缺陷을 갖는 不連續平板 構造物의 安定性 研究

李善雨* · 金時榮** · 洪奉基**

A Study on the Stability of Uncontiuous Plate Structures with Cracks

Sun Wo LEE*, Si Young KIM** and Bong Ki HONG**

This paper deals with the characterics of the stability of uncontinuous plate structures with cracks. The relation between the J-intergal of the cracks existing in the stress-concentrated regions and local strain are investigated experimentally and theoretically.

The BEM(boundary element method)analysis and test results lead to the follow conclusions :

1. A non-dimensional J was computed in a plate strss and strain condition for several kind of loads and crack types.

The J design curves are defined as follows :

$$J_E/\sigma_y^2 a = 3.345(e/e_y)^2 \text{ at } e/e_y \leq 1$$

$$J_E/\sigma_y^2 a = 3.345(e/e_y) \text{ at } e/e_y > 1$$

2. Use of this curve provides a good estimation for the uncontinuous plate structures with cracks existing in the stress and strain concentrated region.

3. The stability of the characteristics is mainly depenent upon not the length of cracks but the type of the cracks.

記號說明

G : 材料의 剪斷彈性係數(kg/mm^2)

ν : 프와송 비(poission's ratio)

t : 板의 두께(mm)

p : 總荷重(kg)

a : 균열길이(mm)

u_k^* : 가상變位(mm)

p_k^* : 가상변위에 對應하는 表面力(kg)

Δ_l^i : Dirac의 delta함수이며 點 i에 作用하는 l方向의 單位力

序 論

本論文은 不連續 平板構造物 內部에 缺陷을 가질 때 相互干涉에 依한 安定性 問題의 評價에 대해서 研究한 바를 보고한다. 여기에 關係하는 종래의 研究들[2,3]은 대개 平滑平板等의 連續構造物 또는 無限平板內部에 어떤 種類의 缺陷이 存在하여 그附近에 局所的으로 降伏點을 초월하는 경우에 그破壞要因인 許容限界應力評價를 爲하여 그支配特性媒介變數인 K值, COD, J積分值等이 보고되어있다. 그중에서도 Burceikin[3]이 實構造物에서의 局所的 降伏狀態를 COD 개념에 依하서 檢討하여 COD 設計曲線을 提示하였으나 이式은 균열을 中心으로하는 어떤 標點거리에서 變形과의 關係를 구하기 爲해 균열의 길이를 變化시켜 행하고있으며 실제의 적용에서는 變形값이 全體變形값이여야하나 이것을 局部變形값으로 代入하여 計算하므로 이點에대해서 充分한 說明이 없다[3]. 또 Begly[2]는 應力集中部에 생기는 塑性變形域中의 균열의 評價로서 J 設計曲線을 提案하고 있으나 J 積分值는 본래 非線形彈性體 및 全變形理論에

* 東義工業專門大學 : Dong Eue Techenical Junior College
** 釜山水產大學 : National Fisheries University of Busan

맞추어 變形增分理論에 따라 行한 J 의 徑路獨立性이 證明 되어있지 않는 것이 問題이다. 그리고 Jurner[7]는 各種의 應力集中部에 균열이 存在하는 狀態를 有限要素法을 利用하여 近似式을 求하였으나 境界要素法과 比較해서 精度面뿐만 아니라 變位가 아주 적은 곳의 局部的인 降伏區域에서는 接觸問題로서 BEM 方法이 보다 便利한 數値解法임을 보이고 있다. 이러한 點들을 염두에 두고, 本論文에서는 不連續구조물에서 內部에 應力集中部에 存在하는 缺陷의 부근에 力學的 狀態를 特徵짓는 應力 및 變形의 關係를 求하여 J 積分値를 求하고 이의 檢定을 爲하여 시편을 제작하여 光彈性實驗을 병행하여 缺陷부근의 압축 및 引張區域에서의 評價曲線의 特性에 關한 結果를 提示한다.

境界要素法에 依한 數値解析

1. 解析法

여기서는 應力集中部에 대해서 J 値 및 變形값의 關係를 境界要素法(BEM)[4]을 써서 應力集中部에 存在하는 缺陷부근의 應力 및 變形으로 부터 구한다. 本論文의 경계요소로서 48點을 경계면에서 分布 시켰고, 또 評價點으로서 20點을 使用 했다. 여기서 解析에 使用된 材料定數는 實驗에 使用된 光彈性材料의 特性値와 그實驗시편의 치수를 그대로하였다.

2. 解析모형

2次元 線形解析을 爲하여 모형을 Fig.1과 같이 취

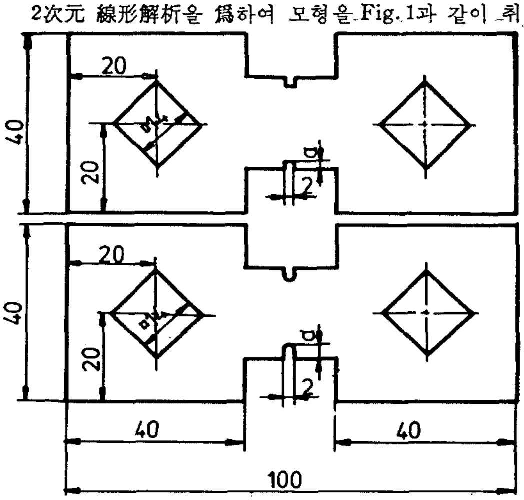


Fig. 1. Model of the crack emanting from stress concentrated regions.

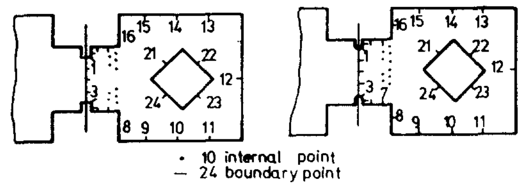


Fig. 2. Boundary element method network for stress and strain.

했으며 그들의 應力集中의 缺陷의 길이 a는 $2mm$, $3mm$이다.

3. 2次元彈性理論[4]

Fig.1과 같은 모델의 해석을 爲하여 彈性方程式적용에 앞서 BEM을 爲한 다음의 가정을 둔다.

(1) 주어진 材料는 線形應力—變形度關係를 만족하는 等方體(isotropy body)이다.

(2) 초기狀態의 應力 및 變形度는 熱과 時間에 關한 變形은 없다.

이상의 가정으로부터 탄성재료의 Euler방정식 및 평형조건식과 變形關係式으로부터 假想일의 原理[4]의 式은 다음과 같다.

$$\int_{\Omega}(\sigma_{jk,j}+b_k)u_k^*d\Omega=\int_{\Gamma_2}(p_k-\bar{p}_k)u_k^*d\Gamma \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

여기에서 u_k^*는 가상변위이고 Γ_1上에서 同次 境界條件式 $\bar{u}_k^*=0$ 를 恒等的으로 만족한다. u_k^*를 Γ_1상에서 이것들의 조건식을 만족 시키지않는 중첩함수라 해석할때에 다음식이 된다.

$$\int_{\Omega}(\sigma_{jk,j}+b_k)u_k^*\,d\Omega=\int_{\Gamma_2}(p_k-\bar{p}_k)u_k^*d\Gamma + \int_{\Gamma_1}(\bar{u}_k-u_k)p_k^*d\Gamma \quad \cdots\cdots(2)$$

(2)式을 부분積分하면

$$\int_{\Omega}b_ku_k^*d\Omega-\int_{\Omega}\sigma_{jk}\epsilon_{jk}^*d\Omega=-\int_{\Gamma_2}\bar{p}_ku_k^*d\Gamma - \int_{\Gamma_1}p_ku_k^*\,d\Gamma+\int_{\Gamma_1}(\bar{u}_k-u_k)p_k^*d\Gamma \cdots\cdots(3)$$

(3)式을 다시 部分積分하면,

$$\int_{\Omega}b_ku_k^*d\Omega+\int_{\Omega}\sigma^*_{jk,j}u_kd\Omega=-\int_{\Gamma_2}\bar{p}_ku_k^*d\Gamma - \int_{\Gamma_1}p_ku_k^*\,d\Gamma+\int_{\Gamma_1}\bar{u}_kp_k^*d\Gamma+\int_{\Gamma_2}u_kp_k^*d\Gamma\cdots(4)$$

(4)式을 평형조건식을 적용하면,

$\sigma^*_{jk,j}+\Delta^i_l=0$

여기서 Δ^i_l은 Dirac delta function이며, i點에서 l方向의 單位荷重을 表示한다. 즉

$$u^i_l+\int_{\Gamma_1}\bar{u}_kp_k^*d\Gamma+\int_{\Gamma_2}u_kp_k^*\,d\Gamma=\int_{\Omega}b_ku_k^*d\Omega$$

$$+\int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma \quad \cdots\cdots(5)$$

$u^i{}_l$는 點 i에 있어서 l方向의 變位를 나타낸다. 一般的으로 點 i에 대해서 다음과 같이 쓸수있다.

$$u^i{}_l + \int_\Gamma u_k p_k^* d\Gamma = \int_\Gamma p_k u_k^* d\Gamma + \int_\Omega b_k u_k^* d\Omega \quad \cdots\cdots(6)$$

여기서 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$이다. u_k^*와 p_k^*는 點 i에 있어서 l方向에 作用하는 單位의 集中力에 의해 생긴變位와 應力 vector인 기본해이고, 3方向에 作用하는 單位力을 생각하면 다음과 같이 쓸수있다.

$$u^i{}_l + \int_\Gamma u_k p_{lk}^* d\Gamma = \int_\Gamma p_k u_{lk} d\Gamma + \int_\Omega b_k u_{lk}^* d\Omega \quad \cdots\cdots(7)$$

(7)式을 3次元的인 問題에 대한 一般化된 式으로 수정하면,

$$c^i u^i{}_l + \int_\Gamma u_k p^*{}_{lk} d\Gamma = \int_\Gamma p_k u_{lk} d\Gamma + \int_\Omega b_k u_{lk}^* d\Omega \cdots\cdots(8)$$

이다. 여기서 c^i는 境界點의 거칠기계수이며 內部點에 대하여서는 $c^i=1$이된다. 또한 p_{lk} 및 u_{lk}^*는 식(6)과 마찬가지로 l方向으로 作用하는 單位荷重에 대한 k方向의 應力과 變位를 나타낸다. 2次元 平面 strain을 받는 等方體에 대한 $p^*{}_{lk}$ $u^*{}_{lk}$는

$$u_l{}^k = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r}\left[(3-\nu)\Delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right] \cdot (9-a)$$

$$p_{lk}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left[\frac{\partial r}{\partial n}\left\{(1-2\nu)\Delta_{lk} + 3\frac{\partial r}{\partial z_l}\frac{\partial r}{\partial z_k}\right\} - (1-2\nu)\left\{\frac{\partial r}{\partial z_l}n_k - \frac{\partial r}{\partial z_k}n_k\right\}\right] \cdot (9\text{-b})$$

이 된다.

단, n는 物體表面의 法線, Δ_{lk}는 Kronecker의 delta, r는 負荷點이라 생각하고 있는 點과의 距離, n_j는 方向餘弦이다. 等方體의 2次元平面變形에 대해서 基本解는

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}\left[(3-4\nu)ln\left(\frac{1}{r}\right)\Delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right] \cdots\cdots(10-\text{a})$$

$$p_{lk}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\left[\frac{\partial r}{\partial n}\left\{(1-2\nu)\Delta_{kl} + 2\frac{\partial r}{\partial x_k}\frac{\partial r}{\partial x_l}\right\} - (1-2\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_l}n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k}n_l\right)\right] \cdots\cdots(10-\text{b})$$

이 된다. 식 (8)을 matrix 형태로 바꾸어 쓰면

$$c^i u^i + \int_\Gamma \mathbf{p}^* u d\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{u}^* p d\Gamma + \int_\Omega \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \quad \cdots\cdots(11)$$

이고 여기서 $u^*{}_{lk}$성분으로하여 갖는것과 같은 2×2,의 matrix를 $\mathbf{u}^*$, p_{lk}^*를 成分으로 하여 갖는것과 같은 2×2의 matrix를 $\mathbf{p}^*$로 나타내었다. 즉

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p^*{}_{11} & p^*{}_{21} \\ p^*{}_{12} & p^*{}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u^*{}_{11} & u^*{}_{21} \\ u^*{}_{12} & u^*{}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

이다. 解析域을 n個의 경계요소로 나누어서 數値的인 積分形으로 쓰면

$$\boldsymbol{c}^i \boldsymbol{u}^i + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{H}_{ij}\, u_j = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}\, p_i + b_i \quad \cdots\cdots(12)$$

이고 여기서

$\boldsymbol{c}^i = \begin{bmatrix} c^i & 0 \\ 0 & c^i \end{bmatrix}$이며 평활한 表面에서는

$c^i = 1/2$이고

$H_{ij} = \widetilde{H}_{ij} + C^i(i=j$ 일 때)를 다시쓰면

$$\sum_{i=1}^{n} H_{ij}\, uj = \sum_{i=1}^{n} G_{ij}\, p_j + b_i \quad \cdots\cdots(13)$$

식(13)으로 表示되는2 次元彈性問題의 式을 이러한 數値的인 方法에 의하여 評價點들의 應力 및 變位의 값들을 구하였다. 여기에 使用된 계산기의 機種은 Perkin Elmar 3220이다.

實驗材料 및 方法

1. 實驗材料

光彈性實驗用 試片材料로서는 主劑가 epoxy 수지인 素材를 使用하였다. 사용된 材料常數들은 하중(p)은 36kg, 54kg, 두께는 (t)6mm, 재료의세로탄성계수(E)는 302kg/mm^2, 프와송 비(ν)는 0.35, 항복응력(σ_y)은 18.2kg/mm^2이고 시편의 形狀加工을 機械加工 및 手技加工을 하였다.

2. 實驗方法

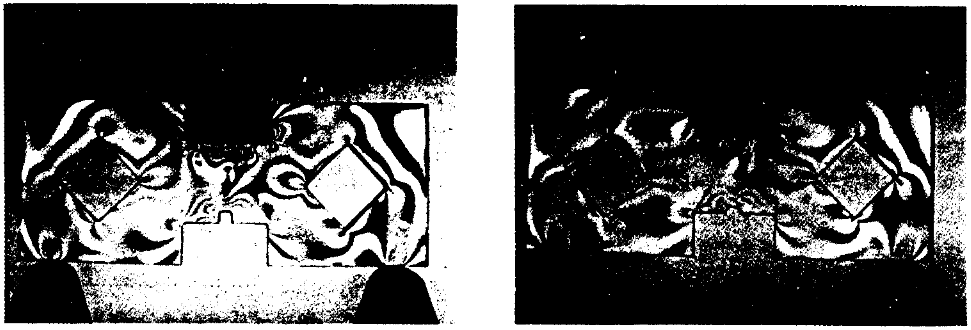
製作된 個個의 시편을 光源으로부터 및 方向에 수직으로 세운 偏光子板과 檢光子板 사이의 荷重台위에 세워놓고 應力集中의 變化를 爲하여 荷重을 36kg, 54kg을 順次的으로 주어 무늬모양을 촬영 했고 응력차는 다음식을 사용했다[6]. 즉, $N=\alpha(\sigma_1-\sigma_2)$이며 여기서, N: 프렌지넘버, α: 감도계수, $\sigma_1-\sigma_2$: 한 등색선의 주응력차로 계산한 결과 그값은 0.738mm/kg였다. 그리고 한무늬당의 應力은 1.355kg/mm 였다.

J 値 計算

境界要素法 및 光彈性 實驗에 의하여 評價點들의 應力 및 變形의 값들로 부터 J 및 變形 e의 값을 計算하기 爲하여 다음식을 도입하였다[7].

$$J = R + \frac{1}{t(b-a)}\{2U_e - p_y e_y\} \quad \cdots\cdots(14)$$

여기서 $R=(1-\nu^2)K_c{}^2/E$(平面變形), $K_c{}^2/E$(平面應力)이고



(a) Rectangular crach.　　　(b) Round crach.

Fig. 3. Dark field isofringe of uncontiuous plate in loading.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{K_c}{\sqrt{2\pi r}}\begin{Bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\left\{1-(\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{3}{2}\theta)\right\}\\ \cos\frac{\theta}{2}\left\{1+(\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{3}{2}\theta)\right\}\\ \cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{3}{2}\theta\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(15)$$

이다.

단, t : 두께, a : 크랙길이, b : 크랙폭, P_y : 항복하중, e_y : 항복시 荷重點變位, U : 탄성에너지, e : 전체變位이다.

여기서 식(14)에 의하여 식(13)로 부터 計算된 應力의 값들을 代入하여 J값을 구하여 이것을 無次元量 (J_E/σ_y^2b)으로서 Fig. 4에 表示하였다. 그리고 이들을 도수분포 값들로 부터 곡선회귀解析에 의하여 式을 구하면

$$J_E/\sigma_y^2a=3.335\left(\frac{e}{e_y}\right)^2 : \frac{e}{e_y}\leq 1 \quad \cdots\cdots(16-a)$$

$$J_E/\sigma_y^2a=3.345(e/e_y) : \frac{e}{e_y}>1 \quad \cdots\cdots(16-b)$$

가 된다.

考　　察

1. 評價曲線

경계요소법(BEM)에 의한 結果 應力集中部 균열에 대해서 J의 無次元量 J_E/σ_y^2a 값은 應力集中部의 가상균열부에 평균 變形 무차원량 e/e_y와의 사이에 應力集中係數를 計算한 결과 균열의 길이에는 依存하지 않고 一定의 關係가 存在하는 것을 알았다. Fig. 4 및 Fig. 5의 하중에 의한 균열에 대해서도 가상균열과 그의 부분에서 평균변형을 고려하는 것에 의해 응력집중부 균열은 거의같은 모양으로 취급이 가능한 것으로 판명되었다. 더우기 각종응력 집중부

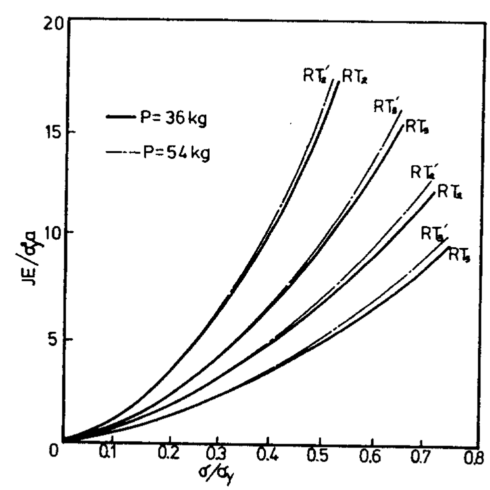


Fig. 4. Relation between J_E/σ_y^2a and σ/σ_y.

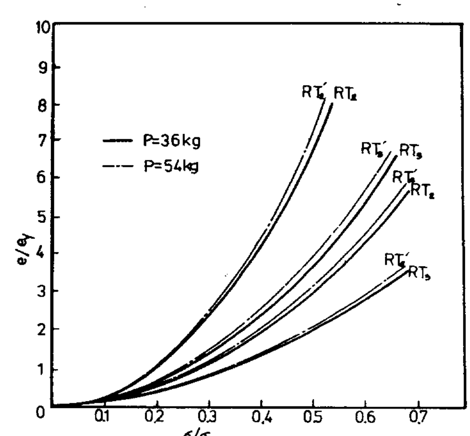


Fig. 5. Relation between e/e_y and σ/σ_y.

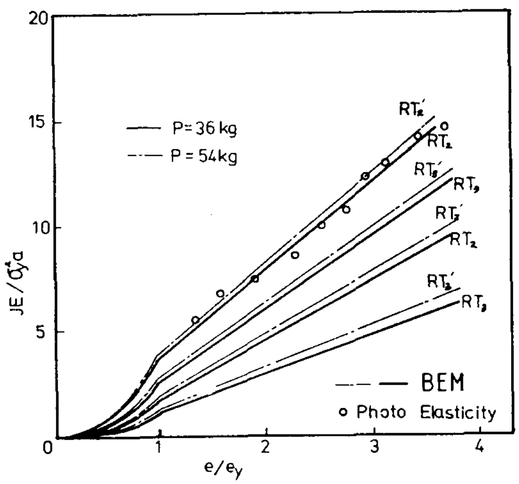


Fig. 6. Relation between $J_E/\sigma_y{}^2a$ and e/e_y analyzed by BEM.

에 대해서의 J와 e와의 關係를 Fig. 6의 曲線部이 2 次式으로 表示되는 곡선의 회귀식이 된다.

Fig. 6에서 $e/e_y=1$의 값을 초기항복상태라 하고 一種의 應力集中部라하면 그 계수 $\sigma_{max}/\sigma_{net}$의 값에 따라서 그 무차원량이 a의 크기에는 關係치않고 크랙의 全變形(e)를 使用하면 Fig. 2의(b)형상보다 (a)쪽이 영향이크다. 더우기 실구조물에 적용하는 경우에도 e의 定義가 명확히 되는것은 많은 利點이 있는것으로 생각된다. 全變形에 근거를 두는 方法은 그標點거리를 취하는 방법에 의해서 變形이 큰차이가 있게된다. 이傾向은 變形구배의 큰값에서 현저하다. 또 실제의 구조물에 있어서 균열을 가정해서 全體變形을 구하는 것은 곤란하다. 따라서 적용이 全體變形을 그외의 국소변형으로 바꾸는 조작을 행하지 않는것이 그 評價가 모호하게 되는수가 있다. 이런 점으로부터 應力變形 集中部의 缺陷評價는 全體變形에 근거를 두는 方法을 적용하지 않는것이 좋다고 생각된다. 또 식(16)는 應力集中係數가 2.4 이상의 경우의 應力集中部 균열에 대해서 解析하는 結果값으로 上限으로 결정된다는 것이다. 따라서 응력집중계수가 더욱 작은경우에는 $J_E/\sigma_y{}^2a \sim e/e_y$가 식(16)에 의해 表示되는 것보다 상방에 位置한다고 하는 가능성이 있다. 실제 응력집중 係數가 1의 극한에 있어서 $J_E/\sigma_y{}^2a \sim e/e_y$곡선이 $e/e_y=1$ 의 부근에서 급격히 위로 경사진다는 것은 쉽게 알수있다. 문제는 응력집중계수가 1.5∼2 程度일때 이지만 이런 경우에는 통상 설계응력레벨 로서 국부變形이 e_y를 크게 상회한다고는 생각 하지 않는다. 이런근거로 e/e_y가 1을 크게 초과하는 程度까지는 아니기 때문에 식(16)로써 評價해도 크게 오차가 생기지 않는다. 이런 근거로 실제구조물로서 문제되는 應力集中部의 경우는 식(16)로서 알수있다고 생각된다. 이상을 整理하면 파괴를 특징짓는 廣義의 荷重으로서 應力集中部의 가상균열부 에서의 평균변형으로 파괴 파라미터로서 값을 사용하면 J와 e와의 사이에 缺陷을 應力集中部에 存在하는 缺陷平價曲線인 J評價曲線이라고 생각한다.

2. 平面變形狀態와 平面應力상태 및 加工硬化率

본 해석에서 평면응력상태 가공경화율을 $H'=E/100$을 가정해서 논했다. 그러나 실제 구조물의 현상은 일반적으로 평면응력과 평면변형의 중간의 상태에 있고 또 적당히 가공경화하는 재료가 사용되는 경우가 많다. 따라서 이런 因子의 $J-e$ 關係를 취급하는 영향에 대해 고려할 필요가 있다. 金澤[3]은 3點 휨 시험에서 평면응력과 평면變形의 차이 및 H'의 큰 變化가 소규모 항복역에서는 평면응력 및 평면변형에에 의한 差는 거의없고 소성역이 크게되는 평면응력의 경우 J의 쪽이 크게되는것 및 H'의 영향은 전면 항복에 이르기까지 거의 나타내지 않는 다는것을 보여준다.

3. 應力集中部의 缺陷 評價法

Fig. 6에 있어서 표시되는 J評價곡선을 사용하면 재료의 파괴인성치(J_c)와 균열길이 a로부터 e/e_y가 결정된다. 더우기 검토대상으로는 응력집중부에 대하여 Fig 6에 나타낸것과 같은 作用應力과 평면變形과의 關係가 얻어지면 이것을 써서 파괴하중이 추정된다. 또 J_c와 부하응력이 旣知의 경우에는 限界균열길이 a_{cr}, a가 負荷荷重이 旣知인 경우에는 材料에 要求되는 파괴인성치 J_c를 각각 추정할 수 있다. 또 應力集中部의 變形을 근사적으로 추정하는 방법으로서 Neuber[6]에 의한것이 가장잘 알려져 있다. 이것에 의하면 탄성해석의 결과를 기초로 탄소성 變形의 分布를 추정하는 것이 가능하다고생각되어진다. Neuber의 식의 有用性에 대해서는 이것에 의한 결과와 유한요소법에의한 결과를 비교한 것으로서 Begley[2]에 의해 검토되었다.

Fig. 7 에는 이제껏 제안된 設計曲線의 重要한 것을 表示하고 있다. 그가운데는 COD[3], J値[2], FEM[7]

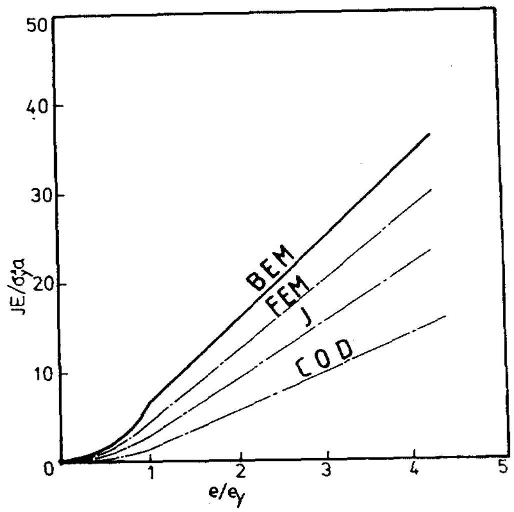


Fig. 7. Comparison of variation among J design curves.

및 BEM[4]에 의해 계산값들을 서로 비교하고 있으나 BEM의 값이 상한으로서 나타내어지고 있음을 보인다. Fig. 4, Fig. 5, Fig. 6의 RT_2는 Fig. 1에서의 crack의 형상이고 길이는 *2mm* 또 RT_{t2}는 하단의 crack 형상 길이 *2mm*이다.

結　　　論

應力集中部에 存在하는 균열에 대해서 J 評價式은 그주위의 應力集中部의 국부變形과의 關係에 對해서 引張 및 壓縮이 있는 두곳에서 BEM 解析과 光彈性實驗한 결과와 COD 및 J値와 비교한 結果는 다음과 같다.

1. 應力集中部에 存在하는 균열에 對해서의 J 値의 無次元量 J_E/σ_y^2a와 그 경우의 平均變形 및 降伏變形의 비(e/e_y)와의 關係는 균열의 길이에 依하지 않고 應力集中部의 형태에 거의 지배적으로 決定되는 一義的 대응관계가 있다.

2. 무한연속부 内部의 어떤 缺陷에 對한 評價式으로 부터 구한 값을 불연속 구조물내의 應力集中部에 存在하는 결함에 對하여 비교 整理하면, $J_E/\sigma_y^2a=3.345(e/e_y)^2$의 구간은 $e/e_y\leq1$이고, $J_E/\sigma_y^2a=3.345(e/e_y)$의 구간은 $e/e_y>1$로서 이식들은 缺陷部 J 評價式으로 사용할 수 있다.

3. 境界要素法에 依한 J式의 값과의 사이에는 加工硬化率은 $E/100$을 사용 하므로 이론과 실험결과가 거의 일치함을 보이고 상기 J 식은 不連續平板 구조물이 缺陷을 갖일때 應力設計曲線의 資料가 될수 있다.

參 考 文 献

1) 田中正隆(1982) : 境界要素法과 基礎應用. 丸善株式會社, 82.

2) Begley, J. A. Landes, J. D. and Wilson(1974) : An estimation model for application of the J-intergral. ASTM STP, 560, 155-169.

3) Burdekin, F. M. and Dawes, M. G. (1971) : Practical use of liner elastic and yielding fracture mechanics with particular reference to pressure vessels. Inst. of Mech. Eng., 28-37.

4) C. A. Brebbia(1981) : The boundary element method for engineers. Pentch Press, 139.

5) Larry, F. and Segerlind(1976) : Applied Finite Element analysis. John Wiley, 73.

6) Neuber, M(1961): Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies. ASME Ser E. 28-4, 544-550.

7) Turner, C. E. (1979) : Method for post-yield fracture mechanics. Applied Science publishers, 23-210.