

對稱断面 円環部品の 平面振動에 관한 研究

(A Study on the Flexural Vibrations for the Ring with Symmetrical Cross Section)

金光植* · 金康年**

K. S. Kim · K. N. Kim

Asbtract

Various automotive and machine parts are having the shape of circular ring and the study and the verification of its dynamic characteristics can be the important basis of quality control and improvement of performance of inner and outer race of ball and roller radial bearing, ring gear, seal, etc.

In this study, three separate sets of governing equations on the flexural vibration of circular ring were formulated each considering the effects of viscous damping, rotatory inertia and shear deformation, and three frequency formulas were derived.

Numerical values of frequencies of circular and rectangular cross section ring were tabulated and compared with experimental value. Some important parameters were found in the ring vibration characteristics.

記号説明

Nomenclature

- a : Thickness of ring in rectangular cross section
 A : Area of ring cross section
 b : Width of ring in rectangular cross section ring
 c : Damping coefficient
 C_{cr} : Critical damping coefficient
 E : Modulus of elasticity of ring material
 f : Frequency of ring vibration
 G : Modulus of shear of ring material

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- g : Gravitational acceleration
 I : Area moment of inertia of cross section of ring about the normal axis to the plane of vibration
 J : Mass moment of inertia of ring about the normal axis to the plane of vibration
 K : Radius of gyration of ring cross sectional area moment of inertia
 k' : Form factor of ring cross section
 M : Moment of force
 m : Mass of the ring per unit length
 $m = \rho A / g$
 N : Shear force
 n : Number of nodes in a circumference of

* 漢陽大學校 工科學 精密機械工學科 教授

** 漢陽大學校 大學院 機械工學科 講師

a ring

R : Radius of underformed center line of circular ring

T : Normal force acting at ring cross section

t : Time

u : Radial displacement of ring element

w : Tangential displacement of ring element

β : Angular deformation due to shear

θ : Angular coordinate

ϕ : Slope of deflection curve due to moment

ψ : Total angular rotation of ring elements

$$\psi = \phi + \beta$$

ρ : Density of ring material

ξ : Damping ratio

ν : Poisson's ratio

ω : Natural circular frequency of ring

ω_c : Natural circular frequency of ring by classical theory expressed by A. E. H. Love

$$\omega_c = \sqrt{\frac{EI n^2 (n^2 - 1)^2}{mR^4 (n^2 + 1)}}$$

1. 序 論

円環の振動에 관한 研究는 19世紀末頃부터 主로 英國의 學者들에 의하여 시작되었으며, 特히 R. Hoppe, H. Lamb 등의 研究가 두드러진 것으로 여러 문헌에 記錄되어 있다. 그후 A. E. H. Love⁽¹⁾, S. T. Timoshenko⁽²⁾, W. Kuhl⁽³⁾ 등에 의하여 계속 연구되어 왔으며 最近에는 B. S. Seidel과 Erdelyi⁽⁴⁾, S. S. Rao⁽⁵⁾, L. Phillipson⁽⁶⁾, R. R. Archer⁽⁷⁾, 金光植⁽⁸⁾, J. Kirkhope⁽⁹⁾, J. W. Lincoln과 E. Volterra⁽¹⁰⁾ 등에 의하여 연구되어 왔으며 아직도 研究가 계속되고 있는 分野이다. 特히 上記한 研究中 W. Kuhl과 Lincoln과 Volterra의 研究는 精密한 실험결과로서 有名하며 그 신빙성을 余他の 研究者들이 모두 引用하는 바이다. 그러나 소위 古典理論이라고 알려져 있는 A. E. H. Love의 理論과는 상당한 差異가 있어서 그간의 研究는 모두 그 차이점을 규명하는 途에 집중되어 왔던 것이다.

그리고 그러한 研究의 大部分이 各各의 正當性을 강조하고 있음에도 不拘하고 아직도 相當한 論議가 提起되고 있음은 円環의 問題가 아직도 완전히 解明되었다고 볼 수 없음을 말해주고 있다.

2. 理論 및 解析

2.1. 粘性減衰만을 고려한 理論

本解析에서는 回轉관성과 전단變形效果를 無視하고 감쇠효과만을 고려한 理論모델을 構想하여 Love의 古典理論과 비교하기로 하였다. Fig. 1에서 円環은 일정한 대칭斷面을 가지고 그 円環面內에서 굽힘진동(Flexural Vibration)을 한다고 가정하면,

반경방향의 운동방정식은

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial N}{\partial \theta} + T \right) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial u}{\partial t} \dots\dots\dots (1)$$

원주방향의 운동방정식은

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} - N \right) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial w}{\partial t} \dots\dots\dots (2)$$

굽힘 Moment의 平衡式은

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} + NR = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{한편 } M = \frac{EI}{R} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) \right) \dots\dots\dots (4)$$

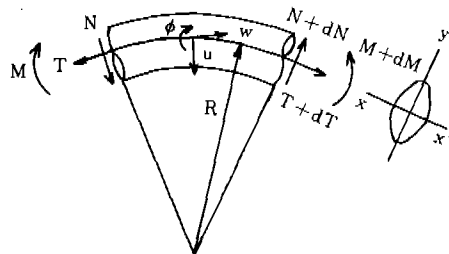


Fig. 1. Ring element

中心線의 伸張이 없다고 하면

$$u = \frac{\partial w}{\partial \theta} \dots\dots\dots(5)$$

위의 5個式을 연립하여 w에 관한 式을 구성하면,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(w - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{R^4}{EI} \frac{\partial}{\partial t} \left(C_1 w - C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \dots\dots\dots(6)$$

이 되며 이 式이 운동방정식이 된다.

이때 점성계수 C_1 과 C_2 를 같이보고 C 로 놓으면 점성감쇠에 의한 項은 $\frac{CR^4}{EI} \frac{\partial}{\partial t} \left(w - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$

가 되고 이 項이 古典방정식과 다른 項이 된다.

Byerly의 방법에 의해 自由振動의 解를

$w = w_0 e^{i\omega t + i n \theta}$ 의 꼴로 놓으면

$$\omega = -\frac{c}{2m} \pm i \sqrt{\frac{EI n^4 (n^2 - 1)^2}{mR^4 (n^2 + 1)} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \dots\dots\dots(7)$$

Love의 古典理論에 의한 원진동수 ω_c 가

$$\sqrt{\frac{EI n^4 (n^2 - 1)^2}{mR^4 (n^2 + 1)}}$$

임에 유의하면 진동수 f 는

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_c^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \dots\dots\dots(8)$$

이 되며 이 式은 古典理論에 對比한 점성 감쇠의 효과를 가장 分明히 나타내고 있다. 이때 진폭의 감쇠는 당연히 $e^{-\frac{c}{2m}t}$ 에 따른다. 따라서 감쇠의 영향은 $\frac{C}{2m}$ 에 左右되며 $C = \xi C_{critical}$ 로 정의하면 $C_{cr} = \frac{2n(n^2 - 1)}{R^2} \sqrt{\frac{EI}{1 + n^2}}$ 이 되며 ξ 의 값은 재료의 物性에 屬하는 값으로서 鋼鐵의 경우 0.0006~0.03까지의 값을 갖는다. 最大值인 0.03을 擇한다고 하여도 $n = 2$ 일때 1% 정도의 진동수 감소만을 수반함을 알 수 있다. 한편 고차진동의 경우는 絶對진동수 감소는 증가하

나 상대적인 진동율은 감소한다.

2.2. 回轉관성만을 고려한 理論

Fig. 1에서 円環의 굽힘 moment의 平衡式 대신에 回轉運轉式을 적용하면 다음과 같은 5個의 式이 얻어진다. 여기서는 점성감쇠와 전단변형은 고려하지 아니하였다.

반경방향의 운동방정식은

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial N}{\partial \theta} + T \right) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots\dots(9)$$

접선 방향의 운동방정식은

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} - N \right) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots\dots\dots(10)$$

回轉운동 방정식은

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} + NR = J \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \dots\dots\dots(11)$$

$$M = \frac{EI}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{W}{R} \right) \dots\dots\dots(12)$$

$$u = \frac{\partial w}{\partial \theta} \dots\dots\dots(13)$$

$$\phi = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \dots\dots\dots(14)$$

(9)로 부터 (14)까지의 式을 연립하면

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \frac{JR}{EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + w \right) - \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \dots\dots\dots(15)$$

(15)式的 解는

$w = w_0 e^{i(\omega t + n\theta)}$ 의 형태로 가정하면

$$\omega = \sqrt{\frac{EI n^4 (n^2 - 1)^2}{mR^4 (n^2 + 1) + JR (n^2 - 1)^2}} \dots\dots\dots(16)$$

이 되며 다시 古典理論의 $\omega_c = \sqrt{\frac{EI n^4 (n^2 - 1)^2}{mR^4 (n^2 + 1)}}$ 의 관계를 사용하면 진동수 f 는 다음과 같다.

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_c \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{J(n^2 - 1)^2}{mR^3 (n^2 + 1)}\right)}} \dots\dots\dots(17)$$

(10)식의 JR(n²-1)²項이 回轉관성에 의한 追加項이 되며 n의 4次項을 포함하는만큼 高次 n에서 더욱 큰 효과가 있음을 알 수 있다. 한편 질량관성 moment J = ρIR/g, I = ∫r²dA 임에 의하여 円環의 幅과 半徑의 比 및 R³에 직접 관련이 있음을 알 수 있다.

즉, 두꺼운 円環의 경우 回轉관성에 의한 감소효과가 크다. 또한 回轉 관성의 효과를 고려할 때는 半徑 R 자체가 중요한 parameter 임을 알 수 있다.

여기서 k는 円環 단면의 回轉半徑이다. 즉, 같은 반경과 같은 단면적의 円環이라 해도 (K/R)가 큰 경우 진동수는 상당히 감소됨을 알 수 있다.

2-3 剪断变形에 의한 효과만을 고려한 理論

그림 1에서 굽힘 모멘트에 의한 回轉角 ϕ에 전단변형에 의한 回轉角 β를 追加하면 全回轉角은 ψ = ϕ + β가 되며 ψ = 1/R (∂u/∂θ + w)이다. 따라서 운동방정식은 다음과 같다. 점성감쇠 및 回轉관성은 무시하였다.

半徑方向의 운동방정식은

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial N}{\partial \theta} + T \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots\dots (18)$$

접선 方向의 운동방정식은

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} - N \right) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots\dots\dots (19)$$

회轉관성은 무시하였으므로 모멘트식은

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} + NR = 0$$

모멘트의 크기는

$$M = \frac{EI}{R} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (20)$$

전단력과 전단변형간의 관계는

$$N = k' \beta AG \dots\dots\dots (21)$$

한편 β = ψ - ϕ이고

$$\psi = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) \text{이다} \dots\dots\dots (23)$$

중심선의 伸張은 없으므로

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = u \text{ 이다.} \dots\dots\dots (24)$$

(19)~(24)까지의 式을 연립하면

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \\ &= - \frac{mR^3}{k'AG} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &+ \frac{mR^3}{k'AG} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots\dots (25) \end{aligned}$$

W = W₀e^{i(ωt + nθ)} 의 형태로 가정하면

$$\omega = \sqrt{\frac{EI n^2 (n^2 - 1)^2}{mR^4 (n^2 + 1) + mR^2 \cdot \frac{EI}{k'AG} \cdot n^2 (n^2 + 1)}} \dots\dots\dots (26)$$

이 되고 ω_c를 使用 정리하면

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \omega_c \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{EI}{k'AG} \cdot n^2}} \dots\dots\dots (27)$$

가 되며 전단력에 의한 진동수 감쇠의 分明한 관계가 나타나 있다. (27)식에 의하면 전단력에 의한 진동수 감소는 1/R², 1/K', EI/AG에 모두 비례하며 n²에 따라 비례함을 알 수 있다.

여기서도 K는 回轉반경, K'는 형상계수(form factor)로서 전단 계수와는 區分되어야 한다. Timoshenko⁽¹¹⁾는 円形 斷面의 경우 10/9, 矩形 단면의 경우 6/5으로 보고 있으나 아직도 새로운 研究가 계속되고 있다.⁽¹²⁾

(30)식은 f를 계산하는 대단히 간단한 式이 될 수 있으며 수치계산 및 실험과의 검토결과 가장 工學的 實用價値가 있는 것으로 판단된다. (30)식을 검토하여 보면, (K/R)²에 비례하여 진동수가 감소하며 이는 回轉관성의 效果와도 유사하다. 기존의 研究가 大部分 (b/R) 즉 ring의 두께와 半徑比를 重視하여 thick ring 또는 thin ring으로 區分(Timoshenko에 의하면 b/R = 10 이상을 얇은

ring으로 정하였음) 하였으나 이 보다는 $(\frac{k}{R})$ 가 중요한 媒介變數임을 알 수 있다.

즉, 단면의 $x-x'$ 軸으로부터의 배치가 중요함을 의미한다. 한편 $(\frac{1}{k})$ 의 의미는 단면적의 $x-x'$ 軸만이 아니라 $y-y'$ 軸에 관한 배치관계 및 형상에 따라 달라짐을 나타내고 있다. 즉, 전단력에 의한 진동수 감소는 단면의 전단응력 分布 상태에 따라 달라짐을 나타내고 있다.

또한 n^2 에 比例함은 고차진동형에서의 감소가 더욱 큼을 말하고 있다.

3. 數值계산 및 실험과의 비교검토

수치계산은 Apple-II Personal computer를 썼으며 case 1은 $\xi=0.03$ 의 점성감쇠만을 고려한 경우의 진동수이며 case 2는 回轉관성만을 고

Table 1. In-plane vibration frequencies of circular cross section ring
 $\epsilon=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.29$, $\rho=7.8 \text{ g/cm}^3$, $G=0.82 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$,
 $k' = \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1, \frac{10}{9}$, Radius = 12.7 cm, Cross section radius = 2.54 cm.

Nodal Diameter n	Classic Theory w_c	Case 1 $\zeta=0.03$	Case 2 Rotary Inertia	Case 3 Shear Effect				Experiment W. Kuhl (3)
				$K'=7/9$	$K'=8/9$	$K'=1$	$K'=10/9$	
2	1.728	1.710	1.720	1.685	1.704	1.706	1.708	1.666
3	4.887	4.863	4.864	4.450	4.633	4.659	4.680	4.387
4	9.370	9.315	9.325	7.747	8.370	8.465	8.544	7.739
5	15.153	15.060	15.075	11.224	12.584	12.806	12.993	11.459
6	22.229	22.095	22.105	14.705	17.033	17.437	17.783	15.402
7	30.596	30.433	30.410	18.122	21.568	22.196	22.741	19.463
8	40.252	40.090	39.983	21.458	26.103	26.985	27.760	23.576
9	51.196	51.040	50.821	24.718	30.597	31.750	32.774	27.708
10	63.429	63.200	62.917	27.913	35.034	36.469	37.754	31.822
11	76.949	76.702	76.266	31.054	39.411	41.130	42.683	35.908

Table 2. In-plane vibration frequencies of rectangular cross section ring
 $\epsilon=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.29$, $\rho=7.8 \text{ g/cm}^3$, $G=0.82 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$,
 $k' = \frac{6}{5}, 1, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{1}{2}$ Radius = 36.303mm, thickness = 4mm, width = 17.394mm

Nodal Diameter n	Classic Theory w_c	Case 1 $\zeta=0.03$	Case 2 Rotary Inertia	Case 3 Shear Effect						Experiment (10)
				$K'=6/5$	$K'=1$	$K'=5/6$	$K'=2/3$	$K'=7/12$	$K'=1/2$	
2	8.371	8.287	8.184	8.212	8.179	8.142	8.087	8.049	7.999	7.635
3	23.676	23.628	22.223	22.020	21.703	21.365	20.886	20.563	20.154	19.036
4	45.396	45.259	40.326	39.056	37.995	36.906	35.434	34.488	33.330	32.150
5	73.415	73.121	61.185	57.609	55.338	53.093	50.185	48.383	46.247	46.050
6	107.699	107.160	83.801	76.635	72.817	69.160	64.579	61.820	58.623	60.400
7	148.234	147.344	107.467	95.604	90.045	84.850	78.508	74.770	70.507	74.200
8	195.014	193.804	131.706	114.299	106.907	100.132	92.019	87.312	82.006	88.000

러한 경우, case 3은 전단효과만 고려한 경우이다. Case 3의 경우는 円形斷面의 경우(Table 1) $k' = \frac{8}{9}, 1, \frac{10}{9}, \frac{7}{9}$ 의 네 가지를 조사하였으며, 실험은 W. Kuhl⁽¹⁾과 J. W. Lincoln과 Volterra⁽¹⁰⁾의 Data와 비교하였다. 矩形斷면의 경우는 $k' = \frac{6}{5}, 1, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{1}{2}$ 까지 6가지를 계산하였으며 이를 Love의 고전이론치와 實驗値와 비교할 수 있도록 하였다.

상기한 Table 1과 Table 2에서 볼때 원형斷면의 円環의 경우 $n > 5$ 일때 $k' = \frac{8}{9}$ 과 $\frac{7}{9}$ 사이에서 실험치가 놓임을 알 수 있으며 $n < 5$ 일때는 k' 가 $\frac{7}{9}$ 보다 약간 작을 경우에 맞는 범위가 된다고 보겠다. 또한 矩形斷면의 경우는 저차진동에서는 $k' = \frac{1}{2}$, 고차진동의 경우 $k' = \frac{7}{12}$ 정도에서 실험치와 매우 가까움을 알 수 있다. Timoshenko의 k' 의 값은 直線보의 이론에서 유도된 값임에 비추어 円環과 같은 큰 폭을의 斷면의 k' 의 값에 대한 研究가 必要하다고 판단된다.

4. 結 論

円環에 있어서 점성감쇠, 회전감쇠 및 전단變形的의 효과가 고유진동수에 미치는 영향을 고전理論에 대비해서 연구한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 점성감쇠의 효과는 재료의 감쇠비 ζ 의 영향을 받게되나 鋼鐵재료의 경우는 이값이 0.0006~0.03 정도이기 때문에 기본진동형에 미치는 영향은 1% 정도이어서 工學的으로 큰 고려대상이 되지 않는다.
- (2) 회전관성의 경우는 円形斷面에서 $n=6$ 정도까지는 점성감쇠 보다도 적은 영향을 미치나 $n > 7$ 에서는 약간 큰 영향을 주는 정도로 미미한 영향을 준다. 그러나 矩形斷면의 경우는 점성감쇠와는 비교도 되지 않을만큼 큰 진동수 감소를 보이는바 특히 고차진동에서는 더욱 큰 영향을 주고 있다.

이러한 원형斷면과 矩形 斷면에서의 差異는 $(\frac{K}{R})$ 의 값에 의한 것으로 판명되었다.

- (3) 전단變形的의 효과는 거의 모든 진동형에서 대단히 큰 진동수 감소효과를 보이며 그 크기는

$(\frac{K}{R})$ 와 K' 의 두 매개변수에 좌우된다.

$\frac{K}{R}$ 와 K' 의 값은 모두 단면의 크기와, 형상에 속하는 변수로서 진동설계에 중요한 매개변수임을 알 수 있다. 또한 (27)式은 적절한 K' 값의 선택으로 工學的 진동수 계산에 使用할 수 있다.

결론적으로 감쇠는 재료의 물성인 감쇠비 ζ 의 값에 따르나 機械設計적인 要因으로는 $(\frac{K}{R})$ 와 K' 의 값이 매우 중요한 변수임이 밝혀졌다.

參 考 文 獻

1. A. E. H. Love; "A Treatise of Mathematical Theory of Elasticity", Dover Publications (1947)
2. S. Timoshenko; "Vibration Problems in Engineering", 4th Ed, John Wiley & Sons (1974)
3. W. Kuhl; "Messungen zu Den Theorien der Eigen-Schwingungen von Kreisringen Beliebiger Wandstarke", Akustische Zeitschrift, Vol. 7, pp. 10~151 (1942)
4. B. S. Seidel and E. A. Erdelyi; "On the Vibrations of a Thick Ring in Its Own Plane" Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, vol. 86, pp. 240~244 (1964)
5. S. S. Rao and V. Sundararajan; "In-Plane Flexural Vibrations of Circular Rings", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, vol. 91, pp. 620~625 (1969)
6. L. L. Philipson; "On the Role of Extension in the Flexural Vibration of Rings", Journal of Applied Mechanics", Trans. ASME, vol. 23, pp. 364~366 (1956)
7. R. R. Archer; "Small Vibrations of Thin Incomplete Circular Rings," Int. Journal of Mechanical Science, vol. I, pp. 43~56 (1969)
8. 金光植; "대칭 축 단면을 가진 원환의 고차 굽힘진동형에 관한 연구," 대한기계학회지, 제13권 4호, pp. 311~318 (1973)
9. J. Kirkhope; In-plane Vibration of a Thick Circular Ring," Journal of Sound & Vib-

- ration, vol. 50, No. 2, pp. 219~227 (1977)
10. J. W. Lincoln and E. Volterra; "Experimental and Theoretical Determination of Frequencies of Elastic Toroids," *Experimental Mechanics*, vol. 24, pp. 211~217.
 11. S. Timoshenko, J. M. Gere; "Mechanics of Materials" Litton Educational Publishing, Inc. (1972)
 12. G. R. Cowper; "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 33, pp. 335~338 (1966)