

균열이 있는 보의 굽힘진동수 계산에 관한 연구

문 덕 홍*

On Calculation of Bending Frequency of a Beam with a Crack

Duk-Hong MOON*

To calculate the bending frequency of a beam with a crack, the author has developed the computer program. With a simple example, numerical calculations and experiments were carried out. The results were as follows.

- 1) As the values of experiments have comparatively agreed with those of calculations, it was proved that the computer program could be applied to a beam with a crack.
- 2) In the case that the shape of crack is narrow and deep at the fixed edges, the value of experiment may not considerably correspond with that of calculation.
- 3) If the bending frequency was varied a few % due to a crack, it was turned out that the beam might be fatal on strength.

서 론

단면이 균일한 보의 고유진동해석에 관해서는 고전적인 이론해석이 가능하고^{1,2)}, 단면이 불균일 하든지 임의의 위치에 집중질량이 있든지 할 경우에는 유한요소법 및 전달매트릭스 등의 방법을 사용해서 전자계산기로 근사적인 계산을 하고 있다^{3,4,5)}.

구조해석분야의 일부에서 균열을 갖는 보의 굽힘진동수해석⁶⁾에 관한 보고가 있으나, 미소균열이 있는 보에 전달매트릭스법을 적용해서 해석한 보고는 찾아보기 힘들다.

본 논문에서는 전달매트릭스법을 써서, 미소균열이 있는 보의 굽힘진동수를 계산하는 전산프로그램을 개발하고, 실험체에 적용해서 계산한 결과치와 실험치를 비교 검토하고, 균열이 굽힘진동수에 미치는 영향 등을 고찰하고자 한다.

이 론

1. 전달매트릭스⁵⁾

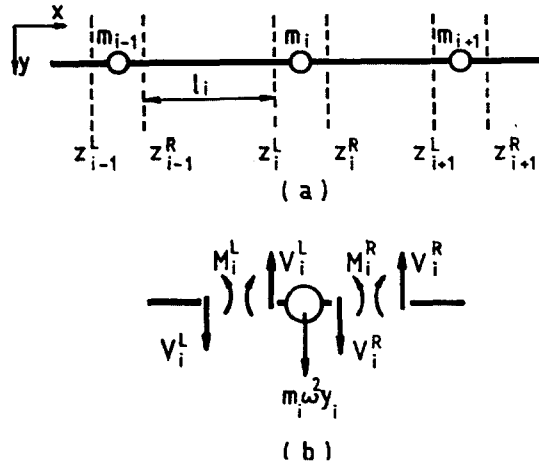


Fig. 1. Beam with concentrated masses.

보를 Fig. 1(a)와 같이 질량을 몇개의 절점에 집중시키면, 절점간에는 질량은 없고 굽힘강성만 있는 것으로 간주할 수 있고, 이 경우 i 와 $i-1$ 절점간의 요소에서 상태벡터들 사이의 관계는 다음 식 (1)과 같다.

* 釜山水産大學 : National Fisheries University of Pusan

$$\begin{pmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{pmatrix}_i^L = \begin{pmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{pmatrix}_{i-1}^R \quad \dots(1)$$

여기서, y_i , θ_i , M_i , V_i 는 각각 처짐, 처짐각, 굽힘모멘트 및 전단력을 나타내며, l , E , J 는 요소의 길이, 종탄성계수 및 단면 2차모멘트를 나타내고, 첨자 L , R 은 절점의 좌우상태를 나타낸다.

Fig.1(b)의 절점 i 에서 좌우의 상태벡터사이에는 연속조건에 의해 식(2)가 성립하고, 진동하고 있는 질량에 의한 관성력때문에 식(3)과 같은 불연속조건이 생긴다.

$$\left. \begin{aligned} y_i^R &= y_i^L \\ \theta_i^R &= \theta_i^L \\ M_i^R &= M_i^L \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

$$V_i^L - m_i \omega^2 y_i \dots\dots\dots(3)$$

식(2), (3)을 매트릭스로 표시하면, 식(4)와 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{pmatrix}_i^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ \theta \\ M \\ V \end{pmatrix}_i^L \quad \dots\dots\dots(4)$$

수치계산을 간략화하기위해 식(1)을 무차원화 시키면,

$$\begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{\theta} \\ \bar{M} \\ \bar{V} \end{pmatrix}_i^L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{\theta} \\ \bar{M} \\ \bar{V} \end{pmatrix}_{i-1}^R \quad \dots\dots\dots(5)$$

로 되고, 여기서, $\bar{y}=y/l$, $\bar{\theta}=\theta$, $\bar{M}=lM/EJ$, $\bar{V}=l^2V/EJ$ 이다.

각 요소의 길이 l 가 등분할이 아니고, 굽힘강성 EJ 가 같지 않은 경우 즉, 길이 βl , 굽힘강성 αEJ 인 경우는,

$$\begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{\theta} \\ \bar{M} \\ \bar{V} \end{pmatrix}_i^L = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \frac{\beta^2}{2\alpha} & \frac{\beta^3}{6\alpha} \\ 0 & 1 & \frac{\beta}{\alpha} & \frac{\beta^2}{2\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{\theta} \\ \bar{M} \\ \bar{V} \end{pmatrix}_{i-1}^R \quad \dots\dots\dots(6)$$

로 되고, 식(6)을 간단히 표시하면,

$$Z_i^L = F_i Z_{i-1}^R \quad \dots\dots\dots(7)$$

로 된다.

그리고 식(4)를 무차원화 시키면,

$$\begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{\theta} \\ \bar{M} \\ \bar{V} \end{pmatrix}_i^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\omega^2 m_i l^3}{EJ} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{\theta} \\ \bar{M} \\ \bar{V} \end{pmatrix}_i^L \quad \dots\dots\dots(8)$$

로 되고, 여기서, $\bar{V}_i^R = \bar{V}_i^L - \frac{\omega^2 m_i l^3}{EJ} \cdot \frac{y_i}{l}$ 이고, 간단히 하면,

$$Z_i^R = P_i Z_i^L \quad \dots\dots\dots(9)$$

로 된다.

고로 1개의 요소에 대한 상태벡터사이의 관계는 식(7), (9)에 의해 식(10)과 같이 된다.

$$Z_i^R = P_i F_i Z_{i-1}^R = T_i Z_{i-1}^R \quad \dots\dots\dots(10)$$

식(10)에서 T_i 는 i 와 $i-1$ 절점사이의 전달매트릭스를 나타낸다.

식(10)을 n 개의 요소인 경우로 확장하면,

$$Z_n^R = T_n T_{n-1} \dots T_2 T_1 Z_0^R \quad \dots\dots\dots(11)$$

로 나타낼 수 있다.

2. 전달매트릭스의 해법

식(11)에 의해서 굽힘진동수는 ω 의 초기시행값을 주고 4행4열의 전달매트릭스 $T_i (i=1 \dots n)$ 를 n 회 곱해서 양단의 경계조건에 의해 구할 수 있는데, 계산 회수와 시간을 절약하기 위해 다음과 같은 조작을 한다.

먼저 외팔보에 대해 적용해 보면, 4행4열의 전달매트릭스 T_1 에 4행4열의 단위매트릭스를 곱하고 정단의 경계조건이 $\bar{y}_0 = \bar{\theta}_0 = 0$ 이므로, 단위매트릭스에서 미리 1열과 2열을 제거해서 4행2열의 매트릭스만을 곱한다. 결과치를 $T_2, T_3, \dots T_n$ 까지 연산해 나가고, 자유단의 경계조건이 $M_n = V_n = 0$ 이므로 최종적으로 식(12)와 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \\ u_{33} & u_{34} \\ u_{43} & u_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{M} \\ \bar{V} \end{pmatrix}_0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

식(12)에서,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{33} & u_{43} \\ u_{34} & u_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{M} \\ \bar{V} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(13)$$

로 되며, 여기서 다음 조건이 성립한다.

$$\begin{vmatrix} u_{33} & u_{34} \\ u_{43} & u_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

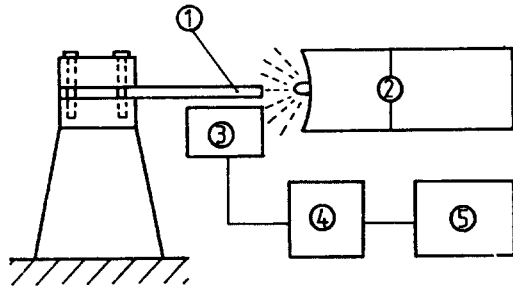
식(14)는 ω 에 대한 진동수방정식을 만들어주고, 위

의 초기시행값으로 행렬식의 값이 영이 되지 않으면, ω 를 증분시켜 상기의 과정을 반복시키고, 식 (14)의 행렬식의 값을 신속하게 영으로 수렴시키기 위해 이전의 ω 에 대한 행렬식의 값과 증분된 ω 의 행렬식의 값을 비교해서, 그 사이에 근이 존재하면, 선형내삽법으로 근을 구한다.

또한, 양단고정($\bar{y}_0 = \bar{\theta}_0 = 0, \bar{y}_n = \bar{\theta}_n = 0$), 일단고정타단지지($\bar{y}_0 = \bar{\theta}_0 = 0, \bar{y}_n = \bar{M}_n = 0$) 및 단순지지상태($\bar{y}_0 = \bar{M}_0 = 0, \bar{y}_n = \bar{M}_n = 0$)에서도 마찬가지로 경계조건들을 적용하여 진동수를 구한다.

실험 및 수치계산

Fig. 2는 실험장치의 개략도를 나타내고 있으며, 실험은 Fig. 3에 나타낸 바와 같은 외팔보에 대해서 시험편의 균열의 폭 t 가 0.36mm, 5.0mm인 경우, 각각에 대하여 균열의 위치 l_1 을 0mm, 50mm, 100mm, 150mm로 변화시키고, 또 그 각각의 위치에서 균열의 깊이 H 가 4mm, 8mm, 12mm로 변화한 경우들에 대해서 행했다.



① test piece ② stroboscope ③ electromagnet
④ amp. ⑤ function generator
Fig. 2. Block diagram of experimental apparatus.

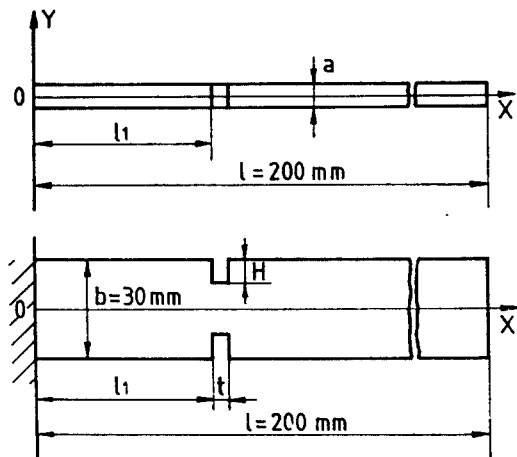


Fig. 3. Test piece.

실험방법은 시험편의 끝단과 전자석의 윗면과를 평행하게 고정시키고, F.G.에서 발생시킨 정현파를 Amp.에서 증폭시켜 전자석에 의해 흡인 가진시켰다. 이때 F.G.에 부착된 진동수다이얼로 시험편의 공진 진폭을 찾고, 그 위치에 고정된 다음 Stroboscope로 진동수를 측정했다.

수치계산은 전달매트릭스법을 적용해서 만든 전산 프로그램을 사용해서, 상기의 실험의 각 경우들에 대해서 행했다. 또한 Fig. 3의 양단의 경계조건들을 바꾼 양단고정보, 일단고정타단지지보, 단순지지보 등에 대해서도 균열의 폭, 위치 및 깊이를 변화시켜 계산했다. 이때 시험편의 두께 $a=1.50\text{mm}$, 비중량 r 는 실측해서 얻은 $r=7.43 \times 10^{-6} \text{kg/mm}^2$ 를 사용했고, 종탄성계수 E 값은 균열이 없는 시험편(SK6)을 Fig. 2의 실험장치에서 고유진동수를 실측하고, 외팔보의 엄밀해를 산출하는 식²⁾으로 부터 역산해서, $E=1.8582 \times 10^4 \text{kg/mm}^2$ 를 사용했다.

결과 및 고찰

Fig. 4의 상부는 Fig. 3의 시험편의 균열폭 t 가 0.36 mm 일때, 균열의 위치 l_1 에 대해서, 각각의 위치에서, 균열의 깊이 H 를 4mm, 8mm, 12mm로 변화시킬 경우 1차굽힘진동수의 계산치와 실험치들을 나타냈다. Fig. 4의 하부는 균열폭 t 가 5.0mm 일때, 각 경우들의 결과치이며, 점선은 균열이 없는 경우의 엄밀해이다.

$t=0.36\text{mm}$, $t=5.0\text{mm}$ 인 경우 모두 균열의 위치가 중앙이후에서는 비교적 계산치와 실험치는 잘 일치하고 있고, 균열이 고정단쪽으로 위치할 수록 차이를 보이고 있으며, 특히 균열이 고정단에 있고, $t=5.0\text{mm}$, $H=12\text{mm}$ 인 경우는 1.6Hz, $t=0.36\text{mm}$, $H=12\text{mm}$ 인 경우는 3.7Hz나 실험치와 계산치 사이에 차이를 보이고 있는데, 이는 실험상의 오차를 배제할 수는 없으나, 균열폭이 좁을 수록 더 차이가 나는 것으로 미루어 봐서, 근본적인 것은 급격한 단면변화와 응력집중의 영향등으로 균열부의 단면에 항복응력이상의 응력이 작용됨으로써 굽힘강성이 변화한 때문이라 생각된다. 고로 이런 계의 고정단부 근에서 균열폭이 적고, 깊이가 현저하게 깊은 경우, 계산치와 실제의 고유진동수는 상당한 차이를 보일 수 있다는 것을 알 수 있다.

또한 균열의 위치에 대한 굽힘진동수의 변화를 보면, $t=0.36\text{mm}$ 일 경우는 고정 단부근에서 조금 저

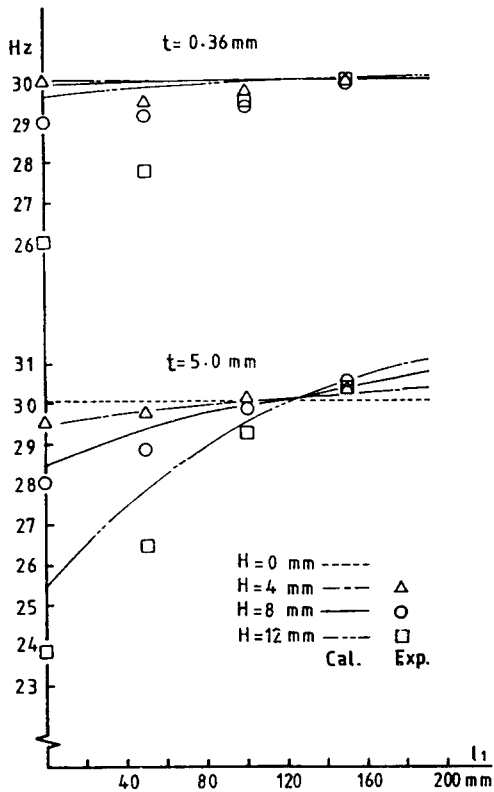


Fig. 4. Bending frequency vs. crack position in cantilever.

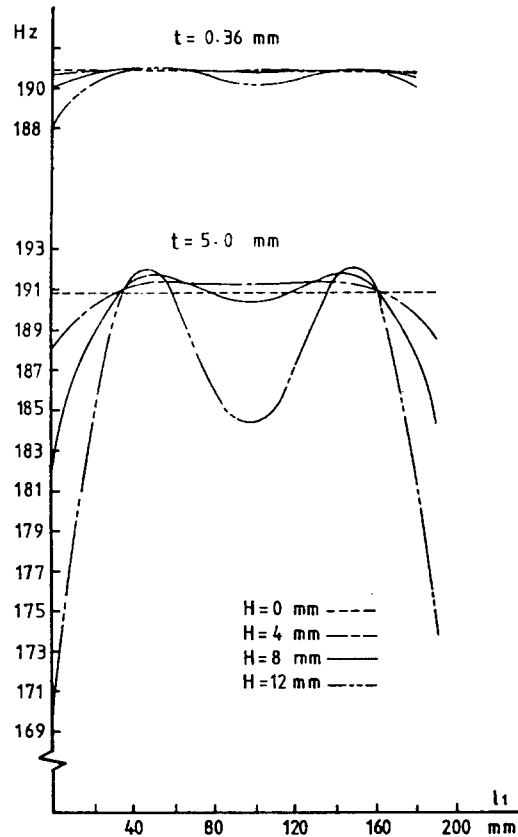


Fig. 5. Bending frequency vs. crack position in fixed beam.

하하고 자유단부근에서는 오히려 약간 상승하는 경향을 보이고 있고, $t=0.5mm$ 인 경우는 변화폭이 심하게 나타나고 있음을 알 수 있다.

Fig. 5는 Fig. 3에 나타난 시험편양단의 경계조건을 변화시켜, 양단고정보로 했을 경우의 균열위치에 대한 1차굽힘진동수의 변화를 나타냈다.

외팔보에서와 마찬가지로 균열폭 $t=0.36mm$ 인 경우는 균열의 깊이 H 가 $12mm$ 라 할지라도 균열이 없는 경우와 비교할때 상대적인 진동수변화는 2% 이내일 정도로 변화가 적으나, $t=5.0mm$ 인 경우는 양단에서의 진동수가 심하게 저하하고 있고 균열의 위치가 $50mm$ 와 $150mm$ 부근에서는 균열이 없는 경우보다 오히려 높아지고 있음을 알 수 있다. 그리고 균열이 중앙에 위치할 때를 중심으로 진동수 변화가 대칭으로 나타남을 알 수 있다.

Fig. 6, 7은 양단경계조건이 단순지지와 일단고정타

단지지상태에서 균열의 위치에 대한 진동수의 변화를 나타냈다. 이 경우도 앞서의 경우와 균열폭에 따른 진동수의 변화경향은 대동소이하나, Fig. 6에서는 균열이 시험편의 중앙에 위치해 있을 때 가장 진동수가 저하하고 있고, 균열의 폭, 깊이, 위치에 상관없이 균열이 없는 경우보다 진동수가 높은 경우는 생기지 않고 있다는 점이 다르다. Fig. 7은 Fig. 5의 양단고정보의 결과와 Fig. 6의 단순지지보의 결과를 조합한 형태의 변화경향을 나타내고 있음을 알 수 있다.

Fig. 4, 5, 6, 7중에서 $t=0.36mm$ 일 경우들을 주목해보면, 균열의 깊이 $H=12mm$ (이 경우는 시험편 $b=30mm$ 일 때 균열의 깊이는 $24mm$ 임을 의미함)라 하더라도 균열이 없는 경우와 비교할 때 가장 진동수 변화가 큰 것이 $2.6Hz$ 로 그다지 변화하지 않고 있지만 강도상으로는 치명적일 수 있음을 알 수 있다.

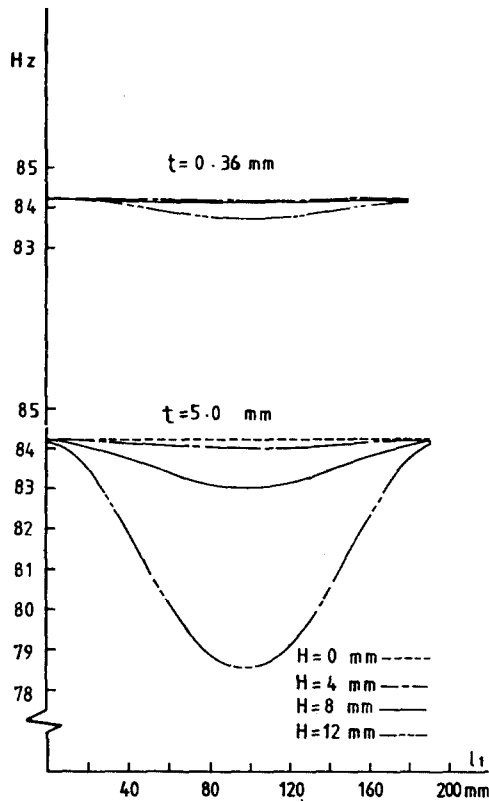


Fig. 6. Bending frequency vs. crack position in beam with simply supported ends

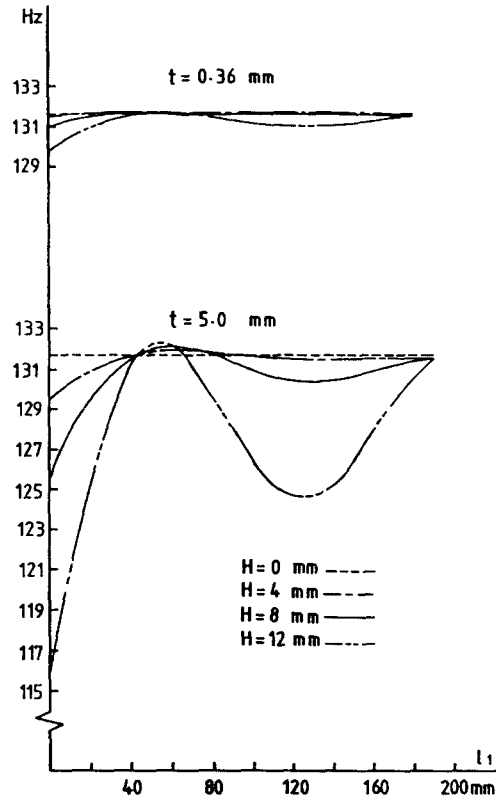


Fig. 7. Bending frequency vs. crack position in one end fixed other end supported beam.

결 론

균열이 있는 보의 굽힘진동수 계산을 위한 전산프로그램을 개발해서, 실험으로 검증하고, 미소균열이 진동수에 미치는 영향을 검토한 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 개발한 전산프로그램에 의한 계산치와 실험치는 비교적 잘 일치해서 미소균열이 있는 경우에도 본 프로그램의 적용이 가능하다.
2. 고정단부근에서 균열폭이 좁고 깊은 경우 실제의 굽힘진동수는 계산치와 상당히 달라질 수 있다.
3. 균열에 의한 굽힘진동수의 변화가 수 퍼센트에 불과하더라도 강도상으로는 치명적일 수 있다.

참 고 문 헌

1) Hutchinson, J.R.(1981) : Transverse Vibrations of Beams, Exact versus Approximate

solutions. Transactions of the ASME Vol. 48, 923-928.

- 2) Timoshenko, S., Young, D.H. and W. Weaver(1974) : Vibration problems in Engineering. John Wiley & Sons, Inc., 415-431.
- 3) Cutchins, M. A. (1980) : The Effect of an Arbitrarily Located Mass on the Longitudinal Vibrations of a Bar. Journal of Sound and Vibration 73(2), 185-193.
- 4) To, C. W. S. (1979) : Higher Order Tapered Beam Finite Element for Vibration Analysis. Journal of Sound and Vibration 63(1), 33-50.
- 5) Pestel, E. C. and F. A. Lekie (1963) : Matrix Methods in Elastomechanics. Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 55-81.
- 6) 大和田信・大場次郎・間島保・並木正之(1975) : 曲げ振動數に及す龜裂の影響. 千葉大學 工学部 研究報告 27(51), 29-33.