韓國數學教育學會誌＜數學教育＞
1984. 12, Vol. XXIII, No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1984, Vol. XXIII, No. 1

이원배치에서 정렬순위검정과 Mack-Skillings 검정의 효율 비교

이 창 신

1. 서 론

F-검정은 모집단에 정규분포를 가정하므로 두터운 꼬리를 갖는 경우 효율이 현저히 떨어지나 분포무관검정통계량의 분포는 모집단과 무관하여 제 1 종오류를 정확히 제어할 수 있다.

순위검정법의 효율은 모집단이 정규분포를 따를 때도 크게 떨어지지않으며, 두터운 꼬리를 가질 때는 훨씬 높다. 이에 대한 연구는 1930년대부터 시작되었고, 1945년 Wilkoxon에 의해 본격화되었다.

이원배치에 대한 순위검정법으로는 반복이 없는 경우의 Friedman [1]의 것과 일반화된 Benard와 Van-Eltern [4]의 것이 있고, 이를 Hodges와 Lehman [2]이 수정하고 Mehra와 Sarang [3]이 연구한 정렬순위검정법과 분포무관인 Mack-Skillings 검정법[6]이 있다.

이 논문에서는 각 처리마다 구획내의 관측치수가 같을때 소표본에 대해 Monte Carlo 연구로 실험검정력을 구해 F-검정과 정렬순위검정 및 Mack-Skillings 검정의 효율을 비교하였다.

정규분포의 경우는 F-검정의 효율이 가장 높고 순위검정의 효율이 조금 낮으며, 그외 분포에서는 Mack-Skillings 검정의 효율이 가장 높고 F-검정의 효율이 월등히 떨어지므로 비모수적 검정법이 훨씬 robust함을 알 수 있다.

2. 각 검정법에 대한 고찰

처리와 구획사이의 상호작용이 없고 실험반복이 있는 이원배치의 모형은 다음과 같다.

$$X_{ijk}=\mu+\alpha_i+\theta_j+E_{ijk}$$
$$(i=1,\cdots,I,\ j=1,\ \cdots,J,\ k=1,\cdots,n_{ij})$$

여기서 μ=실험 전체의 모평균

α_i=요인 A(처리)의 i번째 수준 효과

θ_j=요인 B(구획)의 j번째 수준 효과

E_{ijk}=각 관측치 X_{ijk}의 오차

$n_{ij}=(i,j)$ cell의 관측치수

를 의미하고, $\sum_{i=1}^{I}\alpha_i=\sum_{j=1}^{J}\theta_j=0$이고, E_{ijk}들은 서로 독립이고 같은 연속분포함수를 갖는다.

구획요인의 효과를 검정하기 위한 귀무가설은 $H_0:\theta_j=0$이 된다.

2.1. F-검정법

F-검정은 오차항 E_{ijk}에 정규분포를 가정한다. 각 처리마다 구획내의 관측치수가 같을때, 즉 $n_{1j}=\cdots=n_{Ij}=n_j$일때 F-통계량은 다음과 같다[7].

$$F=\frac{(J-1)^{-1}(\sum_j X_{\cdot j\cdot}^2/n_{\cdot j}-X_{\cdots}^2/N)}{(N-I-J+1)^{-1}(\sum\sum\sum X_{ijk}^2-\sum_j X_{i\cdot\cdot}^2/n_{i\cdot}-\sum_j X_{\cdot j\cdot}^2/n_{\cdot j}+X_{\cdots}^2/N)}$$

여기서 $X_{i\cdot\cdot}=\sum_j\sum_k X_{ijk}$ $\quad n_{i\cdot}=\sum_j n_{ij}$

$X_{\cdot j\cdot}=\sum_i\sum_k X_{ijk}$ $\quad n_{\cdot j}=\sum_i n_{ij}=I\cdot n_j$

$X_{\cdots}=\sum_i\sum_j\sum_k X_{ijk}$ $\quad N=\sum_i\sum_j n_{ij}$

이며, H_0하에서 자유도$(J-1,\ N-I-J+1)$인 F-분포를 따른다.

2.2. 정렬순위검정법

정렬된 관측치란 각 관측치에서 그가 속해 있는 구획내에서의 평균을 뺀 것이다. 이런 정렬된 관측치 N개전체를 작은 것부터 순위를 정한다.

$r_{ijk}=X_{ijk}$의 정렬된 순위

$R_{ij}^*=\sum_k r_{ijk},\qquad R_{\cdot j}^*=\sum_i R_{ij}^*$

$$\bar{r}_i=\sum_j\sum_k r_{ijk}/n_{i\cdot}$$

$$\tau_i^2=\sum_j\sum_k (r_{ijk}-\bar{r}_i)^2/n_{i\cdot}$$

라 하면 정렬순위통계량 W는 $n_{1j}=\cdots=n_{Ij}=n_j$일 때

$$W=\frac{N-1}{N\sum_{i=1}^{I}\tau_i^2}\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{n_j}\left\{R_{\cdot j}^*-\frac{n_jI(N+1)}{2}\right\}^2$$

으로 조건부 분포무관이며 H_0하에서 구획수 증가에 따라 자유도 J-1인 χ^2-분포에 가까와 진다 [4].

F-검정 및 Benard-Van Eltern 검정에 대한 극한 효율은 반복이 없을 때 $\lim_{J\to\infty} e_{W,B-VE}=1$, $\lim_{J\to\infty} e_{W,F}=\frac{3}{\pi}$이 된다[4].

2.3. Mack-Skillings 검정법

Mack-Skillings검정법은 각 구획내에서의 관측치의 순위합을 이용한다. $n_{ij}=n_{i\cdot}n_{\cdot j}/N$ 일때 통계량 T는

$$T=\frac{12}{N(N+1)}\sum_{j=1}^{J}n_{\cdot j}\left(R_j'-\frac{N+I}{2}\right)^2$$

이며, 여기서 $R_{ij}=(i,j)$ cell의 순위합, $R_j'=\sum_i R_{ij}/n_{ij}$를 뜻하고 H_0하에서 N이 커짐에 따라 자유도 $J-1$인 χ^2-분포에 가까와 진다[6].

F-검정과 Benard-Van Eltern 검정에 대한 극한효율은 $e_{T,F}\geq 0.864$, $e_{T,B-VE}\geq 1$이므로 Mack-Skillings 검정의 효율은 대체로 높다[6].

3. 검정의 효율 비교

3.1. 소표본에 대한 Monte Carlo 연구

구획수가 4, 처리수가 3이고 cell당 관측치수가 구획에 따라 4, 5, 6인 경우 200회 Simulation 하여 구한 실험검정력으로 F-검정과 정렬순위검정 및 Mack-Skillings 검정의 효율을 비교하였다.

오차분포로는 $N(0,1)$, 이중지수, Cauchy, $N(0,1)$과 $N(0,9)$의 Contaminated 정규분포를, 구획효과 θ값으로는 ① $\theta_1=\theta_2=\theta_3=0$ ② $\theta_1=-0.5$, $\theta_2=0$, $\theta_3=0.5$를 취하였다. 단, Cauchy 경우 θ값 대신 $\int_{-\infty}^{d}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=P(z<\theta_i)$를 만족하는 d값을 사용하며, z는 표준정규확률변수이다

처리효과 α값은 ① $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$ ② $\alpha_1=-0.3$, $\alpha_2=-0.1$, $\alpha_3=0.1$, $\alpha_4=0.3$을, 유의수준으로는 0.05와 0.1을 취했다.

3.2. Monte Carlo 연구 결과

각 검정에 대한 결과는 표 1~표3과 같다.

〈표 1〉 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=0$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$, 유의수준 0.05(0.1)일때의 실험유의수준

검정법 \ 분포	정 규	이중지수	Cauchy	Cont-정 규
F-검정	0.07	0.06	0.01	0.07
	(0.105)	(0.095)	(0.04)	(0.13)
정렬순위검정	0.06	0.04	0.04	0.07
	(0.09)	(0.1)	(0.11)	(0.16)
$M-S$ 검정	0.06	0.035	0.065	0.075
	(0.115)	(0.1)	(0.10)	(0.15)

표1은 제 1종오류를 범할 확률을 Simulation으로 구한 실험유의수준(empirical significance level)이다. Cauchy인 경우 F-검정만이 유의수준에 못미치고 그외는 유의수준과 거의 비슷하였다.

〈표 2〉 $\theta_1=-0.5$, $\theta_2=0$, $\theta_3=0.5$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$, 유의수준 0.05(0.1)일때의 실험검정력

검정법 \ 분포	정 규	이중지수	Cauchy	Cont-정 규
F-검정	0.755	0.775	0.055	0.66
	(0.855)	(0.86)	(0.105)	(0.73)
정렬순위 검정	0.73	0.87	0.32	0.73
	(0.82)	(0.925)	(0.435)	(0.83)
$M-S$ 검정	0.695	0.875	0.47	0.745
	(0.805)	(0.935)	(0.61)	(0.845)

표2는 구획효과가 분포들의 중심위치에서 0.5배 표준오차씩 차이있을 때 실험검정력(empirical power)이다. 정규의 경우는 F-검정이, 이중지수와 Contaminated 정규에서는 순위검정이 우수하고, Cauchy에서는 순위검정이 월등히 우수하며, 정렬순위검정보다는 Mack-Skillings 검정이 더 우수하였다.

표3은 처리효과의 차이가 있을때 구획효과에

대한 실험검정력이다. 정규의 경우는 대체로 비슷하며 그외는 순검정이 F-검정보다 우수하고 Cauchy에서는 Mack-Skillings 검정이 더욱 우수하였다.

이상의 결과를 요약하면 정규분포의 경우는 F-검정이 순위검정보다 약간 우수하나 정규분포보다 두터운 꼬리를 갖는다면 순위검정이 더 우수하고, Cauchy 같이 매우 두터운 꼬리를 갖는다면 순위검정이 월등히 우수하였다. 또한 정렬순위검정보다 Mack-Skillings 검정이 전반적으로 더 우수하였다.

〈표 3〉 $\theta_1=-0.5$, $\theta_2=0$, $\theta_3=0.5$, $\alpha_1=-0.3$, $\alpha_2=-0.1$, $\alpha_3=0.1$, $\alpha_4=0.3$, 유의수준 0.05(0.1) **일때의 실험검정력**

검정법 \ 분포	정규	이중지수	Cauchy	Cont-정규
F-검정	0.8	0.755	0.06	0.625
	(0.875)	(0.81)	(0.105)	(0.69)
정렬순위검정	0.77	0.84	0.265	0.7
	(0.845)	(0.9)	(0.39)	(0.8)
M-S 검정	0.735	0.82	0.425	0.67
	(0.81)	(0.875)	(0.56)	(0.755)

參考文獻

1. Milton Friedman, The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance, *JASA.*, 32(1937), 675-701.
2. J.L. Hodges and E.L. Lehmann, Rank methods for combination of independent experiments in analysis of variance, *AMS.*, 33(1962), 482-497.
3. K.L. Mehra and J. Sarangi, Asymptotic efficiency of certain rank tests for comparative experiments, *AMS.*, 38(1967), 90-107.
4. M.N. Brunden and N.R. Mohberg, The Benard-Van Eltern statistic and nonparametric computation, ***Communication in statistics***, B5(1967), 155-162.
5. E.L. Lehmann, ***Statistical Methods Based on Ranks***, HOLDEN-DAY, INC., 1975.
6. Gregory A. Mack and John H. Skillings, A Friedman-Type Rank Test for Main Effects in a Two-Factor ANOVA, *JASA.*, 75(1980), 947-951.
7. William C. Rinaman, On Distribution Free Rank Tests for Two Way Layouts, *JASA.*, 78(1983), 655-659.