韓國經營科學會誌
第9卷 第2號
1984年 10月

—研究論文—

最底入札價와 參加費가 있는 競爭入札模型
Competitive Bidding Model with Reserve Price

김 여 근*
박 순 달**

Abstract

The competitive bidding model with the reserve price has been studied by Riley and Samuelson. We extend their studies to the competitive model with the reserve price and the entry fee. First we present the bidder's optimal strategy, the winner's expected profit, the auctioner's expected revenue in the first-price sealed bidding model, and next those in the second-price sealed bidding model.

1. 서 론

최고 입찰자가 낙찰자가 되는 경쟁입찰에서는 입찰자는 자기의 낙찰가를 최소화할려고 하고 경매자는 낙찰가를 높일려고 한다. 입찰자와 경매자의 전략에 대해서는 Friedman[2]의 결정이론적방법, Vickey[13]의 게임이론적방법을 위시하여 Milgrom과 Weber[7], Rothkopt[11], Myerson[8], Riley와 Samuelson[10] 등의 많은 연구가 이루어 졌다(참조 [1], [12]). Riley와 Samuelson[10]은 Vickrey[13]의 연구를 이어받아 특히 최저입찰가가 주어졌을 경우의 입찰전략에 대해 연구하였는데 이 연구는 나아가 최저입찰가와 참가비가 있을 때의

(1) 경매자와 입찰자의 전략

(2) 낙찰자의 기대이익과 경매자의 기대수입

(3) 제 2 입찰가모형에서의 전략

에 대해 연구하고자 한다. 제 2 입찰가모형이라는 것은 최고입찰가를 제시한 입찰자가 낙찰자가 된데 낙찰가는 제 2의 최고입찰가로 하는 모형이다. 보편적인 경우, 즉 최고입찰가를 낙찰가로 하는 경우는 제 1 입찰가모형이라고 부르기로 한다.

이 연구는 이들 두 입찰모형을 분석함에 있어 다음과 같은 가정을 전제한다.

(1) 경매자는 하나의 입찰품목으로 n명의 입찰자를 상대한다.

(2) 입찰자 i는 평가액 v_i, $i=1, \cdots, n$을 가지고 있고 이들 평가액들은 서로 독립하면서 같은 분포함수 $F(v)$를 가진다. 이 분포함수 $F(v)$는 평가액$[\underline{v}, \bar{v}]$ 영역에서 $F(\underline{v})=0$, $F(\bar{v})=1$인 증가함수이며 미분가능한 함수라고 둔다.

(3) 입찰자의 입찰가는 평가액이 클수록 큰 것으로 한다.

(4) 최저입찰가 m과 참가비 c가 있다.

2. 제 1 입찰가모형

입찰자 i의 평가액이 v_i일 때 입찰가 b_i는 평가액 v_i의 함수로 표현될 수 있다. 이 함수를 $b_i=b(v_i)$로 표현하기로 한다. 이 함수는 연속함수이며 미분가능하다고 보며 이 역함수가 존재하여 이를 $\phi(b_i)$로 둔다. 그러면 $\phi(b_i)=v_i$이다. 입찰자 i가 낙찰되면 이익은 평가액에서 입찰가와 참가비를 뺀 것으로 v_i-b_i-c이고 낙찰되지 않으면 참가비 c만큼 손해를 본다. 입찰자 i가 낙찰될려면 다른 $(n-1)$명의 입찰자의 평가액이 v_i보다 작아야 하고 이때의 확률은 $\{F(v_i)\}^{n-1}$이다. 따라서 낙찰되지 않은 확률은 $1-\{F(v_i)\}^{n-1}$이다. 그러므로 입찰자 i가 b_i로 입찰했을 때의 기대이익은

$$\begin{aligned}&(v_i-b_i-c)F^{n-1}(v_i)-c(v_i)-c[1-F^{n-1}(v_i)]\\&=(v_i-b_i)F^{n-1}(v_i)-c \qquad \cdots(1)\end{aligned}$$

이다. 식 (1)을 입찰가 b_i의 함수로 표현하면,

$$(v_i-b_i)F^{n-1}[\phi(b_i)]-c \qquad \cdots(2)$$

*전남대학교 공과대학
**서울대학교 공과대학

이다. 기대이익을 최대로 하는 b_i를 구하기 위하여 식 (2)를 b_i에 대하여 미분하여 零으로 놓으면

$$-F^{n-1}[\phi(b_i)]+(v_i-b_i)(n-1)F^{n-2}[\phi(b_i)]F'[\phi(b_i)]\phi'(b_i)=0 \qquad \cdots(3)$$

이다. 그런데 $\phi(b_i)=v_i$이므로 $\phi'(b_i)=1/b'(v_i)$가 성립한다. 식(3)을 평가액 v_i의 함수로 변환하면 다음 식이 성립한다.

$$-F^{n-1}(v_i)b'(v_i)+[v_i-b(v_i)](n-1)F^{n-2}(v_i)F'(v)=0$$

즉,

$$\frac{\partial\{b(v_i)F^{n-1}(v_i)\}}{\partial v_i}=\frac{v_i\partial F^{n-1}(v_i)}{\partial v_i} \qquad \cdots(4)$$

그런데 어느 입찰자이든 참가비가 있으므로 입찰가가 최저입찰가보다 작으면 기대이익은 陰이다. 지금 최저입찰가 m에서 기대이익이 零이 되는 평가액을 v_*라고 하자. 즉 $b(v_*)=m$이라고 하자. 그러면 입찰자가 입찰에 참가하경 될 평가액 v_i는 $v_*\leqq v_i\leqq \bar{v}$라야 한다. 그리고 식(1)에서

$$F^{n-1}(v_*)[v_*-m]-c=0 \qquad \cdots(5)$$

를 만족시켜야 한다. 이 식에서

$$m=v_*-c/F^{n-1}(v_*) \qquad \cdots(6)$$

을 얻게 된다.

식(4)는 기대이익을 최대로 하는 입찰전략 b에 대한 식인데 입찰자의 평가액이 v일 때 이 식(4)를 v_*에서 v까지 적분하면 기대이익을 최대로하는 전략 $b(v)$을 얻을 수 있다. 이제 식(4)를 v_*에서 v까지 적분하여 $b(v_*)=m$을 대입하면

$$b(v)=v-(v_*-m)\frac{F^{n-1}(v_*)}{F^{n-1}(v)}-\frac{\int_{v*}^{v}F^{n-1}(x)dx}{F^{n-1}(v)}$$

$$=v-\frac{c+\int_{v*}^{v}F^{n-1}(x)dx}{F^{n-1}(v)},\quad v_*\leqq v\leqq\bar{v} \qquad \cdots(7)$$

을 얻게 된다. 그러면 이 $b(v)$에 대해 다음 定理가 성립하게 된다.

定理 1. 최저입찰가가 m이고 참가비가 c인 제1입찰가 모형에서 입찰자의 Nash 평형전략 $b^*(v)$는

$$b^*(v)=\begin{cases} v-\dfrac{c+\int_{v*}^{v}F^{n-1}(x)dx}{F^{n-1}(v)}, & v_*\leqq v\leqq\bar{v} \\ 0 & , \leqq v<v_*\underline{v} \end{cases} \qquad \cdots(8)$$

이다.

證明. $b^*(v)$은 식(7)에 의해 유도되었다. 따라서 이 전략이 Nash 평형전략임을 보이면 된다.

입찰자의 평가액이 v_*보다 작으면 기대이익 零보다 작으므로 입찰에 참가하지 않는 게 최적이다. 평가액이 v_*이상일 때 $b^*(v)$가 평형전략임을 보이기 위해 평가액이 $v(\geqq v_*)$인 입찰자가 $D\fallingdotseq b^*(v)$로 전략을 취한다 하자. 그리고 $\phi(D)=t$라 두면 이때 낙찰될 확률은 $F^{n-1}(t)$로 된다. 따라서 기대이익은 식(1)에 의해

$$(v-D)F^{n-1}(t)-c \qquad \cdots(9)$$

이다. 평행전략일때의 기대이익은 식(8)에 의해.

$$(v-b^*)F^{n-1}(v)-c$$

$$=\int_{v*}^{v}F^{n-1}(x)dx \qquad \cdots(10)$$

로 된다. (9)式을 변형하면

$$(v-D)F^{n-1}(t)-c$$

$$=(t-D)F^{n-1}(t)-c+(v-t)F^{n-1}(t)$$

로 되어 식(10)을 이용하면 전략D의 기대이익은

$$\int_{v*}^{t}F^{n-1}(x)dx+(v-t)F^{n-1}(t) \qquad \cdots(11)$$

로 표현된다.

$D>b^*(v)$이면 $b(v)$는 v에 대해 증가함수이므로 $t>v$이다. (10)식에서 (11)식을 빼면

$$-\int_{v}^{t}F^{n-1}(x)dx+(t-v)F^{n-1}(t)$$

$$=\int_{v}^{t}(x-v)\partial F^{n-1}(x) \qquad \cdots(12)$$

로써 이 값은 陽이다. 또한 $D<b^*(v)$이면 $t<v$이고 같은 방법으로 (10)식에서 (11)식을 빼면

$$\int_{t}^{v}F^{n-1}(x)dx+(t-v)F^{n-1}(t)$$

$$=\int_{t}^{v}(v-x)\partial F^{n-1}(x) \qquad \cdots(13)$$

로써 이 값은 陽이다. 따라서 $b^*(v)$는 Nash 평행전략이다.

입찰자의 평가액이 $v(\geqq v^*)$이면 (10)식에 의해 기대이익은 $\int_{v*}^{v}F^{n-1}(x)dx$이다. 또한 Riley와 Samuelson [10]의 Proposition 2.와 定理 1.의 평형전략을 비교하면 참가비 c가 있으므로 해서 $c/F^{n-1}(v)$만큼 입찰가가 낮아진다는 것을 알 수 있다.

지금 서로 독립이고 같은 분포함수 $F(v)$를 가진 확률변수 v_1, v_2, $\cdots$, v_n이 주어졌다 하자. 이들 v_1, v_2, $\cdots$, v_n을 가장 작은 것부터 차례로 나열하여 $v_{(1)}\leqq v_{(2)}\leqq\cdots\leqq v_{(n)}$이라 둔다. 그러면 $v_{(i)}$의 확률밀도 함수$g_i(v)$와 누적밀도함수 $G_i(v)$는 다음 (14)식과 같다. ([6], pp. 325)

$$g_i(v)=\frac{n!}{(n-i)!(i-1)!}[F(v)]^{i-1}[1-F(v)]^{n-i}F'(v),$$
$$i=1,\ \cdots,\ n$$

$$G_i(v)=\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}[F(v)]^{j}[1-F(v)]^{n-j},\quad i=1,\ \cdots,\ n \qquad \cdots(14)$$

이 식을 이용하여 입찰자들이 평형전략을 사용했을 때 경매자의 기대수입과 낙찰자의 기대이익을 구해보자.

定理 2. 최저입찰가가 m이고 참가비가 c인 제1입찰가모형에서 경매자의 기대수입은

$$n\int_{v*}^{\bar{v}}[vF'(v)+F(v)-1]F^{n-1}(v)dv \qquad \cdots(15)$$

이고 낙찰자의 기대이익은

$$n\int_{v*}^{\bar{v}}[1-F(v)]F^{n-1}(v)dv+(n-1)c[1-F(v_*)] \qquad \cdots(16)$$

이다.

證明. 낙찰자의 평가액은 가장 높은 평가액으로 $v_{(n)}$이다. 이 $v_{(n)}$의 확률밀도함수는 (14)식의 $g_n(v)$이다. 또한 $v_{(n)}$은 최소평가액 v_*이상이어야 한다. 따라서 기대낙찰가는

$$\int_{v*}^{\bar{v}}b^*(v)g_n(v)dv$$

로 $b^*(v)$를 대입하고 부분적분을 이용하면

$$n\int_{v*}^{\bar{v}}[vF'(v)+F'(v)-1]F^{n-1}(v)dv-nc[1-F(v_*)] \qquad \cdots(17)$$

로 된다.

한편 입찰에 참가할 확률은 평가액이 v_*이상일 확률로 $1-F(v_*)$이다. 따라서 n명의 잠재입찰자로 부터 경매자가 받는 총기대참가비는

$$nc[1-F(v_*)] \qquad \cdots(18)$$

이다. 경매자의 기대수입은 기대낙찰가에 총기대참가비를 합한 것으로 식(17)에 식(18)을 합하면 식(15)가 유도된다.

한편 낙찰자의 평가액은 $v_{(n)}$이므로 이 기대값은

$$\int_{v*}^{\bar{v}}vg_n(v)dv$$
$$=n\int_{v*}^{\bar{v}}vF^{n-1}(v)F'(v)dv \qquad \cdots(19)$$

이고 낙찰자의 기대지불가는 기대낙찰가 (17)식에 기대참가비 $c[1-F(v_*)]$를 合한 것이다. 낙찰자의 기대이익은 낙찰자의 기대평가액에서 기대지불가을 뺀 것으로 (16)식이 유도된다.

이 定理로 부터 경매자의 기대수입은 입찰가와 참가비가 있는 경우가 최저입찰만을 갖는 경우보다 결코 높일 수 없음을 알 수 있다. 그러나 낙찰자의 기대이익은 참가비가 있으면 $(n-1)c[1-F(v^*)]$ 만큼 증가한다. 이 값은 낙찰되지 않는 입찰자가 부담하는 비용인 것이다.

지금 입찰자의 평가액이 $v(\geqq v^*)$이면 식(10)로 부터 기대이익은 $\int_{v*}^{v}F^{n-1}(x)dxv$이다. v는 $F(v)$의 분포를 따르므로 입찰자의 기대이익은

$$\int_{v*}^{\bar{v}}\int_{v*}^{v}F^{n-1}(x)dxF'(v)dv \qquad \cdots(20)$$

으로 부분적분을 이용하면 식(20)은

$$\int_{v*}^{\bar{v}}[1-F(v)]F^{n-1}(v)dv \qquad \cdots(21)$$

이다. 입찰자의 전략이 대칭이므로 모든 입찰자의 기대이익은 같다. 따라서 n명의 입찰자의 기대이익은 (21)식의 n배이다. 낙찰자의 기대이익은 모든 입찰자의 기대이익에 다른 입찰자의 기대참가비를 합한 것이므로 결국 식 (16)과 같게 된다.

한편 경매자는 기대수입을 최대로 하는 경매설계를 하려 한다. 식 (15)을 v_*에 대해 미분하여 零으로 놓고 정리하면

$$v_*=[1-F(v_*)]/F'(v_*) \qquad \cdots(22)$$

가 된다. 기대수입은 최대로 하는 v_*는 입찰자 數에 독립이다. 최저입찰가와 참가비를 설계하기 위하여 식(22)의 v_*를 (6)식에 대입하면

$$m=\frac{1-F(v_*)}{F'(v_*)}-\frac{c}{F^{n-1}(v_*)} \qquad \cdots(23)$$

이다. m과 c는 非陰이다. 식(23)은 경매자의 기대수입을 최대로 하는 어떤 v_*가 있을 때의 최저입찰가와 참가비의 관계를 나타낸다. 최대참가비는 $m=0$일때 $c=v_*F^{n-1}(v_*)$이고 최대 최저입찰가는 $c=0$ 일때 $m=v_*$이다. 식(23)을 만족하는 최저입찰가 m과 참가비 c의 어떤 (m, c)쌍(雙)에 대해서도 경매자의 기대수입은 변하지 않는다. 그래서 다음 정리가 성립한다.

定理 3. 제1입찰가모형에서 식(23)을 만족시키는 (m, c)쌍(雙)에 대해 낙찰자의 기대이익은 참가비가 클수록 증가하나 경매자의 기대수입은 모든 (m, c)에 무관하다.

한편 입찰자 數가 많아지면(즉 $n\to\infty$) 제1입찰가모형의 Nash평형전략 (8)式은 식(5)에 의해 참가비가 零에 수렴하고 $\int_{v*}^{v}[F(x)/F(v)]^{n-1}dx$는 $F(x)\leqq F(v)$이므로 零에 수렴하여 v에 접근하게 된다. 따라서 낙찰자의 기대이익은 零에, 경매자의 기대수입은 (19)式에 수렴한다.

3. 제2입찰가모형

이 장에서는 최저입찰가와 참가비가 있는 제2입찰가모형의 입찰전략, 경매가의 기대수입, 낙찰자의 기대이익에 관하여 다루기로 한다.

제 1 입찰가모형과 같이 입찰자의 전략을 $b_i=b_i(v)$, $i=1, 2, \cdots, n$로 두자. 제 2 입찰가모형에서는 낙찰가는 최고액수 다음의 입찰가가 된다. 이 낙찰가는 낙찰자의 입찰가와는 상관이 없다. 그래서 낙찰할려면 가능한 입찰가를 높이는 것이 좋다. 그래서 이 모형에서의 Nash 평형전략은 입찰자의 입찰가가 v일 때

$$b^*(v)=\begin{cases} v-c, & v \geqq v_* \\ 0 & , v < v_* \end{cases} \qquad \cdots(24)$$

이다. 입찰가가 $v-c$ 보다 높으면 기대이익이 陰이 될 수 있는데 이것은 바라는 바가 아니다. 입찰가가 $v-c$ 보다 낮으면 낙찰가는 자기의 입찰가와 상관없는데(왜냐하면 낙찰가는 제 2 입찰가이기 때문이다.) 입찰가를 낮게 하였다가 낙찰을 받지 못할 수가 있기 때문이다.

다음에는 낙찰자의 기대이익과 경매자의 기대수입을 보기로 하자.

定理 4. 최저입찰가가 m이고 참가비가 c인 제 2 입찰가모형에서 경매자의 기대수입은

$$n\int_{v_*}^{\bar{v}}[vF'(v)+F'(v)-1]F^{n-1}(v)dv-c\int_{v_*}^{\bar{v}}g_{n-1}(v)dv \qquad \cdots(25)$$

이고 낙찰자의 기대이익은

$$n\int_{v_*}^{\bar{v}}[1-F(v)]F^{n-1}(v)dv+c\int_{v_*}^{\bar{v}}g_{n-1}(v)dv+(n-1)c[1-F(v_*)] \qquad \cdots(26)$$

이다.

證明. 경매자의 기대수입은 낙찰자의 기대지불가와 다른 입찰자의 기대참가비의 合이다. 전술한 바와 같이 $v_{(n-1)}$을 두번째로 높은 평가액이라 두자. 입찰참가자가 둘이상인 경우 즉 평가액이 v^*이상인 입찰자가 둘이상인 경우는 제 2 최고입찰가는 $v_{(n-1)}-c$이다. 이 $v_{(n-1)}$의 확률밀도 함수는 (14)式으로 부터

$$g_{n-1}(v)=n(n-1)[1-F(v)]F^{n-2}(v)F'(v)$$

이다. 기대낙찰가는

$$\int_{v_*}^{\bar{v}}(v-c)g_{n-1}(v)dv$$

로써 $g_{n-1}(v)$를 대입하여 정리하면

$$\int_{v_*}^{\bar{v}}[vF'(v)+F(v)-1]F^{n-1}(v)dv-nv_*[1-F(v_*)]F^{n-1}(v_*)-c\int_{v_*}^{\bar{v}}g_{n-1}(v)dv \qquad \cdots(27)$$

이다.

다음에는 입찰자가 한명일 경우를 보자. 입찰참가자가 한명일 확률은 $(n-1)$名의 입찰자의 평가액이 v_*보다 낮고 한 입찰자의 평가액이 v^*이상일 확률로 $n[1-F(v_*)]F^{n-1}(v_*)$이다(참조 [6], pp. 326). 이 확률에 최저입찰가 m을 곱한 것이 기대낙찰가이다. m은 (6)式에 의해 v_*와 c의 함수로 나타낼 수 있다. 따라서 이때의 기대낙찰가는

$$[v_*-c/F^{n-1}(v_*)]n[1-F(v_*)]F^{n-1}(v_*)$$
$$=nv_*[1-F(v_*)]F^{n-1}(v_*)-nc[1-F(v_*)] \cdots(28)$$

이다. 다음 기대참가비는 제 1 입찰가모형에서와 같이 $nc[1-F(v_*)]$이다. 따라서 경매자의 기대수입은 이 기대참가비와 式 (27), (28)을 合한 것으로 式(25)가 된다.

낙찰자의 기대이익은 式(19)의 기대평가액에서 낙찰자의 기대지불가(기대낙찰가+기대참가비)를 뺀 것이다. 기대낙찰가는 (27)式, 기대참가비는 $c[1-F(v_*)]$이다. 따라서 式(26)이 유도된다.

다음에 v_*, m, c의 관계에 대해 보기로 하자. 이 관계는 제 1 입찰가모형에서와 같이 式(23)이 성립한다. 이것은 v_*가 일정할 때 식(25), (26)으로 부터 참가비 c가 클수록 경매자의 기대수입은 작아지나 낙찰자의 기대이익이 커짐을 알 수 있다. 그래서 後定理 4-1. 이 성립한다.

後定理 4-1. 일정한 v_*에 대해 참가비가 클수록 제 2 입찰가모형의 경매자의 기대수입은 감소하나 낙찰자의 기대이익은 증가 한다.

이 定理를 이용하여 경매자는 자기에게 가장 유리한 경매설계를 할 수 있다. 경매자의 기대수입을 최대로 하는 v_*는 식(22)에 의해 구할 수 있다. v_*, m, c의 관계를 나타내는 식(23)을 만족하는 (m, c)쌍(雙)은 여러개 있다. 따라서 後定理 4-1.의 성질로 부터 경매자에게 가장 유리한 경매설계는 (m, c)쌍(雙)이 $(v_*, 0)$일 때이다.

4. 예 제

$F(v)=v$, $0 \leqq v \leqq 1$인 Uniform분포로 하자. 먼저 최저입찰가가 零이고 참가비가 없는, $m=c=0$인 Vickrey [13]의 모형에 관해 평형입찰전략, 경매자의 기대수입, 낙찰자의 기대이익을 구해보자. 제 1 입찰가 모형의 평형입찰전략은 (8)式에 의해 $b^*(v)=(n-1)v/n$, $0 \leqq v \leqq 1$이고 경매자의 기대수입은 (15)式에 의해 $(n-1)/(n+1)$이며 낙찰자의 기대이익은 (16)으로 부터 $1/(n+1)$이다. 제 2 입찰가모형의 평형입찰전략은 $b(v)=v$, $0 \leqq v \leqq 1$이며, 경매자의 기대수입, 낙찰자의 기대이익은 제 1 입찰가모형의 그것들과 같다.

다음 $m>0$, $c>0$인 경우를 보자. 경매자는 기대수입

을 최대로하는 v_*를 (22)式에 의해 구하면 $v_*=0.5$이다. 따라서 式(23)에 의해 (m, c)双은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}-m\right)-c=0, \quad 0\leqq c\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \qquad \cdots(29)$$

을 만족하는 값들이다.

제 1 입찰가모형의 평형입찰전략은 평가액이 v일 때 (8)식에 의해

$$b^*(v)=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\left[v-\frac{c}{v^{n-1}}\right], & \frac{1}{2}\leqq v\leqq 1\\ 0, & 0\leqq v<\frac{1}{2}\end{cases} \qquad \cdots(30)$$

이며 경매자의 기대수입은 (15)식에 의해

$$\frac{n-1}{n+1}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right] \qquad \cdots(31)$$

로써, $m=c=0$일 때 보다 $\frac{n-1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$만큼 증가한다. 낙찰자의 기대에익은 (16)식에 의해

$$\frac{1}{n+1}\left[1-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+\frac{(n-1)c}{2} \qquad \cdots(31)$$

이다. $m=c=0$와 비교하면, 식(31)에 의해 $c=0$, $m=\frac{1}{2}$이면

$$\frac{n+2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

만큼 감소하나 $c=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$, $m=0$이면

$$\frac{n^2-n-3}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

만큼 기대이익이 증가한다.

제 2 입찰가모형에서 평형입찰전략은 식(24)에 의해

$$b(v)=\begin{cases}v-c, & \frac{1}{2}\leqq v\leqq 1\\ 0, & 0\leqq v<\frac{1}{2}\end{cases} \qquad \cdots(32)$$

이며 경매자의 기대수입은 (25)식으로 부터

$$\frac{n-1}{n+1}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]-c\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \qquad \cdots(33)$$

이다. 이는 제 1 입찰가모형의 그것보다 $c\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$만큼 감소한다. 낙찰자의 기대이익은 (26)식에 의해

$$\frac{1}{n+1}\left[1-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+\frac{(n-1)c}{2}+c\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \cdots(34)$$

로써 제 1 입찰가모형의 그것보다 $c\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$만큼 크다.

5. 결 론

이 논문에서는 제 1 입찰가모형과 제 2 입찰가모형의 입찰전략, 경매자의 기대수입, 낙찰자의 기대이익에 관하여 다루었다.

Vickrey[13]는 최저입찰가가 零이고 참가비가 없을 때 제 1 입찰가모형과 제 2 입찰가모형의 경매자의 기대수입이 같음을, Riley와 Samuelson[10]은 최저입찰가를 도입함으로써 기대수입을 올릴 수 있음을 보였다. 이 논문에서 다룬 최저입찰가와 참가비가 있을 때의 경매자의 기대수입은 적절한 최저입찰가만이 있을 때보다 더 높을 수 없음을 알 수 있다. 따라서 경매자는 적절한 최저입찰가만을 사용함으로써 제1, 제 2 입찰가모형에서 기대수입을 최대로 할 수 있고 그때의 두 입찰모형의 기대수입이 같음을 알 수 있다.

한편 참가비가 있으면 경매자의 기대수입은 제 1 입찰가모형이 제 2 입찰가모형보다 높고, 낙찰자의 기대이익은 제 2 입찰가모형이 제 1 입찰가모형보다 많다. 그러나 입찰자 數가 많아지면(즉 $n\rightarrow\infty$) 제 1 입찰가모형의 전략, 경매자의 기대수입 및 낙찰자의 기대이익은 제 2 입찰가모형의 것들과 같아진다.

참 고 문 헌

1. Engelbrecht-Wiggans, R., "Auctions and Bidding Models: A Survey," Management Science, Vol. 26, pp. 119~142, 1980.
2. Friedman, L. "A competitive bidding strategy," Operations Research, Vol. 4, pp. 104~112, 1956.
3. Harsanyi, J.C., "Games with Incomplete Information played by 'Bayesian' Players," Parts Ⅰ, Ⅱ and Ⅲ, Management Science, Vol. 14, pp. 159~182, 320~334, 489~502, 1967.
4. Harris, M., and A. Raviv, "Allocation Mechanisms and the Design of Auctions," Econometrica, Vol. 49, pp. 1477~1499, 1981.
5. Holt, C. A., Jr., "Competitive Bidding for Contracts Under Alternative Auction Procedures," J. of Political Economy, Vol. 88, pp. 433~445, 1980.
6. Kendall, M.G. and A. Stuart, The Advanced Theory of Statistics Vol. 1, Hafner Publishing Company, New York, 1969.
7. Milgrom, P.R. and R.J. Weber, "A Theory of Auctions and Competitive Bidding," Econometrica, Vol. 50, pp. 1089~1122, 1982.
8. Myerson, R.B., "Optimal Auction Design," Mathematics of Operations Research, Vol. 6, pp. 58~73, 1981.

9. Nash, J., "The Bargaining Problem," Econometrica, Vol. 18, pp. 1550~1562, 1950.
10. Riley, J. and W. Samuelson, "Optimal Auctions," American Eco. Rev., Vol. 71, pp. 381~392, 1981.
11. Rothkopf, M.H., "A Model of Rational Competitive Bidding," Management Science, Vol. 15, pp. 362~373, 1969.
12. Stark, R.M. and M.H. Rothkopf, "Competitive Bidding: A Comprehensive Bibliography," Operations Research, Vol. 27, pp. 364~390, 1979.
13. Vickrey, W., "Counterspeculation Auctions and Competitive Sealed Tenders," Journal of Finance, Vol. 41, pp. 8~37, 1961.
14. Weverbergh, M., "Competitive Bidding with Asymmetric infromation Reanalyzed," Management Science, Vol. 25(3), pp. 291~294, 1979.
15. Wilson, R.B., "Competitive Bidding with Asymmetrical Information," Management Science, Vol. 13, pp. 816~820, 1967.
16. Wilson, R.B., "Competitive Bidding with Disparate Information," Management Science, Vol. 15, pp. 446~448, 1969.
17. Wilson, R.B., "A Bidding Model of Perfect Competition," Review of Economic Studies, Vol. 44, pp. 511~518, 1977.