다. 또한 相互相關係數는 自己相關係數와 마찬가지로 相互相關函數의 項으로 표시된다.

$$C_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_{xx}(0) \cdot R_{yy}(0)}} \quad (2. 19)$$

Cross Spectrum 은 自己相關函數의 Fourier 變換이 Power Spectrum 임과 마찬가지로 두 時系列에 대한 相互相關函數의 Fourier 變換으로 정의된다.

$$S_{xy}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2. 20)$$

Wiener-Khintchine의 공식에 의해 식(2. 20)의 Fourier 逆變換으로부터 相互相關函數는

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(w) \cdot e^{i\omega\tau} dw \quad (2. 21)$$

가 된다. 이러한 Cross Spectrum  $S_{xy}(w), S_{yx}(w)$  및 그 공액 Spectrum  $S_{xy}^*(w)$ 의 관계는 다음과 같다.

$$S_{xy}(-w) = R_{yx}(w) \\ S_{xy}(-w) = S_{yx}^*(w) \\ S_{xy}^*(w) = S_{yx}(w) \quad (2. 22)$$

### 2. 4 Coherence 函數

Coherence 函數는 두 時系列의 周波數 영역에서의 相關을 測定하기 위한 수단으로

$$\gamma_{xy}(w) = \frac{|S_{xy}(w)|^2}{P_{xx}(w) \cdot P_{yy}(w)} \quad (2. 23)$$

으로 정의되며  $0 \leq \gamma_{xy}(w) \leq 1$  사이의 값을 갖는다. 만일 어떤 周波數  $f_1$ 에서  $\gamma_{xy}(f_1)=0$ 이면 두 時系列  $X(t)$ 와  $Y(t)$ 는 그 周波數에서 incoherent 라 하며 서로 相關이 없음을 나타내며,  $X(t)$ 와  $Y(t)$ 가 統計적으로 독립이면  $\gamma_{xy}(w)=0$ 이 된다. 그러나  $\gamma_{xy}(f_1)=1$ 이라고 하면  $X(t)$ 와  $Y(t)$ 는 그 周波數에서 完全히 相關임을 의미한다.

### 第三章 對象流域 및 資料의 構成

本 研究에 利用된 流域은 Snyder 의 合成單位圖法에 의하여 流域特性을 고려한 式이 이미 제안된 漢江水系를 對象으로 降雨 및 流出量 資料를 비교적 쉽게 구할 수 있는 北漢江 上流의 春川 Dam과 華川 Dam 下流地點을 流出口로 하여 選定하였다. 流出量 資料는 上流의 華川 Dam과 함께 降雨에 의한 流出에 관계없이

Dam 자체의 水門開閉에 따른 放流量 및 發電 水量을 고려하여야 하나 建設部 漢江 洪水統制 所의 漢江 洪水豫警報 流出 및 常數分析 報告 書의 자료를 利用하였고 降雨 資料 역시 그림 3. 1(a)~(d)와 같이 이들 利用하였으며 이에 대한 호우기간은 1973. 8. 28~9. 2, 1975. 7. 24~7. 29, 1976. 8. 12~8. 16, 1978. 8. 15~ 8. 21이다. 아울러 春川 地點을 流出口로 한 流域圖는 그림 3. 2와 같다.

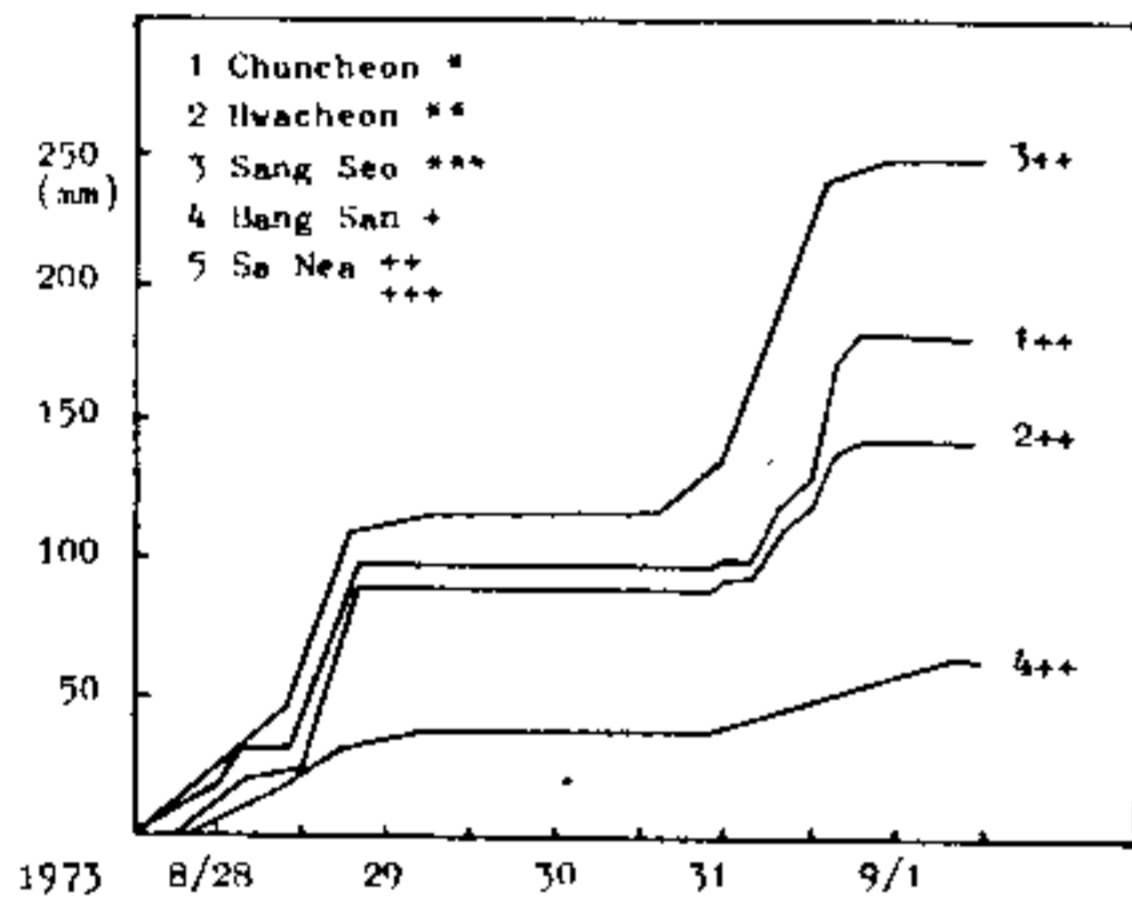


Fig. 3. 1(a)

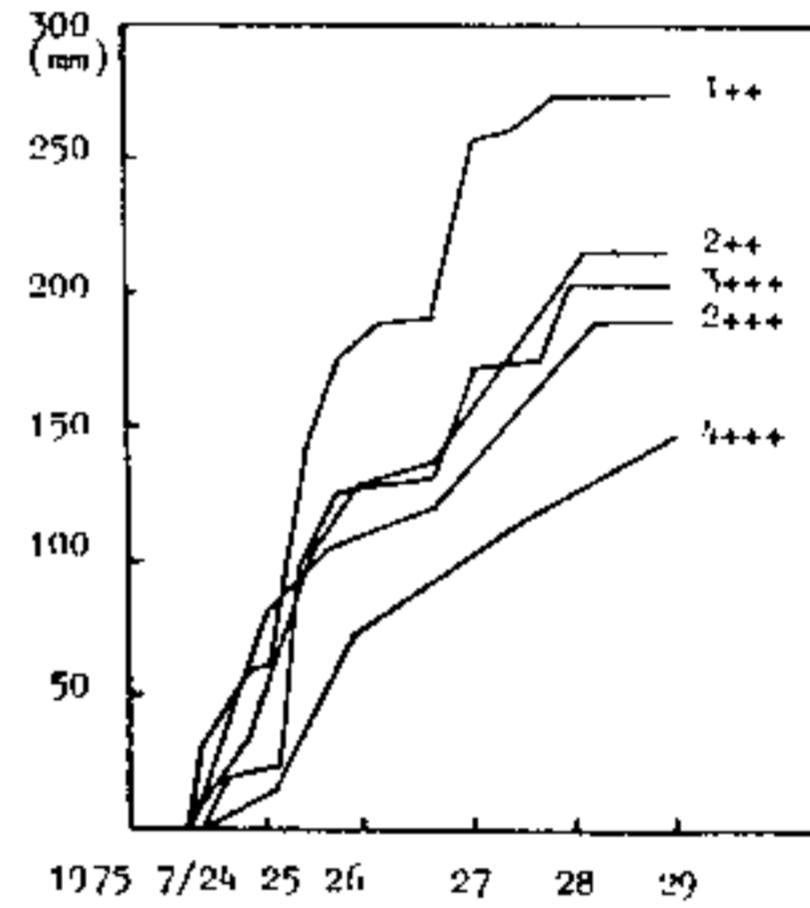


Fig. 3. 1(b)

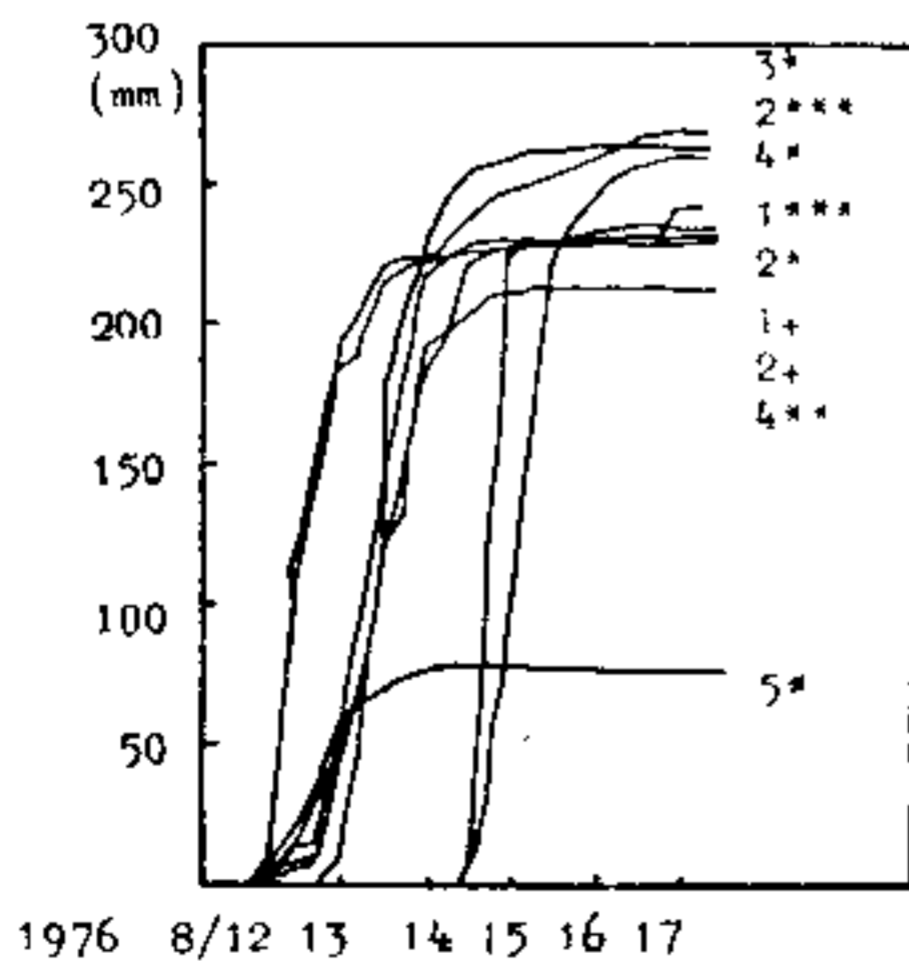


Fig. 3. 1(c)

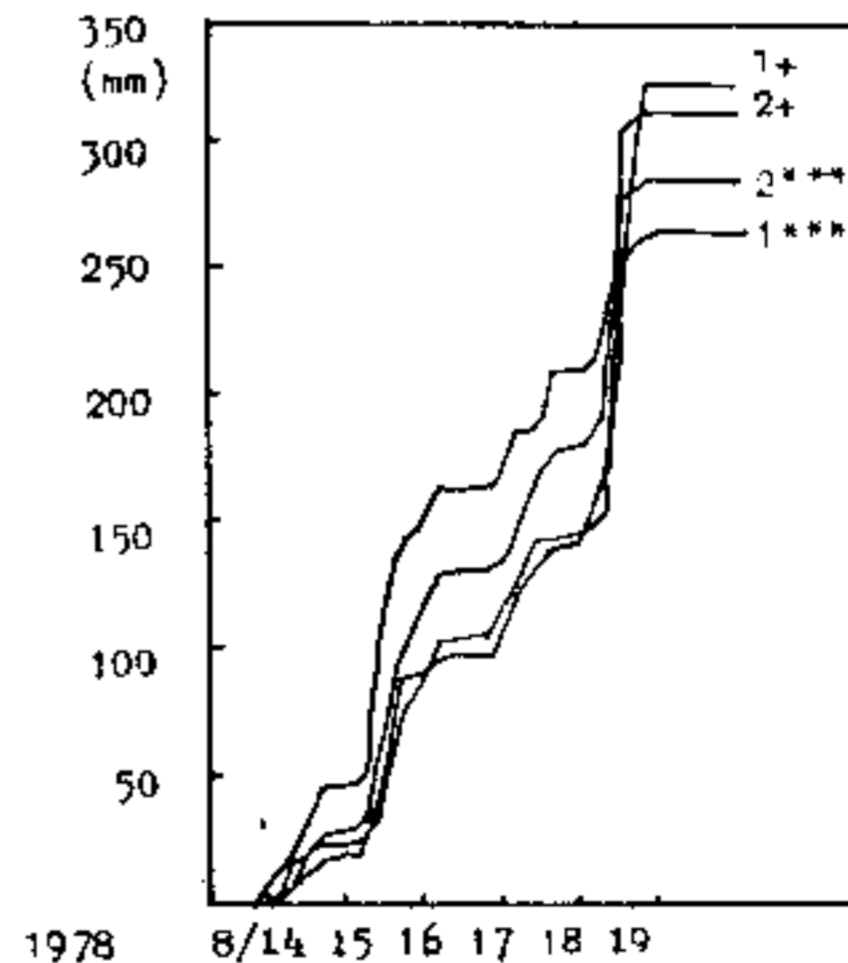


Fig. 3. 1(d)

Accumulated precipitation curve of Chuncheon-Dam basin

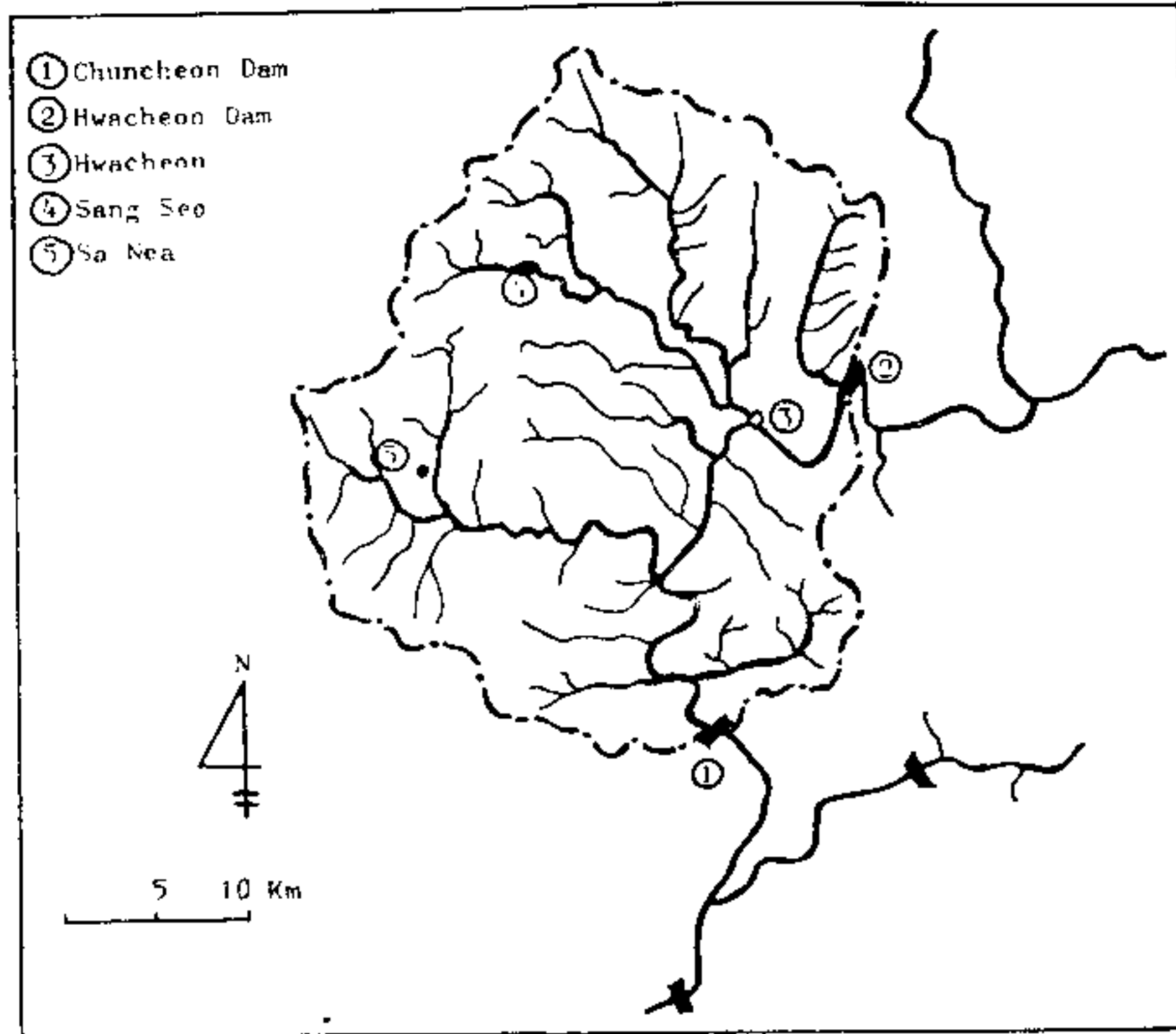


Fig. 3. 2. Chuncheon Dam Basin

#### 第四章 結果 및 分析

##### 4. 1 Synder의 合成單位圖法 및 三角單位圖法에 의한 遲滯時間

解析에 사용된 降雨量과 流出量의 資料는 아 대식으로 표준화 하였다.<sup>2)</sup>

$$X^*(\omega) = \frac{X(\omega) - \bar{X}}{S(\omega)} \quad (4. 1)$$

여기서  $\bar{X}$ 는  $X(\omega)$ 의 平均值,  $S(\omega)$ 는 표준 편 차이다. 春川 Dam 流域은 그림 3.2와 같이 華 川 Dam 과의 사이를 대상으로 하여 流域面積 774.8km<sup>2</sup>, 流路延長(L)은 52.35km이며 流域出 口에서 流域의 重心에 가장 가까운 點까지의 流 路延長(Lc)은 30.5km이다. 이를 漢江水系에 대하여 이미 제안된  $t_1 = 1.444(L \cdot L_c)^{0.304}$ 의 식 으로 계산하면 13.2시간임을 알 수 있다. 또한

三角形 單位圖法에 의하면 8.12시간으로 合成 單位圖法보다 상당히 적게 나타나 대조를 이루 고 있다.

##### 4. 2 相互相關函數에 의한 分析

降雨量을 原因으로 하였을때 결과로 생각되 어지는 流出量間의 相關關係 즉 遲滯時間을 구 하기 위한 各 호우기간별 相互相關函數의 계산 결과는 그림 4. 1, 4. 2와 같다. 그림 4. 1로 부터 相互相關係數의 尖頭(Peak)가 平均 遲滯 8.3時間에서 0.48의 값을 가짐을 알 수 있다. 이것은 降雨에 의한 流出과의 관계에 비교적 강한 相關性이 있음을 시사하며 流域內에 發生 한 降雨가 약 8時間 이후에 尖頭流量으로 出口 를 통하여 流出됨을 의미하며 三角形 單位圖方 法の 결과와 거의 일치함을 알 수 있다.

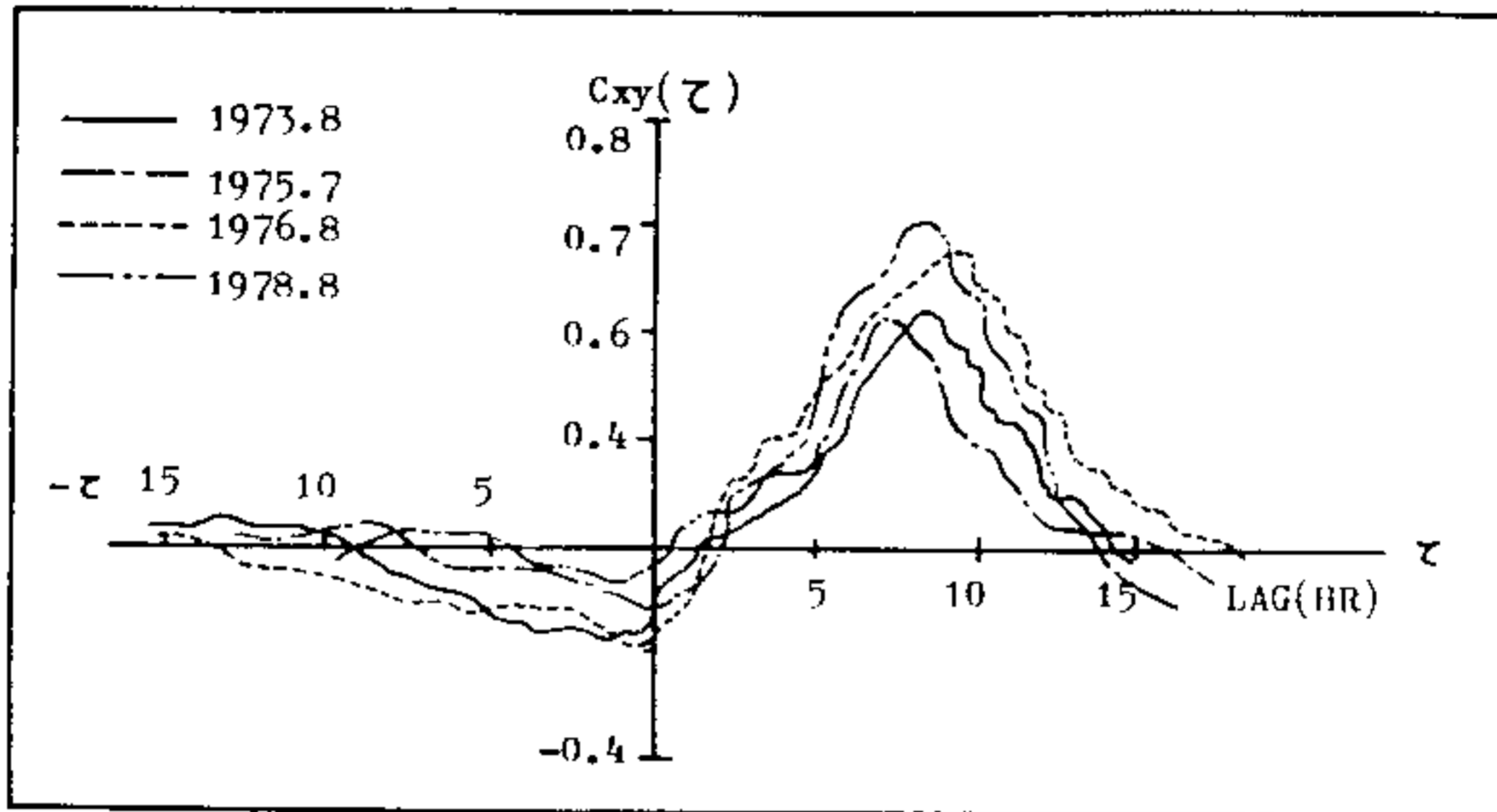


Fig.4. 1 Cross correlogram of precipitation-flow at Chuncheon-Dam basin

### 第五章 結 論

春川 Dam 流域을 對象으로 降雨에 의한 流出量 사이의 相關關係 즉 遲滯時間을 구하기 위하여 時系列 理論의 해석 수단인 相互相關函數를 利用하여 얻은 結果를 Snyder의 合成單位圖法 및 三角形 單位圖法에 의한 結果와 비교 검토하면 다음과 같다.

1. Cross Correlogram으로부터 春川 Dam 流域의 遲滯時間은 8.3時間으로 三角形 單位圖方法의 結果와 거의 일치하나 Snyder의 合成單位圖方法에 의한 13.2時間보다 상당히 작음을 알 수 있다. 이는 對象流域이 上流에 위치함으로 인한 河川경사에 기인한 것으로 판단되어 實測資料가 있는 流域에서는 Spectrum 解析方法이 合理的인 것으로 생각된다.

2. Snyder의 合成單位圖 方法은 河川의 全流域을 대상으로 제안된 식임으로 本 Spectrum 解析方法을 全流域에 적용시켜 비교하면 보다 만족할 수 있는 結果를 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

### 參考 및 引用文獻

1. Bendat, J. S., Piersol, A. G.; Random Data

Analysis and Measurement Procedures, John Wiley & Sons, Inc., PP. 1~36, 1971.

2. Fiering, M. B. and Jackson, B. B.; Synthetic Stream Flows, American Geophysical Union, Water Resources Monograph1, 1, 1971.

3. Granger, C. W. J.; Spectral Analysis of Economic Time Series, Princeton Univ. Press, PP 3~51, 59~69, 1964.

4. Hino, M.; Introduction to the Informational Theories on Hydrology, Part I, Improvement of the Predictability of Flood, Technical Report No.4; Part II -Correlation, Spectra and Coherence of Rainfall-Runoff Process, Technical Report No.6, Dept. of Civil Engineering, Tokyo Institute of Technology, 1968.

5. Kisiel, C. C.; Time Series Analysis of Hydrologic Data, Advances in Hydrosience(Ed. Chow, V. T. ) Vol. 5, 1969.

6. Quimpo, R. G.; Stochastic Model of Daily River Flow Sequences, Colorado State Univ. Hydrology Papers No 18, 1967.

7. Redriguez-Iturbe, I.; The Application of Cross-spectral Anaysis to Hydrologic Time Series, Colorado State Univ. Hydrology Paper No 24, 1967.

8. Wastler, T. A. & Walter, C. M.; Statistical

- Approach to Estuarine Behavior , J. of Sanitary Eng. Div. ASCE, SA6, PP. 1175~1194, DEC, 1968.
9. Snyder, F. F.; Synthetic Unit Graphs, Transaction, AGU, Vol. 19, PP. 447~454, 1938.
10. 尹龍男, 鮮子仲皓; 流域特性和流出特性間の相關關係 解析에 依한 單位流量圖의 合成, 韓國水文學會誌 8-1, 1975. 6.