Robotics

(3)

會長 李 奉 珍

Servo 機構의 特性을 解析하고, 또는 원하는 特性을 갖도록 設計하려면 먼저 Servo 機構를 數學的으로 取扱하는 方法을 體得하여야 한다. 여기에 사용되는 手法으로 傳達函數(transfer function)와 block 線圖가 있다. 傳達函數는 servo 機構를 구성하는 要素(모우터와 增幅器등)에 대해서 그 入力과 出力과의 關係를 나타내는 것이며 block 線圖는 servo 機構의 구성요소에 의한 시스템的인 구성과 각 부 信號間의 關係를 표시한 것이다.

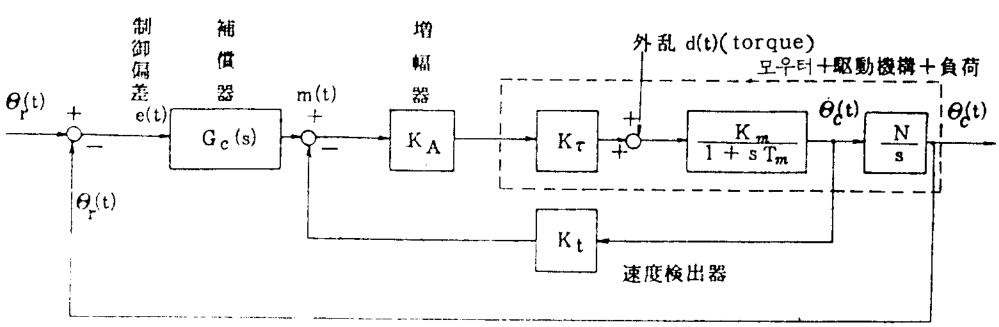
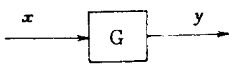


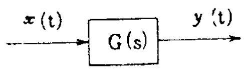
그림 5. Block diagram of Fig. 3 (a)

지난호에 連載된 그림 3(a)의 block 線圖를 解析하는데 편한 形, 즉, 傳達函數를 포함한 block 線圖로 바꾸면 그림 6과 같이 된다. 이 그림에서 사용된 각 부의 기호는 그림 6에 표시하는 것처럼 信號間의 関係를 표시하는 것으로서, 그중 그림(b)는 傳達函數라 불려지는 것이다. 여기에서 s는 $\frac{d}{dt}$(微分演算子)에 該當되며, 數學的으로는 Laplace 變換을 통해서 複素數로 取扱된다.



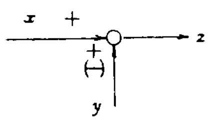
$y = G \cdot x$

(a) 信號의 傳達(傳達比)



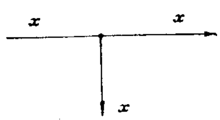
$y(t) = G(s)\,x(t)$
$s \triangleq d/dt$(微分演算子)

(b) 信號의 傳達(傳達関數)



$z = x \overset{+}{(-)} y$

(c) 信號의 加減算

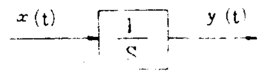


(d) 信號의 分岐

그림 6. Elements of block diagram

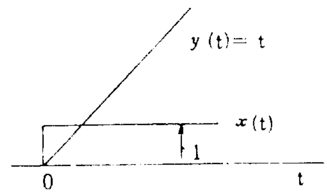
그리고, 그림 7에서 1/s은 dt(積分演算子)에 해당되는 積分要素(integration element)로써 積分을 행하는 機能을 표시한다.

그림(b)와 같이 높이 1의 스탭(step)모양의 入力을 가하면 出力(t)는 t가 된다. 이와 같은 것을 스탭應答(step response)이라고 한다.



(a) 積分要素

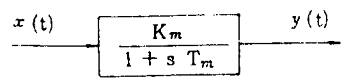
$y(t) = \int x(t)\,dt$



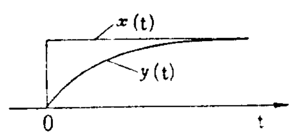
(b) step 應答

그림 7. Integrating elements

또 그림 8. (a)와 같이 $K_m/(1+sT_m)$과 같은 傳達函數로 표시되는 것을 一次遲延要素(First order lag elements)라고 한다. 이 一次遲延



(a) 一次延要素



(b) 스탭應答

$$y(t) = \frac{K_m}{1 + sT_m}\,x(t)$$

또는

$$y(t) + T_m \frac{d}{dt}\,y(t) = K_m\,x(t)$$

그림 8. First-order lag elements

要素의 스탭入力 $x(t)$에 대한 出力 $y(t)$ 関係는 그림과 같이 $y(t) = \dfrac{K_m}{1+sT_m}\,x(t)$ 또는 $y(t)+$

$Tm \frac{d}{dt} y(t) = Km\, x(t)$와 같이 線型 一次微分方程式으로 표시된다. 그리고 이 스텝應答은 그림(b)에서 표시하는 바와 같이 時間的遲延(Time lag)을 갖고 $x(t)$에 접근한다. 그 接近性向은,

$$y(t) = Km(1 - e^{-t/Tm}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

으로 표시된다.

이와같이 block 線圖를 사용하면 servo 機構의 여러 特性이 解明된다.

지금까지의 사항등을 理解하기 위하여 몇 가지 實例를 들어 보기로 한다.

(1) 比例要素

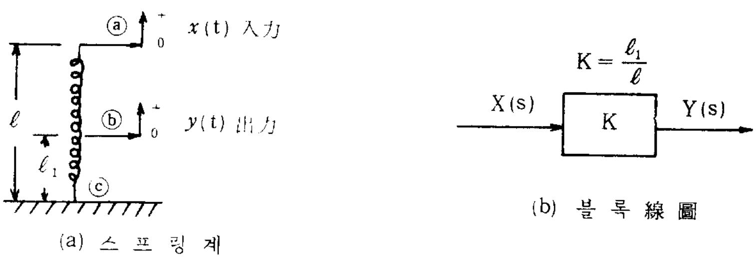


그림 9. 比例要素

그림에서 표시한 스프링계로 스프링 上端ⓐ의 變位 $x(t)$를 入力, 下端ⓒ에서 ℓ_1의 점ⓑ의 變位 $y(t)$를 出力, 스프링의 전체 길이를 ℓ로 하면 入力과 出力의 關係는 $x(t) : y(t) = \ell : \ell_1$이 成立되므로

$$y(t) = \frac{\ell_1}{\ell} x(t) = K\, x(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

여기서 $K = \frac{\ell_1}{\ell}$

이 比例關係의 傳達函數를 구하려면 Laplace變換을 하면 된다. 지금 $x(t)$, $y(t)$의 Laplace 變換을 $X(s)$, $Y(s)$로 하면 윗식은

$$Y(s) = K X(s) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

따라서 스프링계의 傳達函數 $G(s)$는

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

가 된다. 이와 같이 식(2)와 (3)의 關係는 傳達函數의 逆關係가 된다. 後述하는 事項의 理解를 돕기 위하여 Laplace 變換*을 簡單히 說明하여 보기로 한다.

*Laplace 變換(Laplace transformation)

〈定義〉

지금 $L \leqq 0$으로 定義되어 있는 時間函數 $f(t)$를 생각하고 어느 正의 定數 α에 대해서

$$|f(t)| \leqq ke^{\alpha t}$$

가 성립된다고 하면 다음의 積分

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

는 複素數 s의 實數部가 α보다 큰 모든 複素數에 대해서 絶對收斂(absolute convergence)이 된다. 이 $F(s)$를 $f(t)$의 Laplace 變換이라고 한다. 이 定義 領域은 그 特異點을 제외하고 s의 全平面에 해석 접속할 수 있다. 윗식은 또

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

으로도 쓸 수 있다.

• Laplace 逆變換은 다음과 같이 定義되며, $F(s)$를 $f(t)$로 變換할 수 있다.

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{b-jw}^{b+jw} F(s) e^{ts} ds \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

여기에서 b는 正의 定數, j는 $\sqrt{-1}$ 이다.

그럼, 問題의 $f(t)$에 대하여 定義式으로부터 $F(s)$를 구해 보기로 하자.

(1) 定義式에 $f(t) = e^{-\alpha t}$를 代入하면,

$$L[e^{-\alpha t}] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-st} dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-(\alpha+s)t} dt$$
$$= \left[-\frac{1}{s+\alpha} e^{-(s+\alpha)t}\right]_0^\infty$$
$$= \frac{1}{s+\alpha} \quad \cdots\cdots (8)$$

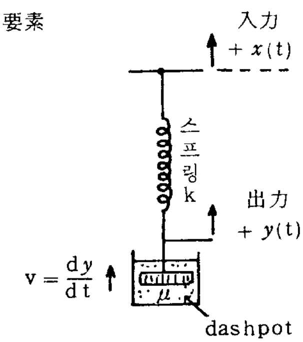
이 된다. 윗식에 특히, $\alpha = 0$으로 놓으면

$$L[1] = \frac{1}{s} \quad \cdots\cdots (9)$$

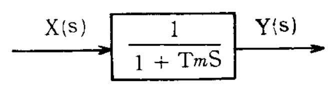
이 되므로, $f(t) = 1$의 Laplace 變換은 $1/s$임을 알 수 있다.

$f(t)$와 $F(s)$의 關係는 일일이 계산하는 것 보다 상세한 Laplace 變換表를 利用하는 것이 간편하다.

(2) 一次遅延要素



(a) spring-dash system



(b) 블록線圖

그림10. 一次遅延要素

그림 10에 표시한 것과 같이 코일 스프링의 下端에 대쉬포트(dashpot)를 설치한 계에 있어서 入力 = $x(t)$ (스프링 上端 上向의 移動量), 出力 = $y(t)$ (스프링 下端 上向의 移動量), k (스프링), 定數 μ (dashpot의 粘性抵抗係數)라고 하면

스프링의 伸長 ≒ $(x - y)$

스프링의 伸長에 의한 張力 ≒ $(x-y)k$

dashpot 안의 피스턴 속도 ≒ $v = \frac{dy}{dt}$

dashpot의 抵抗力 $\mu v = \mu\frac{dy}{dt}$

上向의 힘이 dashpot의 抵抗力에 평형(平衡)되는 식은,

$$k(x-y) = \mu\frac{dy}{dt}$$

즉 $\frac{\mu}{k}\frac{dy}{dt} + y = x$

가 된다.

여기에서 $\frac{\mu}{k} = Tm$ 로 하면 윗식은

$$Tm\frac{dy}{dt} + y = x \quad \cdots\cdots (10)$$

이며,

식 (10)에서 入力 x가 스텝入力 Km (一定)이라고 하면,

$$Tm\frac{dy}{dt} + y = Km \quad \cdots\cdots (11)$$

과 같이 1階微分方程式이 된다. 이 微分方程式의 初期條件으로서 $y(0) = 0$, 이것을 $y_0 = 0$이라 쓰기로 하고, 이 문제를 微分方程式의 解法에 따라 풀어보면, 식 (11)은 變數分離型이므로

$$\frac{dy}{Km - y} = \frac{dt}{Tm}$$

가 된다. 兩邊을 각각 積分하여 積分定數를 C라 하면

$$-\log(Km - y) = \frac{t}{Tm} + C$$

가 된다. 따라서 一般解는

$$y(t) = Km\left(1 - C' e^{-\frac{t}{Tm}}\right)$$

가 된다. 여기에서 初期條件 t = 0 일때 $y_0 = 0$ 이므로 $C' = 1$ 이 되어서 주어진 條件을 만족하는 特解는

$$y(t) = Km\left(1 - e^{-\frac{t}{Tm}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

를 얻는다.

한편, 이 계의 해를 Laplace 變換을 써서 구하여 보기로 한다. 식 (10)의 각 항을 t의 函數로 해서 Laplace 變換을 하면

$$Tm\, Y(s) + Y(s) = X(s)$$

고로 傳達函數 G(s)는

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + TmS}$$

이 된다. 여기에서 入力 X(s)는 스텝入力 Km 이므로 $\frac{Km}{s}$ 이 된다.

따라서 出力 Y(s)는

$$Y(s) = \frac{Km}{s(1 + TmS)}$$

이고, 이 Laplace變換 Y(s)의 逆 Laplace變換數를 구하기 위하여 윗식을 部分分數로 分解하면

$$Y(s) = Km\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/Tm}\right)$$

이것은 앞에서의 식(8)과 (9)의 결과를 이용하면 Y(s)의 逆 Laplace 變換인 $y(t)$는 쉽게 구하여져서

$$y(t) = Km\left(1 - e^{-\frac{t}{Tm}}\right)$$

를 얻는다.

參考文獻

1) 李奉珍著 : 數値制御
2) 李奉珍著 : 自動制御의 基礎
3) 近藤次郎著 : 演算子法