

論 文

二次元디지털 필터의安定도에 관한研究

正會員 崔 然 旭\* 正會員 丁 愚 尚\*\* 正會員 金 庚 基\*\*\*

A Study on Stability of Two-Dimensional Digital Filters

Yeon Wook CHOE\* and Woo Sang CHUNG\*\* and Kyung Ki KIM\*\*\*, Regular Members

**要 約** 本論文에서는 二次元인 순회형 디지털 필터의 安定度判別에 관한 한 方法을 提案하였다. 一次元系에서의 安定度에 관한 Liapunov의 定理을 기초로 하여 二次元傳達函數로부터 그의 狀態空間式을 유도하여 系行列에 Liapunov의 定理을 적용시켰다. 그 결과 종래의 寫像에 의하여 구한 결과와 일치하였으며 그의 계산양도 줄어들었음을 알 수 있었다.

**ABSTRACT** In this paper, the method of the stability test of the Two-Dimensional digital filters is developed. The Liepunov's stability theorem of One-Dimensional discrete system is extended to Two-Dimensional digital filter transfer function which can be transformed twodimensional state space representation. The results developed above is agreed with of mapping method.

1. 序 論

일반적으로 디지털 필터의 設計에서 비순회형 필터(non-recursive filter)보다 순회형 필터를 사용하는 것이 計算上의 時間을 절약할 수 있다는 利點이 있다. 그러므로 이런 필터의 設計에 있어서는 항상 安定度에 관한 問題를 먼저 고려하여야 한다.

二次元인 디지털 순회형 필터는 二次元Z-變換을 사용하여 일반적으로 다음 식과 같이 표시할 수가 있다.

$$H(Z_1, Z_2) = \frac{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N a_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j}}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N b_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j}} \quad (1)$$

여기서  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ 는 필터의 係數이며  $b_{00}=1$ 이다. 또 변수  $Z_1$ 과  $Z_2$ 는

\*\*\* 漢陽大學校工科大學電子工學科

Dept. of Telecommunication Engineering, Hanyang University, Seoul, 133 Korea

\*\* 淸州大學校理工大學電子工學科

Dept. of Electronic Engineering, Cheongju University, Cheongju, 310 Korea

論文番號: 84-11 (接受 1984. 1. 25)

$$Z_1 = e^{S_1 A}$$

$$Z_2 = e^{S_2 B}$$

이며  $S_1$ 과  $S_2$ 는 垂直軸과 水平軸의 複素空間周波數變數를 의미하여 A와 B는 常數 즉 샘플링 周期를 표시한다.

式(1)을 逆Z-變換을 이용하여 差分方程式의 形態로 고치면 式(2)처럼 된다.

$$y(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N a_{ij} x(n_1-i, n_2-j) - \sum_{(i,j) \neq (0,0)} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N b_{ij} y(n_1-i, n_2-j) \quad (2)$$

$$0 \leq n_1 \leq \infty$$

$$0 \leq n_2 \leq \infty$$

式(2)에서  $\{x(n_1, n_2)\}$ 와  $\{y(n_1, n_2)\}$ 는 각각 필터의 入力과 出力을 표시한다. 그림 1에서 因果的(causal)인 필터가 수행되는 것을 나타냈다.

또 式(2)의 양변에 二次元Z-變換을 적용하여 전달함수를 구하고 그로부터 時間遲延素子를 사용하여 二次元디지털 필터의 표준형으로 실현한 것은 그림 2와 같다.

式(1)을 필터의 임펄스應答을 이용하여 먹급수 전개를 하면 다음 式(3)을 얻을 수 있다.

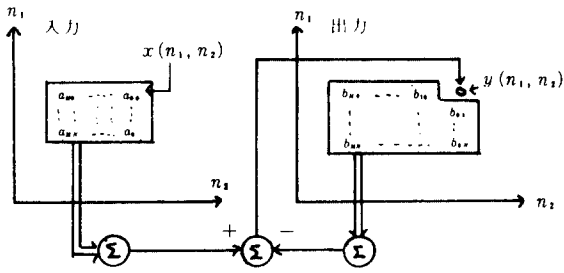


그림 1 식(2)에 의한 필터의 수행과정  
Diagram of how the output is completed.

$$H(Z_1, Z_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} h(n_1, n_2) Z_1^{-n_1} Z_2^{-n_2} \quad (3)$$

여기서  $h(n_1, n_2)$ 는 필터의 임펄스 응답特性이다. 이 때 식(3)으로 표시된 필터가 안정하기 위한 조건은 다음과 같다<sup>(1)</sup>.

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} |h(n_1, n_2)| < \infty \quad (4)$$

式(4)의 임펄스 응답을 구하지 않고 필터의 전달函數로부터 직접 安定度를 판별하는 방법이 제안되었다<sup>(2)</sup>.

$$H(Z_1, Z_2) = \frac{A(Z_1, Z_2)}{B(Z_1, Z_2)} \quad (5)$$

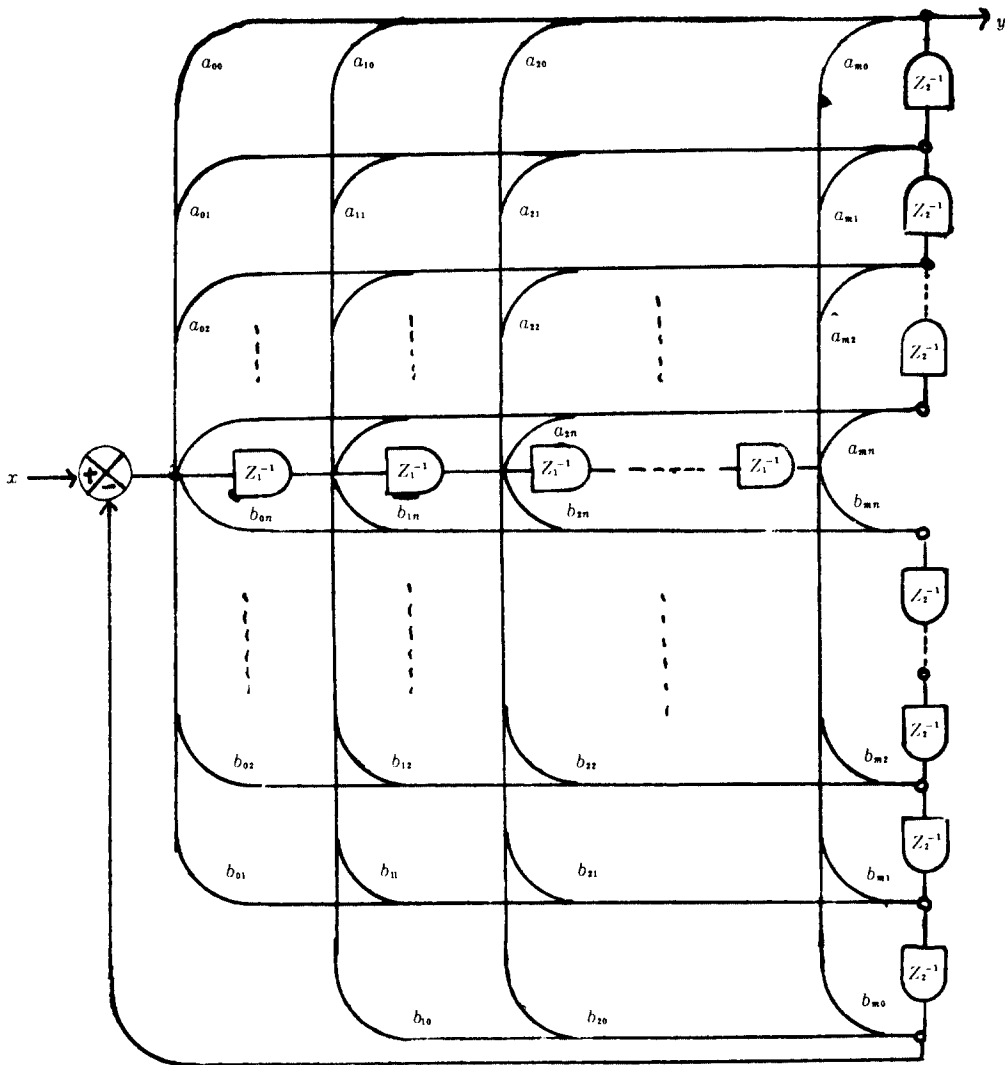


그림 2 2次元 필터의 實現  
Realization of 2-D filter.

式(5)는 필터의 傳達函數이며 分母  $B(Z_1, Z_2)$ 와 分子  $A(Z_1, Z_2)$ 는 서로 소라고 가정한다. 주어진 領域  $|Z_1| \geq 1 \cap |Z_2| \geq 1$ 에서 式(5)의 분모가 0이 아니면 式(5)는 安定한 필터의 傳達函數이다\*. 이러한 방법은  $B(Z_1, Z_2) = 0$ 인 代表的寫像에 의하여  $|Z_1| \geq 1$ 에 있는  $Z_1$ -平面的 領域을  $Z_2$ -平面上으로 사상해야 한다. 이 때 寫像의 影像이  $|Z_1| = 1$ 인 單位圓内部에 있게 되면 安定하고 그렇지 않을 경우는 불안정한 필터이다<sup>(6)</sup>.

本論文에서는 一次元離散系에서의 安定度에 관한 Liapunov定理<sup>(3)</sup>를 二次元필터의 전달함수에서의 安定度判別에 확대 적용을 시도했다.

## 2. 本 論

(1) T. S. Huang의 定理에 의한 安定度の 檢討 二次元필터의 安定度判別에 관한 Shank의 定理<sup>(4)</sup>는 실제 적용에 있어 너무 많은 계산이 소요되므로 Huang에 의하여 다음과 같은 簡略式이 발표되었다<sup>(1)</sup>.

定理1. 傳達函數

$$H(Z_1, Z_2) = \frac{A(Z_1, Z_2)}{B(Z_1, Z_2)} \quad (5)$$

일 때 式(5)의 필터가 아래 i), ii)의 조건을 만족하면 安定하다.

i)  $d_1 = Z_1: |Z_1| \geq 1$ 에서의 어떤 값도  $B(Z_1, Z_2) = 0$ 에 의하여  $Z_2 = 0$ 로 寫像되지 않아야 한다.

ii)  $B(Z_1, Z_2) = 0$ 에 의하여  $Z_1$ -平面이  $Z_2$ -平面上으로 寫像될 때  $d_2 = Z_1: |Z_1| = 1$ 은  $d_3 = Z_2, |Z_2| \geq 1$ 의 외부에 있어야 한다.

위를 式으로 표시하면 다음과 같다.

i)  $B(Z_1, 0) \neq 0 \quad |Z_1| \geq 1$

ii)  $B(Z_1, Z_2) \neq 0 \quad |Z_1| = 1, |Z_2| \geq 1$

i), ii)와 같은 T. S. Huang의 定理는 다음과 같이 다른 여러 가지 형태로 표시될 수가 있다<sup>(5)</sup>.

①  $B(a, Z_2) \neq 0: |Z_2| \geq 1$ 일 때  $|a| \leq 1$ 인 임의의  $a$

②  $B(Z_1, b) \neq 0: |Z_1| \geq 1$ 일 때  $|b| = 1$ 인 임의의  $b$

③  $B(Z_1, Z_2) \neq 0: |Z_1| = |Z_2| = 1$

위의 ①, ②, ③에서  $a = b = 1$ 로 택하면

$$\left. \begin{aligned} B(1, Z_2) \neq 0, \quad |Z_2| \geq 1 \\ B(Z_1, 1) \neq 0: |Z_1| \geq 1 \\ B(Z_1, Z_2) \neq 0: |Z_1| = |Z_2| = 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)의 세번째 조건은  $B(Z_1, Z_2)$ 에 대한 Schur-Cohn 行列을 확인하는 것과 같다.

위의 式(6)을 개선한 다른 表現式은 式(7)과 같다<sup>(6)</sup>.

$$\left. \begin{aligned} B(Z_1, Z_2) \neq 0, \quad Z_1 = Z_2 = Z, \quad |Z_1| \geq 1 \\ B(Z_1, Z_2) \neq 0 \quad |Z_1| = |Z_2| = 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)의 첫번째 조건은 一次元에서의 安定度에 관한 문제와 같고 두번째 조건은 式(6)의 세번째 조건과 일치한다. 그러므로 式(7)의 표현이 가장 간략한 형태라는 것을 알 수 있다.

## (2) 二次元狀態方程式에 의한 Liapunov 方法的 提案

一次元離散系에서의 安定度에 관한 Liapunov의 定理는 다음과 같다<sup>(3)</sup>.

定理2: 線形이며 時不變系에서 狀態方程式(8)이 주어졌을 때

$$X(t_{k+1}) = PX(t_k) \quad (t_{k+1} - t_k = 1) \quad (8)$$

式(9)를 만족하는 대칭이며 positive-definite한 行列  $P$ 가 존재하면 주어진 系는 점근적으로 安定하다.

$$P^T P H - P = -Q \quad (9)$$

그러므로 一次元離散系에서 그의 狀態方程式을 구하게 되면 주어진 系의 安定度는 쉽게 判別할 수가 있다.

이와 같은 一次元에서의 Liapunov의 定理를 二次元필터의 傳達函數에 적용하려면 二次元傳達函數에 대한 狀態空間表示式이 요구된다. 그러므로 本論文에서는 二次元傳達函數에 대하여 提案된 여러 가지 狀態空間表示法중에서 Roesser가 提案한 形<sup>(7)</sup>을 사용하여 Liapunov의 定理를 적용시켰다. 이는 Roesser의 형이 一次元狀態空間式과 가장 유사하기 때문이다.

二次元的 狀態變數를 다음과 같이 定義한다.

$$\left. \begin{aligned} (R(n_1, n_2): \text{垂直軸의 狀態變數} \\ (S(n_1, n_2): \text{水平軸의 狀態變數} \end{aligned} \right\}$$

앞의 定義에서와 같이  $n_1$ 과  $n_2$ 는 각각 垂直軸과 水平軸을 나타내고  $x(n_1, n_2)$ 와  $y(n_1, n_2)$ 는

\* 주어진 전달함수 (1)식이  $Z_1^{-1}, Z_2^{-1}$ 의 項으로 전개되므로  $Z_1' = Z_1^{-1}, Z_2' = Z_2^{-1}$ 로 두면 安定조건의 영역을  $|Z_1'| \leq 1 \cap |Z_2'| \leq 1$ 로 변환할 수 있다.

系の 入力과 出力을 표시한다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R(n_1+1, n_2) \\ S(n_1, n_2+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(n_1, n_2) \\ S(n_1, n_2) \end{pmatrix} + \\ &\quad \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} x(n_1, n_2) \\ y(n_1, n_2) &= [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{pmatrix} R(n_1, n_2) \\ S(n_1, n_2) \end{pmatrix} \\ &\quad + \mathbf{D} \times (n_1, n_2) \end{aligned} \quad (10)$$

$$n_1, n_2 \geq 0$$

初期條件을 0으로 가정하고 二次元Z-變換을 式(10)의 양변에 적용하여 系の 傳達函數를 구할 수가 있다.

$$Y(Z_1, Z_2) = \left\{ [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{pmatrix} Z_1^{-1}\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 \\ -\mathbf{A}_3 & Z_2^{-1}\mathbf{I}_4 - \mathbf{A}_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} + \mathbf{D} \right\} x(Z_1, Z_2)$$

그러므로 傳達函數는 다음과 같다.

$$H(Z_1, Z_2) = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{pmatrix} Z_1^{-1}\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 \\ -\mathbf{A}_3 & Z_2^{-1}\mathbf{I}_4 - \mathbf{A}_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} + \mathbf{D} \quad (11)$$

여기서  $\mathbf{I}_1$ 과  $\mathbf{I}_4$ 는 각각  $\mathbf{A}_1$ 과  $\mathbf{A}_4$ 의 次數에 상응하는 단위행렬이다.

式(11)의 二次元傳達函數에 대한 安定度判別의 한 가지로서 주어진 系の 狀態空間式으로부터 式(12)와 같이 系の 固有值를 구하여 安定度를 확인할 수가 있다.

$$|Z\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} Z_1^{-1}\mathbf{I}_1 - \mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 \\ -\mathbf{A}_3 & Z_2^{-1}\mathbf{I}_4 - \mathbf{A}_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

式(12)는 Cramer의 定理에 의하여 전개하면 固有值를 구할 수 있으나 계산양이 많으므로 필터의 次數가 높아지면 곤란하다. 또 傳達函數 式(11)에 T. S. Huang의 定理를 도입하여 寫像에 의한 安定度를 判別할 수도 있으나 그의 계산양은 여전히 많다.

그러므로 本論文에서는 일반적으로 주어진 二次元인 디지털 필터로부터 式(10)과 같은 형태의 二次元狀態空間式을 유도하고 이 식의 系行列에 Liapunov의 定理를 적용함으로써 필터의 安定度를 확인한다.

式(1)로부터

$$H(Z_1, Z_2) = \frac{Y(Z_1, Z_2)}{X(Z_1, Z_2)} = \frac{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N a_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j}}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N b_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j}}$$

위 식을 狀態空間式으로 나타내기 위해 다음과 같이 배열한다.

$$\frac{X(Z_1, Z_2)}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N b_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j}} = \frac{Y(Z_1, Z_2)}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N a_{ij} Z_1^{-i} Z_2^{-j}} = Q(Z_1, Z_2) \quad (13)$$

그러므로 狀態變數를 다음과 같이 定義한다.

$$\begin{cases} R_1(Z_1, Z_2) = Z_1^{-1} Q(Z_1, Z_2) \\ R_2(Z_1, Z_2) = Z_1^{-2} Q(Z_1, Z_2) \\ \vdots \\ R_M(Z_1, Z_2) = Z_1^{-M} Q(Z_1, Z_2) \\ S_1(Z_1, Z_2) = Z_2^{-1} Q(Z_1, Z_2) \\ S_2(Z_1, Z_2) = Z_2^{-2} Q(Z_1, Z_2) \\ \vdots \\ S_N(Z_1, Z_2) = Z_2^{-N} Q(Z_1, Z_2) \end{cases}$$

위의 狀態變數를 사용하면 다음과 같은 狀態空間式으로 표시할 수가 있다.

$$\begin{pmatrix} R_1(n_1+1, n_2) \\ R_2(n_1+1, n_2) \\ \vdots \\ R_M(n_1+1, n_2) \\ S_1(n_1, n_2+1) \\ S_2(n_1, n_2+1) \\ \vdots \\ S_N(n_1, n_2+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(Z_2) & b_2(Z_2) & \cdots & b_M(Z_2) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{M+1}(Z_1) & b_{M+2}(Z_1) & \cdots & b_{M+N}(Z_1) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1(n_1, n_2) \\ R_2(n_1, n_2) \\ \vdots \\ R_M(n_1, n_2) \\ S_1(n_1, n_2) \\ S_2(n_1, n_2) \\ \vdots \\ S_N(n_1, n_2) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x(n_1, n_2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y(n_1, n_2) = [a_1(Z_1) \ a_2(Z_2) \ \dots \ a_M(Z_2) \ a_{M+1}(Z_1)]$$

$$a_{M+2}(Z_1) \ \dots \ a_{M+N}(Z_1) \begin{pmatrix} R_1(n_1, n_2) \\ R_2(n_1, n_2) \\ \vdots \\ R_M(n_1, n_2) \\ S_1(n_1, n_2) \\ S_2(n_1, n_2) \\ \vdots \\ S_N(n_1, n_2) \end{pmatrix} \quad (14)$$

式(14)에서  $M$ 과  $N$ 은  $Z_1$ 과  $Z_2$ 의 次數를 의미하여  $a_{00} = 0$ 로 가정했다.

위식의 狀態空間式에서 系行列의 各要素는 垂直軸과 水平軸을 定義하는 狀態變數에 의하여  $Z_1$ 과  $Z_2$ 의 함수로 되어 있다.

그러므로 二次元의 狀態空間式에 Liapunov의 安定度에 關한 定理를 적용하려면 다음과 같이 狀態變數의 垂直軸과 水平軸에 영역을 정의하여야 한다.

①  $Z_2 = 0$ 인 영역 : 이는 水平軸의 영역을 무시하고 垂直軸의 영역만 고려하게 되므로 이 경우는 一次元에서의 安定度에 關한 문제와 같으므로 비교적 간단하게 Liapunov의 定理를 적용할 수 있다.

②  $|Z_1| = 1$ 인 영역 : 이 경우의 狀態空間表示式은 각 行렬의 要素가  $Z_1$ 의 函數로 표시가 되므로 이 식의 系行列에 Liapunov定理를 적용하여 行列  $\mathbf{P}$ 의 positive-definite를 확인한다. 즉

$$|Z_1| = |e^{j\theta}| = 1$$

이므로

$$Z_1 = e^{-j\theta} = Z_1^{-1}$$

이다.

그러므로 行列  $\mathbf{P}$ 의 主小行列 (leading principal minor)을 구함으로써  $\mathbf{P}$ 의 positivity를 확인할 수가 있다. 즉 主小行列은  $Z_1$ 의 函數로 표시되므로 다음 식(14)와 같이 표시가 가능하다.

$$f(Z_1, Z_1^{-1}) = \sum_{j=0}^M C_j (Z_1^{-j} + Z_1^j) \quad (14)$$

식(14)가  $|Z_1| = 1$ 의 조건에서 positivity-definite하여야 하므로

$$g(Z_1) = Z^N f(Z_1^{-1}, Z_2) > 0 : |Z_1| = 1 \quad (15)$$

식(15)가 만족되려면 다음 식(16)의 조건이 성립되어야 한다.

$$g(1) > 0$$

여기서  $\mathbf{P}$ 가 對稱行列이므로  $\mathbf{P}$ 의 主小行列은 항상 實數가 된다. 그러므로  $Z_1 = 1$ 에서 行列  $\mathbf{P}$ 의 innerwise matrix가 positive해야 함을 나타내고 있다.

### (3) 二次元相對空間表示法에 의한 例

① 一次 (first-order)인 二次元디지틀 필터의 傳達函數가 다음과 같이 주어졌을 때 安定하기 위한 係數값의 범위를 구한다.

$$H(Z_1, Z_2) = \frac{1}{1 + aZ_1^{-1} + bZ_2^{-1}}$$

i)  $Z_2 = 0$ 인 경우

$$\frac{Y(Z_1)}{U(Z_1)} = \frac{1}{1 + aZ_1^{-1}}$$

이 식에 대한 狀態空間式은

$$X(k+1) = -a \cdot x(k) + u(k)$$

위 식의 系行列은  $-a$ 이므로

$$H^* P H - P = -Q$$

에 대입하여  $P$ 의 값을 구한다.

$$P = 1 / (1 - a^2)$$

여기서  $P$ 가 positive-definite한  $a$ 값의 범위는

$$|a| < 1$$

ii)  $|\hat{Z}_1| = 1$ 인 경우

$$\frac{Y(\hat{Z}_1, Z_2)}{U(\hat{Z}_1, Z_2)} = \frac{1}{1 + a\hat{Z}_1^{-1} + bZ_2^{-1}}$$

여기서  $S(\hat{Z}_1, Z_2) = Z_2^{-1} Q(\hat{Z}_1, Z_2)$ 를 狀態變數로 하면 위 식의 狀態空間表示式을 다음과 같다.

$$Z_2 S(\hat{Z}_1, Z_2) = -\frac{b}{1+a\hat{Z}_1^{-1}} S(\hat{Z}_1, Z_2)$$

그러므로  $|\hat{Z}_1|=1$ 에서 系行列은

$$H = -\frac{b}{1+a\hat{Z}_1^{-1}}$$

이므로 行列  $P$ 를 구하면

$$P = \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{1+a\hat{Z}_1^{-1}}\right)^2}$$

그러므로 위 行列  $P$ 가 **positive-definite**하기 위한 係數값의 범위는 다음과 같다.

$$P = \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{1+a\cdot 1}\right)^2} > 0$$

$$\left|\frac{b}{1+a}\right| < 1$$

i), ii)로부터 주어진 二次元필터의 傳達函數는 다음의 범위 내에서 안정하게 된다.

$$|a| < 1, \quad \left|\frac{b}{1+a}\right| < 1$$

이 값은 T. S. Huang의 방법에 의하여 구한 係數  $a, b$ 값의 범위와 일치한다<sup>(3)</sup>.

② 二次(2nd-order)인 二次元필터의 安定度

$$H(Z_1, Z_2) = \frac{1}{B(Z_1, Z_2)}$$

$$B(Z_1, Z_2) = 1 - 0.8Z_1^{-1} - 1.635Z_2^{-1} + 1.272Z_1^{-1}Z_2^{-1} + 0.8Z_2^{-2} - 0.64Z_2^{-2}Z_1^{-1}$$

i)  $Z_2=0$

$$\frac{Y(Z_1)}{U(Z_1)} = \frac{1}{1 - 0.8Z_1^{-1}}$$

$$x(k+1) = 0.8x(k) + u(k)$$

系行列이 0.8이므로 行列  $P$ 의 값을 구하면

$$P = 0.36 > 0$$

ii)  $|\hat{Z}_1|=1$

$$H(Z_1, Z_2) = \frac{1}{(1 - 0.8\hat{Z}_1^{-1}) + (1.272\hat{Z}_1^{-1} - 1.65)Z_2^{-1} + (0.8 - 0.64\hat{Z}_1^{-1})Z_2^{-2}}$$

狀態變數 :  $S_1(\hat{Z}_1, Z_2) = Z_2^{-1} Q(\hat{Z}_1, Z_2)$

$S_2(\hat{Z}_1, Z_2) = Z_2^{-2} Q(\hat{Z}_1, Z_2)$

위 傳達函數의 系行列을 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1.272\hat{Z}_1^{-1} - 1.65}{1 - 0.8\hat{Z}_1^{-1}} & \frac{0.8 - 0.64\hat{Z}_1^{-1}}{1 - 0.8\hat{Z}_1^{-1}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

行列  $P$ 를 구하기 위해

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

로 두고  $\mathbf{H}'\mathbf{P}\mathbf{H} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$ 에 대입한다.

$$\mathbf{P} = \frac{-1}{2(\text{tr } \mathbf{H})(\det \mathbf{H})} \begin{bmatrix} \det \mathbf{H} + h_{21}^2 + h_{22}^2 \\ -(h_{12}h_{22} + h_{21}h_{11}) \\ -(h_{12}h_{22} + h_{21}h_{11}) \\ \det \mathbf{H} + h_{11}^2 + h_{12}^2 \end{bmatrix}$$

$|Z_1|=1$ 의 조건하에서 行列  $P$ 의 **positivity**를 확인하면

$$P_{11} = \frac{\det \mathbf{H} + h_{21}^2 + h_{22}^2}{2(\text{tr } \mathbf{H})(\det \mathbf{H})}$$

$$\det \mathbf{P} = \frac{(h_{11} + h_{22})^2 + (h_{12} - h_{21})^2}{2(\text{tr } \mathbf{H})^2(\det \mathbf{H})}$$

으로 표시되므로  $P_{11} < 0$ 이며  $\det \mathbf{P} > 0$ 이 됨을 알 수 있다. 즉 주어진 二次元필터의 傳達函數는 불안정함을 나타내고 있다.

위의 傳達函數를 T. S. Huang의 방법을 이용하여 安定度를 판별한 결과는 아래그림 3과 같으며 本論文의 결과와 완전히 일치됨을 알 수 있다.

그림 3은  $Z_2 = U + jV$ 로 두고 분모  $B(Z_1, Z_2) = 0$ 에 의하여  $Z_2$ -平面에서의 단위원의 外部領域을  $Z_1$ -平面으로 寫像한 것이다(빛금친 부분). 실제의 계산은  $Z_2$ -平面의 단위원의 원주를  $Z_1$ -平面으로 사상했다.

### 3. 結 論

二次元의 傳達函數에서 그에 상응하는 狀態空間式으로의 전환과정이 비교적 간단하고 또한 系行列이  $Z_1$ 과  $Z_2$ 의 함수로 표시되므로 이에 맞

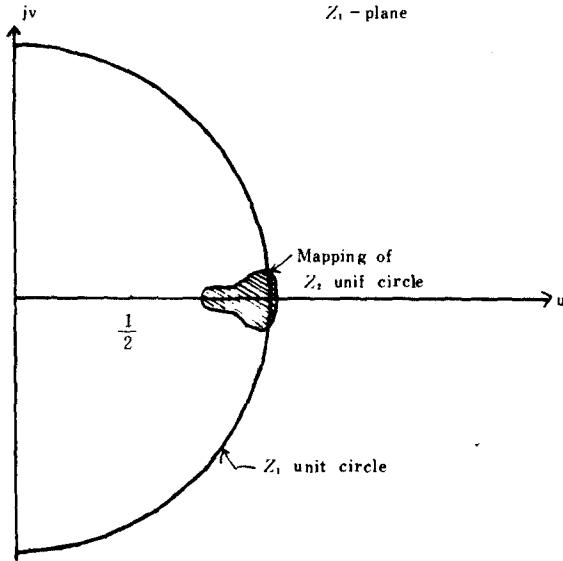


그림 3 사상에 의한 결과

는 垂直軸과 水平軸의 安定된 영역을 정의하여 줌으로써 系の 安定度를 확인할 수가 있었다.

앞의 예에서 본 바와 같이 Shank의 定理에 의한 安定度判別은 各平面사이의 寫像에 의하여 확인하므로 그의 계산 과정이 길어지는 단점이 있었다.

本論文에서 제안된 방법은 二次元의 狀態空間式을 유도함으로써 쉽게 系の 安定度를 판별할 수가 있었으며 그 결과는 종래의 것과 일치됨을 보였다.

### 参 考 文 献

- (1) T. S. Huang, "Stability of two-dimensional recursive filters," IEEE Trans. Audio and Electroacoustics, vol. AU-20, 1972.
- (2) D. O. Brian, Anderson and E. I. Jury, "Stability test for two-dimensional recursive filters," IEEE Trans. Audio and Electroacoustics, vol. 21, no. 4, Aug. 1973.
- (3) R. E. Kalman and J. E. Bertman, "Control system analysis and design via the 2nd method of Liapunov," Journal of Basic Engineering.
- (4) J. L. Shanks, "2-dimensional recursive filters," SWIEE-CO, 1969.
- (5) M. G. Strintzis, "Test of stability of multidimensional filters," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-24, Aug. 1977.
- (6) R. A. DeCarlo, J. Murry and R. Saeks, "Multivariable nyquist theory," Int. J. Control, vol. 25, 1976.
- (7) R. P. Roesser, "A discrete state-space model for linear image processing," IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-20, no. 1, 1975.
- (8) L. R. Rabiner and B. Gold, "Theory and application of digital signal processing," Prentice-Hall, 1976.



최연욱(Yeon Wook CHOH) 正會員  
1955年 6月 7日生  
1974年 3月~1978年 2月: 漢陽大學校電子工學科卒業(工學士)  
1978年 3月~1980年 2月: 漢陽大學校大學院電子工學科卒業(工學碩士)

1978年 3月~1980年 2月: 漢陽大學校電子工學科助教



정우상(Woo Sang CHUNG) 正會員  
1951年 4月 23日生  
1969年 3月~1973年 2月: 漢陽大學校電子工學科卒業(工學士)  
1973年 3月~1976年 2月: 漢陽大學校大學院電子科卒業(工學碩士)

1978年: KAIST 研究員  
現在: 淸州大 助教



金廣基(Kyung Ki KIM) 正會員  
1931年 2月 9日生  
1973年: 서울大學校大學院修了(工學博士)  
現在: 漢陽大學校工科學電子工學科教授

# 부 록

ULIST

```

5  PRINT CHR$( 27); CHR$( 81); CHR$(
    (105)
10  PRINT "STABILITY TEST OF TWOD
    IMENSIONAL DIGITAL FILTER"
20  K = 1
30  PRINT
40  FOR D = - 1 TO 1 STEP .01
50  C = K * SQR (1 - D * D)
60  E = C / (C * C + D * D)
70  F = D / (C * C + D * D)
80  G = (C * C - D * D) / ((C * C -
    D * D) * (C * C - D * D) + 4
    * C * C * D * D)
90  H = 2 * C * D / ((C * C - D *
    D) * (C * C - D * D) + 4 * C
    * C * D * D)
100 W = .8 - 1.272 * E + .64 * G
110 X = 1.272 * F - .64 * H
120 Y = 1 - 1.635 * E + .82 * G
130 Z = 1.635 * F - .82 * H
140 A = (W * Y + X * Z) / (Y * Y +
    Z * Z)
150 B = (X * Y - W * Z) / (Y * Y +
    Z * Z)
160 S = SQR (A * A + B * B)
170 IF S < 1 THEN 250
180 PRINT "Z2= ";C;" +J(";D;")";
    TAB( 30);"Z1= ";A;" +J(";B;
    ")";
190 PRINT TAB( 27);"    STABLE
    ";N
200 GOTO 300
250 PRINT "Z2= ";C;" +J(";D;")";
    TAB( 30);"Z1= ";A;" +J(";B;
    ")";
260 PRINT TAB( 27);"    UNSTABLE
    ";N
300 PRINT
310 N = N + 1
320 NEXT D
330 IF K = - 1 THEN GOTO
340 K = - 1
350 GOTO 30

```