韓國經營科學會誌
第9卷 第2號
1984年 10月

—研究論文—

最適제어理論과 관련된「리카티」微分方程式의 數値解

Numerical Solution of Riccati Differential Equation in Optimal Control Theory

慶 奎 鶴*

Abstract

In this paper some procedures are given whereby an analytic solution may be found for the Riccati differential equation and algebraic Riccati equation in optimal control theory. Some iterative techniques for solving these equations are presented. Rate of convergence and initialization of the iterative processes are discussed.

1. 서 론

「리카티」미분방정식은 최적제어이론의 분야에서「피이드백」제어, 확률적 시스템의 제어, 시간지체 시스템의 제어 등에서 최적조건을 만족하는 중요한 식이다. 「리카티」미분방정식은 연속형 모형과 관련되는데 이러한 연속형 문제는 약간 변형시켜 불연속형으로 만들어서 문제를 풀 수도 있으나, 연속형 모형을 불연속형 모형으로 만들 때에는 문제의 성격이 약간 달라지는 경우도 있으며 또한 최적조건을 유도하기가 용이하지 않은 경우도 있다. 따라서 연속형과 관련된「리카티」미분방정식을 풀어야 할 경우가 많다.

「리카티」미분방정식의 해는 이와 관련된 상미분방정식의 해로부터 유도할 수 있는데 주어진 문제의 상태변수가 여러개가 되면 계산량이 많게 되어 콤퓨터로 수치해를 구할수 밖에 없다. 이때에 고유치와 고유벡터를 계산해야 되는데, 고유치가 복소수인 경우가 생긴다. 이와 관련된 고유벡터를 구하는데 있어서, 여러 차례에 걸린 행렬의 연산으로 인한 오차의 발생은 불가피하다. 따라서 「리카티」미분방정식을 푸는 데는 많은 문제점들이 있다

이에 본 논문에서는「리카티」미분방정식의 해를 구하는 방법과 이와 관련된 계산상의 제 문제점들을 검토하여 보고자 한다.

2. 「리카티」미분방정식의 해

「피이드백」제어 등의 최적조건의 중요한 부분을 이루는「리카티」미분방정식의 일반적 형태는 다음과 같다.

$$\frac{dP(t)}{dt}=-P(t)A(t)-A'(t)P(t)+P(t)D(t)R^{-1}(t)D'(t)P(t)-Q(t),$$
$$P(t_1)=S \qquad [1]$$

여기에서 $P(t)$와 S는 대칭인 $n\times n$행렬이고, A와 Q는 $n\times n$행렬, D는 $n\times r$행렬, R은 $r\times r$행렬이다. 이때에 구하고자 하는 $P(t)$는 원래 주어진 문제와 관련시켜서 풀 수 있다. 즉 다음의 문제가 주어졌을 때

$$\min C=\int_{t0}^{t1}[x'(t)Q(t)x(t)+u'(t)R(t)u(t)]dt+x'(t)Sx(t) \qquad [2]$$

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+D(t)u(t) \qquad [3]$$

여기에서 $x(t)$는 n벡터이며, $u(t)$는 r벡터일 때 이 문제의「캐논」방정식(Cannonical equation)과 관련시켜서 $P(t)$를 다음과 같이 기술할 수있다.[1)]

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}X(t)\\ \Lambda(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A, & -DR^{-1}D'\\ -Q, & -A'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(t)\\ \Lambda(t)\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}X(t_1)\\ \Lambda(t_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I\\ S\end{bmatrix} \qquad [4]$$

$$P(t)=\Lambda(t)X^{-1}(t) \qquad [5]$$

이때에 $X(t)$, $\Lambda(t)$는 각각 $n\times n$행렬이며 I는 단위행렬이다. 그리하여 $P(t)$는 다음의 상미분방정식으로 부터 구할 수 있다.

$$\frac{d\Pi(t,\tau)}{dt}=\begin{bmatrix}A, & -DR^{-1}D'\\ -Q, & -A'\end{bmatrix}\cdot\Pi(t,\tau),\quad \Pi(\tau,\tau)=I \qquad [6]$$

* 연세대학교 상경대학 경영학과

1) R.E. Kalman and T.S. Englar; A User's Manual for Automatic Synthesis Program C, RIAS Report NASA, 1965, pp. 192~199.

$$\Pi(t,\tau)=\begin{bmatrix}\Pi_{11}(t,\tau), & \Pi_{12}(t,\tau)\\ \Pi_{21}(t,\tau), & \Pi_{22}(t,\tau)\end{bmatrix} \quad [7]$$

$$P(t)=[\Pi_{21}(t,t_1)+\Pi_{22}(t,t_1)\cdot S]\cdot [\Pi_{11}(t,t_1)+\Pi_{12}(t,t_1)\cdot S]^{-1} \quad [8]$$

이때에 $\Pi(t,\tau)$는 $2n\times 2n$행렬이다. 만약 A, D, Q, R이 상수행렬이라면 위의 상미분방정식의 해 $\Pi(t,t_1)$은 다음으로 부터 구하여 진다.

$$Z=\begin{bmatrix} A, & -DR^{-1}D' \\ -Q, & -A' \end{bmatrix} \quad [9]$$

$$\Pi(t,t_1)=e^{z(t-t_1)}\cdot \Pi(t_1,t_1) \quad [10]$$

여기에서 $\Pi(t_1,t_1)$은 단위행렬로 주어지고, Z는 $2n\times 2n$ 행렬이다. 이때에 e^{zt}는 다음으로 부터 구할 수 있다.

$$ZT=TJ \quad [11]$$

$$e^{zt}=T\cdot e^{Jt}\cdot T^{-1} \quad [12]$$

여기에서 J, T는 각각 $2n\times 2n$행렬로서, J는 Z행렬의 고유치로 부터 구하여지는「조르단」형식이다. 만약 Z의 고유치가 상이한 실근이면 J는 주대각 행렬이 고유치인 행렬로 되며, T는 이들 고유치에 대응되는 고유벡터로 이루어지는 행렬로 된다.

위에서 J, T, e^{Jt}를 구하기 위하여 먼저 Z와 관련된 고유치와 고유벡터를 구하여야 되는데, 실수 고유치 및 이와 관련된 고유벡터를 구하는 방법은 많이 개발되었으며 각 방법별로 장단점이 있다. 그런데 P가 $n\times n$행렬이면 Z는 $2n\times 2n$행렬로 커지게 되어 Z의 고유치는 실수 뿐만 아니라 많은 경우 복소수 고유치도 갖게된다. 그리하여 Z가 복소수고유치를 갖게 될 때 이들 복소수 고유치와 관련된 고유벡터, 그리고 주어진「리카티」미분방정식의 해를 구하는 과정을 검토하여 보고자 한다.

우선 J는 다음의 과정에 의하여 구할 수 있다. Z가 복소수 고유치를 갖게 되면 이들 복소수 고유치를 구하기 위하여 $|Z-\lambda I|$를 다음과 같이 다항식으로 표현할 수 있다.

$$f(\lambda)=|Z-\lambda I|=\lambda^{2n}+\alpha_1\lambda^{2n-1}+\cdots+\alpha_{2n-1}\lambda+\alpha_{2n} \quad [13]$$

이때에 임의의 λ_i를 [13]식에 대입하여 $2n$개의 등식을 얻을 수 있고 이로부터 $\alpha_1\cdots\alpha_{2n}$을 구할 수 있다. 그리고 $f(\lambda)$의 모든 실수 고유치를 λ_1, $\lambda_2\cdots\lambda_s$라 할때, 이들로 이루어지는 실수 다항식을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_s) \quad [14]$$

$f(\lambda)$의 복소수 고유치로 이루어지는 다항식을 $h(\lambda)$라 할때 $f(\lambda)$는 아들 $g(\lambda)$와 $h(\lambda)$의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$f(\lambda)=g(\lambda)\cdot h(\lambda) \quad [15]$$

$h(\lambda)$는 λ의 $q(=2n-s)$차 다항식으로서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$h(\lambda)=\lambda^q+b_1\lambda^{q-1}+\cdots+b_{q-1}\lambda+b_q \quad [16]$$

만약 $g(\lambda_i)\neq 0$면 [15]식으로 부터 $h(\lambda_i)$를 구할 수 있다. 즉

$$h(\lambda_i)=f(\lambda_i)/g(\lambda_i),\ \ g(\lambda_i)\neq 0 \quad [17]$$

이때에 λ_i가 실수 고유치면 $g(\lambda_i)=0$가 되므로, 실수 고유치가 아닌 임의의 실수 λ_i를 [16], [17]식에 대입하여 $(q+1)$개의 등식을 얻을 수 있고 이들 등식을 풀어서 $b_1, b_2, \cdots b_q$를 구할 수 있다. 그리하여 다항식 $h(\lambda)$가 구하여지고, $h(\lambda)=0$를 풀어서 Z의 복소수 고유치를 구할 수 있다. 이때에 Z의 성분이 실수이므로, 즉 $f(\lambda)$가 실계수 다항식이므로 Z가 $\alpha+\beta_i(\beta\neq 0)$를 고유치로 가지면 공액복소수인 $\alpha-\beta_i$도 고유치이다. 이 두개의 복소수 고유치와 관련된「조르단」형식 J는 다음과 같이 표현된다.

$$J=\begin{bmatrix}\ddots & & & \\ & \alpha & \beta & \\ & -\beta & \alpha & \\ & & & \ddots\end{bmatrix} \quad [18]$$

이때의 e^{Jt}는 다음과 같이 된다.

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix}\ddots & & & \\ & e^{\alpha t}\cos(\beta t), & e^{\alpha t}\sin(\beta t) & \\ & -e^{\alpha}t\sin(\beta t), & e^{\alpha t}\cos(\beta t) & \\ & & & \ddots\end{bmatrix} \quad [19]$$

위와 같이 Z가 주어지고 또한 J가 결정되면 [11]식을 변형시켜서 T를 구할 수 있다. [11]식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$ZT-TJ=0 \quad [20]$$

이 식은 다시 다음과 같이「크로네커」곱(Kronecker product)으로 표현할 수 있다.

$$[Z\otimes I-I\otimes J']\cdot \nu_T=0 \quad [21]$$

여기에서 ν_T는 $2n\times 2n$행렬 T를 원소가 $4n^2$인 벡터로 만든 것이다. 즉 $T=[t_{ij}]$로 나타낼때 $\nu_T=[t_{11}, t_{12}, \cdots, t_{21}, t_{22}\cdots]'$이다. 만약 $[Z\otimes I-I\otimes J']=[\alpha]_{ZJ}$로 나타내면 [21]식은 다음과 같이 된다.

$$[\alpha]_{ZJ}\cdot \nu_T=0 \quad [22]$$

이 식은 동차 연립방정식으로서 이를 풀면 ν_T를 구할

수 있고 이를 행렬로 바꾸면 T가 된다. 이때에 $[\alpha]_{ZJ}$는 $4n^2 \times 4n^2$인 행렬이므로 n이 커지면 〔22〕식을 푸는데 콤퓨터시간이 많이 소요된다.[2]

이상은 해석적 · 대수적 방법으로 「리카티」 미분방정식의 해를 구하는 과정이다. 그러나 다음과 같이 「리카티」 미분방정식의 해를 축차적 계산과정에 의하여 구할 수도 있다. 즉 $n \times n$행렬 $P(t)$가 주어질때 $P(t-\varepsilon)$을 「테일러」급수에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다($\varepsilon > 0$).

$$P(t-\varepsilon) = P(t) - \varepsilon \cdot \dot{P}(t) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\ddot{P}(t) - \frac{\varepsilon^3}{3!}\dddot{P}(t) + \cdots \tag{23}$$

여기에서 $\dot{P}(t)$, $\ddot{P}(t)$, $\dddot{P}(t)$ 등은 「리카티」 미분방정식 〔1〕로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{P}(t) = P(t)DR^{-1}D'P(t) - A'P(t) - P(t)A - Q \tag{24}$$

$$\ddot{P}(t) = \dot{P}(t)DR^{-1}D'P(t) + P(t)DR^{-1}D'\dot{P}(t) - A'\dot{P}(t) - \dot{P}(t)A \tag{25}$$

$$\dddot{P}(t) = \ddot{P}(t)DR^{-1}D'P(t) + 2\dot{P}(t)DR^{-1}D'\dot{P}(t) + P(t)DR^{-1}D\ddot{P}(t) - A'\ddot{P}(t) - \ddot{P}(t)A \tag{26}$$

그리하여 $P(t_1) = S$로 주어지면 $t = t_1$부터 $t = t_1$까지 축차적으로 $P(t)$를 계산할 수 있다. 그런데 이 방법으로 「리카티」미분방정식의 해를 구할 경우 ε의 크기에 따라 오차가 다르게 발생되며 오차를 줄일려면 콤퓨터계산시간이 많이 필요하다.

그런데 「리카티」미분방정식을 직접 축차적으로 풀수도 있으나 위의 수식 〔6〕을 축차적으로 풀어서 $\Pi(t, t_1)$을 구한 다음에 〔8〕식으로 부터 「리카티」 미분방정식의 해를 구할수도 있다. $\Pi(t, t_1)$이 주어졌을때 $\Pi(t-\varepsilon, t_1)$은 다음과 같이 「테일러」급수로 표시할 수 있다.

$$\Pi(t-\varepsilon, t_1) = \Pi(t, t_1) - \varepsilon\dot{\Pi}(t, t_1) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\ddot{\Pi}(t, t_1) - \frac{\varepsilon^3}{3!}\dddot{\Pi}(t, t_1) + \tag{27}$$

여기에서 $\dot{\Pi}(t, t_1)$, $\ddot{\Pi}(t, t_1)$, $\dddot{\Pi}(t, t_1)$ 등은 〔6〕, 〔9〕로 부터 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\dot{\Pi}(t, t_1) = Z\Pi(t, t_1) \tag{28}$$

$$\ddot{\Pi}(t, t_1) = Z^2\Pi(t, t_1) \tag{29}$$

$$\dddot{\Pi}(t, t_1) = Z^3\Pi(t, t_1) \tag{30}$$

그리하여 $\Pi(t-\varepsilon, t_1)$은 다음과 같다.

$$\Pi(t-\varepsilon, t_1) = \left[I - \varepsilon Z + \frac{\varepsilon^2}{2!}\cdot Z^2 - \frac{\varepsilon^3}{3!}\cdot Z^3 + \cdots\right] \cdot \Pi(t, t_1) \tag{31}$$

이때에 $\Pi(t_1, t_1) = I$로 주어지므로 $t = t_1$부터 축차적으로 $t = 0$까지 $\Pi(t, t_1)$을 구할 수 있다. 이때에도 ε의 크기에 따라 오차가 발생하게 된다.

그리고 〔11〕식의 T를 위와같이 「코로네커」곱으로 표현하여 구할수도 있으나 다음의 수식으로 축차적으로 구할수도 있다.

$$T_{k+1} = \frac{1}{2}\left[T_k + Z \cdot T_k \cdot J^{-1}\right] \tag{32}$$

여기에서 T_k의 초기치 T_0가 실수고유치와 관련된 고유벡터를 포함하도록하면 축차적 계산과정에서 수렴속도가 빠르다. 이때에 기준치 δ가 주어질때 $\frac{\|T_{k+1} - T_k\|}{\|T_k\|} \leq \delta$가 되면 T_{k+1}을 T의 근사치로 한다. 이때의 축차적 계산과정에서도 오차가 많이 발생하게 된다.

3. 균형상태하의 「리카티」 미분방정식

「리카티」 미분방정식에서 만약 $\frac{dP(t)}{dt}$가 0이 되면 즉 $P(t)$가 시간의 함수가 아니면 이때의 「리카티」 미분방정식은 다음과 같이 「리카티」 행렬방정식이 된다.

$$PA + A'P - PDR^{-1}D'P + Q = 0 \tag{33}$$

이와 같이 P가 시간의 함수가 아닌 경우는 앞의 수식〔2〕에서 t_1이 ∞로 될 때에 나타난다.

만약 앞절에서의 계산과정에서 〔11〕식의 T가 구하여 졌으면, 「리카티」행렬방정식의 해는 다음의 수식에 의하여 구하여 질 수 있다.[3]

$$P = T_{21} \cdot T_{11}^{-1} \tag{34}$$

여기에서 T_{21}, T_{11}은 다음과 같이 정의된다.

$$T = \begin{bmatrix} T_{11}, & T_{12} \\ T_{21}, & T_{22} \end{bmatrix} \tag{35}$$

이때에 T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}는 $n \times n$행렬이다.

그리고 다음과 같이 축차적 계산과정에 의하여 해를

---

2) 이때에 $[\alpha]_{JZ}$는 다음과 같이 된다. $[\alpha]_{ZJ}$ 그리고 Z, J의 원소를 각각 α_{MN}, Z_{ij}, J_{kl}로 나타낼 때, z, J $2n \times 2n$ 행렬이므로 첨자들 사이의 관계는 $M = 2n(i-1)+j$, $N = 2n(k-1)+l$이다. 그리고 α_{MN}은 다음과 같이 결정된다. i) 만일 $k = i$인 경우, $l = j$면 $\alpha_{MN} = Z_{ik} - J_{kl}$이고 $l = j$면 $\alpha_{MN} = -J_{lj}$이다. ii) 만일 $k \neq i$인 경우 $l = j$면 $\alpha_{MN} = Z_{ik}$이고, $l \neq j$면 $\alpha_{MN} = 0$이다.

3) B.D.O. Anderon and J.B. Moore; *Linear Optimal Control*, N.J., Prenticettill, 1971, pp. 351～362.

구할수도 있다.[4)]

$$B_{k+1}=R^{-1}D'V_k \qquad [36]$$

$$A_{k+1}=A-DB_{k+1} \qquad [37]$$

$$C_{k+1}=Q+B'_{k+1}RB_{k+1} \qquad [38]$$

$$A'_{k+1}V_{k+1}+V_{k+1}A_{k+1}=-C_{k+1} \qquad [39]$$

여기에서 A_k, C_k V_k는 $n\times n$행렬이고, B_k는 $r\times n$행렬이다. 초기치 V_0가 주어지면 V_{k+1}을 축차적으로 계산할 수 있고 V_{k+1}이 수렴하게 되면 이때의 V_{k+1}이 「리카티」 행렬방정식 〔33〕의 해 P이다. 그런데 위의 축차적 계산과정의 각 단계에서 다음 등식을 풀어야 한다.

$$M'V+VM=-N \qquad [40]$$

이 수식은 다음과 같이 「크로네커」곱으로 표시할 수 있다.

$$[M'\otimes I+I\otimes M']\cdot q_V=r_N \qquad [41]$$

여기에서 q_V와 r_N은 각각 $n\times n$행렬인 V, N을 원소가 n^2인 벡터로 만든 것이다. 이때에 $[M'\otimes I+I\otimes M']=[\alpha]_M$로 정의할 때 〔41〕식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[\alpha]_M\cdot q_V=-r_N \qquad [42]$$

이때의 $[\alpha]_M$은 $n^2\times n^2$행렬이다. 〔42〕식은 일차연립방정식이므로 이를 풀면 q_V를 구할 수 있고 이를 행렬로 정리하면 〔40〕식의 V가 된다. 그런데 n이 커지면 등식을 푸는데 콤퓨터시간이 많이 소요되고 또한 배열의 차수도 매우 커지게 된다.

4. 적용례

다음의 「리카티」 미분방정식에서,

$$-\frac{dP(t)}{dt}=P'(t)A+A'P(t)-P(t)D\cdot R^{-1}DP(t)$$

$$+Q,\ P(t_1)=S$$

A, D, Q, R이 다음과 같이 주어질 때

$$A=\begin{bmatrix}-1.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1.3 & 0.3 & 0\\ 1.5 & 1.3 & -1.0 & 0.2\\ 0 & 0 & 0.7 & -0.8\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5.5\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

Z를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$Z=\begin{bmatrix}A & -DR^{-1}D'\\ -Q & -A'\end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{cccc|cccc}-1.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1.3 & 0.3 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0\\ 1.5 & 1.3 & -1.0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.7 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & -1.5 & 0\\ 0 & -1.5 & 0 & 0 & 0 & 1.3 & -1.3 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -0.3 & 1.0 & 0.7\\ 0 & 0 & 0 & -5.5 & 0 & 0 & -0.2 & 0.8\end{array}\right]$$

그러면 위의 「리카티」 미분방정식의 해는 다음의 상미분방정식의 해와 관련시켜서 풀 수 있다.

$$\frac{d\Pi(t,t_1)}{dt}=Z\Pi(t,t_1),\quad \Pi(t_1,t_1)=I$$

이 상미분방정식의 해는 다음과 같다.

$$\Pi(t,t_1)=e^{Z(t-t_1)}$$

여기에서 e^{Zt}는 다음으로부터 구할 수 있다.

$$ZT=TJ$$

$$e^{Zt}=Te^{Jt}T^{-1}$$

이때에 Z의 고유치를 계산하면 다음과 같다.

$\lambda_1=-1.550455$

$\lambda_2=-1.209168$

$\lambda_3=-1.711763-0.81739\ i$

$\lambda_4=-1.711763+0.81739\ i$

$\lambda_5=\ 1.550455$

$\lambda_6=\ 1.209168$

$\lambda_7=\ 1.711763+0.81739\ i$

$\lambda_8=\ 1.711763-0.81739\ i$

그리고 α, β, γ, δ를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$\alpha=1.711763$

$\beta=0.81739$

$\gamma=1.550455$

$\delta=1.209168$

그러면 J, e^{Jt} 그리고 T, T^{-1}는 다음과 같이 된다.

$$J=\begin{bmatrix}-\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\alpha & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & \alpha\end{bmatrix}$$

4) D.L. Kleinman; "On an Iterative Technique for Riccati Equation Computations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Febernary, 1968, pp. 114~115.

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix} e^{-\gamma t} & 0 & 0 & 0 & .0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\delta t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\alpha t}\cos(-\beta t), & e^{-\alpha t}\sin(-\beta t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-\alpha t}\sin(-\beta t), & e^{-\alpha t}\cos(-\beta t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\gamma t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\alpha t}\cos(\beta t), & e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{\alpha t}\sin(\beta t), & e^{\alpha t}\cos(\beta t) \end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix} .4780 & .0669 & -.5729 & -.0310 & -.0413 & -.1424 & .0904 & -.2458 \\ -.4884 & -.0971 & -.0429 & .0582 & -.1763 & -.1176 & .0667 & -.1164 \\ -.2255 & -.1951 & .4444 & -.4218 & -.1169 & -.1713 & .0062 & -.1969 \\ .2104 & .3337 & .0827 & .2800 & -.0348 & -.0597 & -.0187 & -.0500 \\ .0241 & -.0195 & -.0785 & -.2838 & .1260 & .3859 & -.5424 & .7306 \\ -.3800 & -.0994 & .0706 & -.2467 & .9349 & .4875 & -.6366 & .4958 \\ -.2696 & -.0797 & .4750 & -.6124 & .0233 & .1698 & .5156 & .2964 \\ .4693 & .9056 & .4784 & .4721 & .2489 & .7194 & .1474 & .1314 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} -.2927 & -2.1721 & -.0541 & -.5783 & -.0960 & -.4096 & -.2716 & -.0809 \\ 1.8258 & 2.3065 & .8033 & 3.4039 & .6739 & .5565 & .8107 & .2824 \\ -1.3360 & -1.2985 & .5315 & .1172 & -.3152 & -.1841 & -.1559 & -.0100 \\ -1.7138 & -.8933 & -1.4337 & -.5541 & -.6691 & -.2927 & -.6025 & -.1734 \\ .0560 & -.8828 & -.6264 & 1.0905 & -1.1105 & 1.1347 & .5240 & -.4888 \\ .0920 & .4702 & .3772 & -4.2847 & .3165 & -.4596 & -.9229 & 1.5789 \\ -.1703 & -.3506 & -1.3079 & -.2242 & -.8049 & -.1211 & 1.0719 & -.1603 \\ -.9358 & -.7099 & -1.5388 & 1.8156 & .5228 & -.1479 & .9725 & -.9269 \end{bmatrix}$$

그리하여 t_1이 주어지면 t에 따라 $\Pi(t, t_1)$이 결정되고 다음의 수식에서

$$P(t)=[\Pi_{21}(t, t_1)+\Pi_{22}(t, t_1)S][\Pi_{11}(t, t_1)+\Pi_{12}(t, t_1)S]^{-1},$$

S가 주어질 때 t의 값에 따라 $P(t)$는 결정된다.

앞의 수식[1]에서 만약 $\dot{P}(t)=0$이라면 즉 $P(t)$는 t의 함수가 아닌 상수행렬 P이다. 따라서 「리카티」 행렬방정식은 다음과 같이 된다.

$$PA+A'P-PDR^{-1}D'P+Q=0$$

이 식의 해는 앞절의 수식 [36]~[39]를 적용하여 5회의 축차계산을 하면 다음과 같이 된다.

$$P=\begin{bmatrix} .9937 & .6729 & 1.0650 & .5609 \\ .6729 & 1.1789 & 1.0434 & .5204 \\ 1.0650 & 1.0434 & 2.3182 & 1.2063 \\ .5609 & .5204 & 1.2064 & 3.4579 \end{bmatrix}$$

앞의 수식 [33]을 적용하여 P를 계산하여도 위와 마찬가지로 된다.

5. 결 론

본 논문에서는 「리카티」 미분방정식의 해와 관련된 제 문제점들을 검토하여 보았다.

「리카티」 미분방정식의 해는 이와 관련된 상미분방정식의 해로부터 유도됨을 보았다. 이 때에 상미분방정식을 푸는 과정에서 고유치를 구해야 되는데, 많은 경우 고유치가 복소수가 되므로 이들 복소수 고유치를 구하는 방법과 이와 관련된 고유벡터를 구하는 방법을 제시하였다. 그리고 「리카티」 미분방정식은 균형상태 하에서 「리카티」 행렬방정식이 되는 데 이 행렬방정식의 해를 축차적으로 구하는 방법을 검토하여 보았다. 또한 수치예를 들어 「리카티」 미분방정식의 해를 구하여 보았다.

위와 같이 「리카티」 미분방정식의 해를 구하는 방법을 검토하여 보았는데 계산과정에서의 정밀도를 높이는 방법을 찾는 것이 앞으로의 과제다.

참 고 문 헌

1. Anderson, B.D.O. and J.B. Moore; *Linear Optimal Control*, N.J., Prentice-Hall, Inc., 1971.
2. Burnovsky P. and J. Komormik; "The Riccati Equation Solution of the Linear-Quadratic Problem with Constained Terminal State," *IEEE Transactions on Automatic Conrol*, Vol. AC-26, No. 2, April, 1981, pp. 398~402.
3. ——; "The Matrix Riccati Equation and the Noncontrollable Linear-Quadratic Problem with Terminal Constraints," *SIAM J. Control & Opt.* Vol. 21, No. 2, March 1983, pp. 280~288.
4. Chen, C.F. and L.S. Shieh; "A Note on Expanding $PA+A^TP=-Q$," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-13, Febrary 1968, pp. 122~123.
5. Friedland, B.; "On Solutions of Riccati Equation in Optimization Problems," *IEEE Transactions*

Automatic Control. Vol. AC-12, 1967, pp. 303~304.

6. Kalman, R.E., and T.S. Englar; *A User's Manual for Automatic Synthesis Program C*, RIAS Rep. NASA, 1965, Baltimore, Md.
7. Kleinman, D.L.; "On an Iterative Technique for Riccati Equation Computation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, February, 1968, pp. 114~115.
8. O'Donnell, J. J.; "Asymptotic Solution of the Matrix Riccati Equation of Optimal Control," Proc. Fourth Ann. Allerton Conf. Circuit System Theory, October 1966, Urbana, Ill., pp. 577~586.
9. Reid, W.T.; *Riccati Differential Equations*, New York and London, Academic Press, 1972.