

彈塑性 破壞解析을 위한 크랙平面 平衡模型과 降伏
線形 破壞力學과의 比較에 관한 研究

李 圭 用* · F. W. Smith**

A Comparison of the Crack Plane Equilibrium Model for Elastic-
Plastic Fracture Analysis with the Irwin's Plastic Zone
Corrected LEFM

Kyu-Yong LEE* and F. W. Smith**

It is well known that the application of linear elastic fracture mechanics is inadequate to solve the large deformation fracture failures which occur in ductile manner because of the large scale yielding due to the severe stress concentration in the region adjacent to the crack tip.

The authors have been evolved a fracture model, the crack plane equilibrium model, for this kinds of elastic-plastic fracture problems in the previous report.

In this report, the crack plane equilibrium model was compared with the Irwin's plastic zone corrected linear elastic fracture mechanics through theoretical comparisons and experimental results to examine the validity of the crack plane equilibrium model as an available tool for nonlinear fracture analysis.

Through this study, the main results were reached as follows;

Irwin's plastic zone corrected linear elastic fracture mechanics could be applicable only for small scale yielding problems as expected while the crack plane equilibrium model valid as a fracture model for large deformation fracture failure.

However, the followings should be considered for the more precise evaluations of CPE model;

- 1) It is necessary to test more specimens which contain small cracks in the range of $2a/W < 0.1$.
- 2) It is important to detect the crack initiation point during the fracture test for determining an accurate fracture load.
- 3) Effects of specimen thickness in the fracture process zone should be examined.

記 號 說 明

여기서의 변형은 crack initiation을 말함.
 Δ, δ : 변형전후의 fracture process zone size
 W, W_0 : 변형전의 판폭
 W_c : 변형후의 W_0

T_0, t_f : 변형전후의 판두께
 σ_T, σ_{TF} : 변형전후의 實應力
 σ_f : 파괴시의 公稱應力
 E_Z, E_{ZF} : σ_T, σ_{TF} 에 대응하는 local extension
 X_i, x_i : 변형전후상태에 대한 좌표系
 $t_f(a)$: fracture process zone에서의 변형 후 판두께

* 釜山水產大學: National Fisheries University of Pusan

** Professor, Dept. of Mechanical Engineering, Colorado State University

彈塑性破壞解析을 위한 크래프트 평면平衡模型과 降伏線形破壞力學과의 比較에 관한 研究

$t_f(x)$: 벽 혼후의 확두께(δ zone 제외)

r, θ : 극좌표

a : 크랙길이

r_p^* : Irwin의 소성역 보정계수

a^* : 유호크랙 길이

M : magnification factor

變形率 사이에는 非線形의 關係가 생겨서 線形破壞
力學의 理論을 더 以上 適用시킬 수 없는 새로운 弹
塑性破壞에 대한 問題가 되다.

이와 같은 大變形을 수반하는 破壞解析을 위한 수
단으로서 크랙이 있는 弹塑性體에 대하여 크랙進傳에
의한 포텐셜 에너지를 利用하는 J 積分⁴⁾, 크랙先端
의 開口變位가 破壞의 微觀的 形態에 對應하는 限界
值에 도달할 때 크랙이 成長한다는 COD⁵⁾ 等이 提
唱되어 活潑한 研究가 進行되고 있으나 아직까지 理
論的인 體系가 完成되어 있지 못하다⁶⁾.

筆者들은 前報⁷⁾에서 大變形을 일으켜서 非線形의
挙動을 하는 硬化性 材料에 대한 彈塑性 破壞解析을
위한 한 方法으로써, 破壞進行領域(fracture process
zone)에서의 變形率 값은 有限한 값 E_{ZF} 를 가진다는
가정과 크랙平面에서의 應力이 負荷應力과 平衡
을 이루는데 근거를 두고 크랙平面平衡(以下 CPE라
함)模型을 提案한 바 있다. 이 模型이 破壞模型으
로 成立하기 위해서는 기존의 線形破壞力學, J 積分,
COD等과의 相關性을 밝히는 理論的, 實驗的 比較
検討가 있어야 한다.

本研究에 있어서는 CPE模型과 降伏域을 補正한
線形破壞力學을 서로 理論的으로 比較検討하고 스테
인레스鋼의 實驗을 通한 試驗데이터를 相互比較하여
CPE模型의 有効性을 입증하고자 하였다.

理論的 考察

Fig. 1에 나타낸 바와 같이 크랙길이 $2a$ 를 갖는
單位두께의 無限板이 遠方에 크랙에 대하여 垂直한
방향으로 一定한 應力 σ 를 받고 있는 경우, 材料를
線形의이고 彈性的이라고 假定한 크랙先端에 대한
應力場은 포텐셜函數에 의해서 만족되는 橢圓型의
라플라스 方程式으로 表示된다. 이들函數中의 하나
를 複素數 變數 $Z(\zeta)$ 를 써서 Westergaard⁸⁾는 Airy
의 應力函數⁹⁾를.

로 두었다. 여기서 $Z = \frac{d\bar{Z}}{d\xi}$, $\bar{Z} = \frac{dZ}{d\xi}$, $Z' = \frac{dZ}{d\xi}$ 이
고, $\xi = x + iy$ 이다.

Irwin¹⁰⁾은 Fig. 1의 mode I에 대하여 Westergaard의 難力函數의 解析函數

와 式(1)을 利用하여 2次元 크랙先端附近에서의 應力成分 σ_{ij} 를 크랙先端에 原點을 두 (r, θ)의 極座標

論序

最近 原子爐 容器等과 같은 새로운 形態의 構造物이 대두됨에 따라 이들 構造物의 破壞에 대한 安全度와 그 信賴性이 엄격히 要求되고 있다. 이와 같은 工學的 要求條件를 충족시키기 위한 方法으로 材料의 固有 物性值로서의 破壞에 대한 抵抗力を 表示하는 破壞 韌性值를 利用하는 破壞力學의 手法에 의한 構造物의 破壞豫測 및 設計는 대단히 重要한 역할을 하고 있다.

構造物을 이루고 있는 部材에는 크랙形狀의 결함이 반드시 存在한다고 보는 것이 自然의이며¹⁾, 이들 크랙은 破壞와 密接한 關係를 가진다.

1950年代 중반부터 Irwin²⁾에 의하여 始作되어 좋은結果를 얻고 있는 線形破壊力學은 크랙을 가진 部材가 荷重下에 놓여진 상태에 있어서의 크랙先端近方에 대한 應力場을 破壊非性値인 應力強度係數³⁾ (stress intensity factor), K , 라는 하나의 因子로서 合理的이고도 간단하게 定量的으로 表現하고 있다. 그러나 弹性論에 기초를 두고 있는 이에 의한 應力場은 크랙先端으로 부터의 거리의 平方根에 역비례하는 特異性을 가지기 때문에 크랙先端에서의 應力은 無限大的 크기를 가지다.

實存의 材料, 특히 金屬材料에 있어서는 應力이 無限大로 되기 以前에 降伏하여 塑性變形이 開始된다. 따라서 塑性變形領域을 形成하게 되므로 應力強度係數의 適用은 部材의 기하학적인 形狀에 비하여 이 塑性域의 크기가 充分히 작아서 무시될 수 있는 小規模 降伏의 條件이 成立하는 경우에만 이 塑性域을 포함한 크랙先端의 應力場을 支配하는 力學的 파라미터로서의 그 有効性을 가진다.

近來에는材料에 대한破壞力學의in改善策으로
強度와破壞에 대한抵抗力을 크게向上시킨硬化性
高強度高韌性材料들이開發되어 널리쓰이고 있다
이러한高韌性材料에 있어서와같이延伸率이크기
때문에大變形을 일으키면서破壞하는경우에는크
력先端에形成되는大規模降伏으로인하여應力과

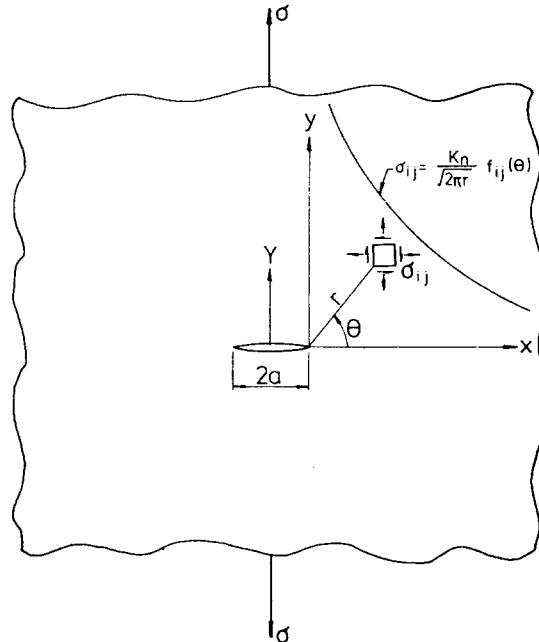


Fig. 1. Elastic stress distribution near the crack tip in an infinite plate under tension.

를 사용해서近似解인 다음의 式으로 表示하였다.

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} F_{ij}(\theta) \quad (3)$$

여기서 $i, j = x, y, z$ 이며, F_{ij} 는 θ 만의 函數이다.

式(3)의 K 는 應力強度係數로서 r 와 θ 에 依存하지 않으며 다음의 式으로 定義된다.

$$K_I = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} Z_I(\xi) \sqrt{2\pi\xi} \quad (4)$$

式(2)를 式(4)에 代入하면

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (5)$$

를 얻는다.

따라서 式(3)에 의한 크랙面에 發生하는 弹性應力의 分布는 $1/\sqrt{r}$ 에 正比例해서 크랙先端에 가까워질 수록 커지고, $r \rightarrow \infty$ 일 때 0에 近接하는 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 의 特異解를 가지기 때문에 크랙先端에 最近接한 領域에 대해서만 有効한 近似方程式이다.

式(3)에 대하여 楕圓孔의 弹性解로 부터 얻은 理想的 크랙에 대한 严密解는

$$(\sigma_y)_{\theta=0} = \frac{\sigma(a+r)}{\sqrt{r}(2a+r)}, \quad r > 0 \quad (6)$$

으로 주어지며, 이를 級數展開하면

$$(\sigma_y)_{\theta=0} = \sigma \left(\sqrt{\frac{a}{2r}} + 0 + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{r}{2a}} - \dots \right) \quad (7)$$

를 얻는다.

따라서 式(5)를 式(3)에 代入하고 $\theta=0$ 를 취하여

式(7)과 比較하면 式(3)에 의한 크랙面($\theta=0$)의 應力의 크기는 式(7)의 級數展開의 第2項 以下를 無視한 近似식임을 알 수 있고 이들 사이의 比는

$$\frac{(\sigma_y)_{\theta=0}, \text{ approx.}}{(\sigma_y)_{\theta=0}, \text{ exact}} = \frac{\sqrt{1+\frac{r}{2a}}}{1+\frac{r}{a}} \quad (8)$$

가 되어, $r/a=0$ 일 때 兩式은 等價이나, 이보다 큰 값에서는 誤差가 커져서 $r/a=0.5$ 에서 13%의 差가 있다.

한편 式(3)에 의한 크랙先端에서의 應力 크기는 크랙面에서 無限大의 値를 가지나 變形을 받는 實存의 金屬材料에서는 塑性域이 먼저 생긴다.

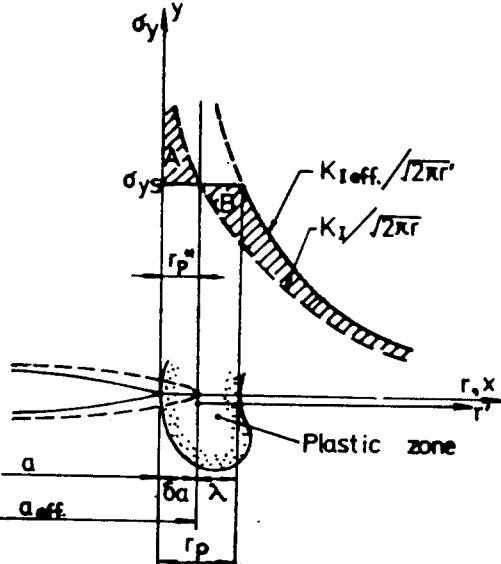


Fig. 2. Plastic zone at the crack tip and approximate stress distribution(in Ref. [11]).

降伏應力 σ_{ys} 를 가지는 完全彈塑體가 Fig. 2에서와 같이 $r=r_p^*$ 인 領域에서 σ_y 가 σ_{ys} 로 되어 塑性域을 形成했다면, 式(3)에 의하여

$$\sigma_{ys} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_p^*}} \quad (9)$$

를 얻는다. r_p^* 는 實際의 塑性域 크기에 比하여 過少評價되므로 Irwin은 크랙先端의 塑性變形에 의하여 假想할 수 있는 實際의 크랙 길이보다 긴 弹性크랙, 즉 有効 크랙 길이

$$a_{eff.} = a_{phys.} + \delta_a \quad (10)$$

를 생각하였다.

Fig. 2에서 降伏 때문에 低下하는 面積 A 의 荷重이 外力과 平衡을 이루기 위하여 B 部分의 面積과 같아야 하므로¹¹⁾ 이로 부터

로 된다.

이때 σ_T 는 σ_{TF} , $\delta=0$ 이 되며, $t_f(x)$ 는 $t_f(a)$ 로 된다고 보면 式(22)는

$$\sigma_f = \frac{2}{W_0 T_0} \int_0^{\frac{W_c}{2}} \sigma_{TF} t_f(a) dx \quad \dots \dots \dots \quad (23)$$

로 되며, 式(23)을 積分하고 整理하여 얻은 式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \sigma_{TF} \left(\frac{t_f}{T_0} \right) \left(\frac{W_c}{W_0} \right) \\ &= \sigma_{TF} \frac{1}{1 + E_{ZF}} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

式(24)를 式(21)과 比較하면 CPE 模型은 크랙이 없는 部材에 대해서도 適用이 近似的으로 可能하다는 것을 알 수 있다.

式(24)의 解를 구함에 있어서 크랙先端의 破壞進行領域을 除外한 領域에서 거리에 따라 變形하는 $t_f(x)$ 를 近似的으로 t_f 로 一定하고 假定하였으나 實際로는 板材 試驗片의 가장자리의 拘束條件 때문에 板의 中央部는 많이 變形하고 끝部分은 작게 變形하는 形狀을 한다.

따라서 式(24)의 結果는 線形 破壞力學에서 板두께의 影響을 고려하지 않는 平面 變形率 狀態를 생각하여 2次元 問題로 取扱한 경우와 비슷하다고 볼 수 있고, 크랙 問題에 대한 CPE 模型을 크랙이 없는 경우로 取扱하기 때문에 생기는 變形率의 差異도 있겠으나¹²⁾, CPE 模型에서도 판두께의 效果가 어느 程度 있음을 보이는 것 같기도 하다.

이에 비추어 CPE 模型도 J_{1C} ¹³⁾나 K_{1C} ¹⁴⁾를 구하는 方法에서와 같이 試驗片의 두께에 대한 制限規定이 있어야 할 것으로 생각되며 이는 많은 實驗을 통하여 工學的으로 認定할 만한 誤差가 있는가를 判定하여 두께의 範圍가 決定되어야 할 것으로 생각된다.

理論的으로 보아 塑性域의 크기를 添加하여 計算한 式(17)과 CPE 模型에 의한 式(24)의 結果를 比較하면 塑性域의 存在를 고려하더라도 大變形의 인

破壞에 대한 豫測에 線形 破壞力學의 適用은 不可能 하며 CPE 模型과 같은 大變形을 생각한 破壞模型이 必要함을 알 수 있다.

實驗的 考察

1. 試驗片 및 實驗方法

本 實驗에 使用한 試驗片의 素材는 오오스테나이트系 18-8 스테인레스鋼이며 그 化學的 組成과 機械的 性質은 각각 Table 1 및 Table 2와 같다.

試驗片은 素材를 Fig. 4의 形狀과 치수로 機械加工한 후 片振引張에 의한 疲勞荷重을 加하여 slit의 先端에 疲勞크랙을 생기게 하였다. 이때 크랙先端에 대한 塑性域의 影響이 크게 되지 않도록 하기 위하여 比較的 낮은 荷重을 作用시켰으며, 疲勞크랙의 길이는 대략 2mm 程度로 하였다. 試驗片의 遠方에서 一定한 應力이 걸리게 하기 위하여 試驗片의 치수를 길게 하였다.

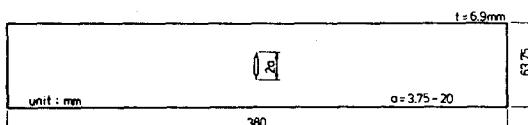


Fig. 4. Shape and dimensions of central crack specimen.

試驗機는 最大負荷力 50ton(로드센 容量 30ton)의 MTS 電氣·油壓 써어보式 引張·壓縮 疲勞試驗機를 使用하였다.

Fig. 4의 試驗片에 대하여 引張試驗을 하여 荷重-變位線圖를 얻고 最高點의 荷重을 크랙 成長開始點에 對應하는 荷重으로 選擇하였다. 크랙 成長開始

Table 1. Chemical compositions of material(wt%)

Material	C	Mn	P	S	Si	Cr	Ni	Co	Cu	Mo	N
18-8 Stainless	.046	1.70	.019	.004	.41	18.03	8.07	.03	.05	.10	.090

Table 2. Mechanical properties of materials

Material	Tensile Strength (MPa)	Yield Strength (MPa)	True Stress at Failure (MPa)	Hardness (RB)	Elongation (G. L. 50mm)
18-8 Stainless	572.40	302.06	1925.81	81	62%

彈塑性 破壞解析을 위한 크랙平面 平衡模型과 降伏 線形 破壞力學과의 比較에 관한 研究

點의 直接的인捕捉은 破壞力學의 重要한 因子이기 때문에 이를 위한 여러가지의 方法이 提案되어 AE法, 超音波法, 電位差法 等이 있으나 裝置가複雜하고 經驗이 必要하며, 現在 가장 有力한 方法은 電位差法으로 알려져 있다¹⁵⁾.

크랙成長開始는一般的으로 大部分의 材料가 最高荷重點에서 크랙의 成長이 생기나, 材料에 따라서는 그以前에 發生하는 경우도 있다.

本實驗에서는 最高荷重點에서 크랙成長의 初期가 發生한다고 생각하여 이점에 있어서의 荷重을 破壞荷重으로 하였다.

2. 實驗結果 및 考察

Fig. 5는 CPE模型의 式(20)에 의하여 豫測한 公稱應力에 의한 破斷強度를 引張試驗에서 얻은 實應力에 의한 破斷強度의 比와 板幅에 대한 크랙길이의 比로서 無次元화하여 表示한 것으로, 크랙의 길이가 짧아짐에 따라 높은 應力比를 나타낸다. 이 값들은 曲線上에 잘 整理되고 있으나 크랙의 길이가 매우

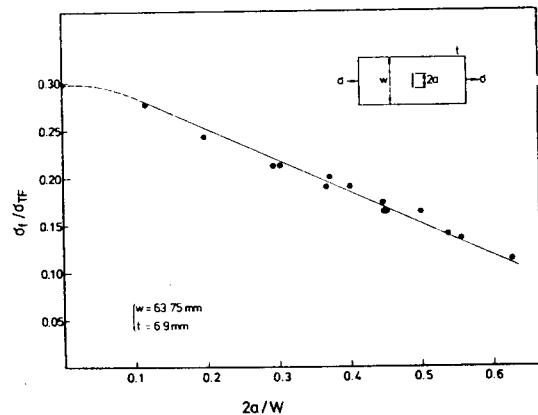


Fig. 5. Predicted stress/true stress at failure vs. crack ratio obtained from the results of CPE model.

짧은範圍에서는曲線의 傾向이 급하게 變化한다. $a=0$ 와 $2a/W \approx 0.1$ 사이의 部分은 實驗의 어려움 때문에 양쪽의 값을 比較推定하여 表示한 것으로서 實驗值와 잘一致할 것으로期待되나, $2a/W < 0.1$ 에 대한 더 많은 實驗資料를 얻어 確認할必要가 있다고 생각된다.

Fig. 6에 線形破壞力學과 CPE模型을 比較하기 위하여 式(13)과 式(20)에 의한 豫測값들이 $2a/W = 0.5$ 에서 거의 같은 값을 가지고도록 K_{Ic} 의 값을 $95.128 \text{ MN/m}^{\frac{3}{2}}$ 로 두어서 얻은 理論值를 破壞強度에 대한

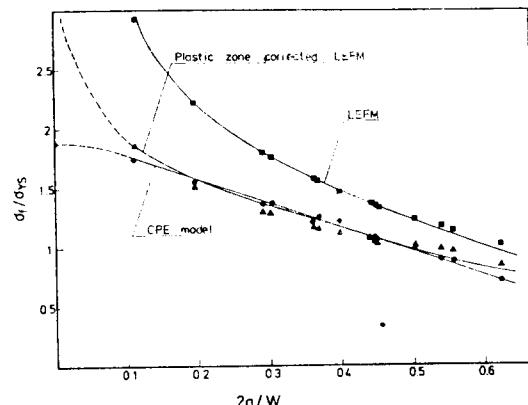


Fig. 6. Predicted stress contributions to the crack ratio by CPE model, Irwin's plastic zone corrected LEFM, and LEFM.

降伏應力의 比와 板幅에 대한 크랙길이의 比로서 表示하였으며 式(5)에 의한 計算值도 함께 表示하였다.

式(5)와 CPE模型에 의한 값들은 曲線上에 따라比較的 잘 整理되고 있으며, 式(13)과 式(5)에 의한 結果值들은 큰 크랙에 대하여 이들兩曲線의 延長線이一致할 것으로 보이며 이는 크랙의 길이가 板幅에 비하여 큰 試驗片에서는 σ/σ_{ys} 의 비가 낮아 塑性域의 补正이 必要하지 않기 때문인 것으로 풀이된다. 또 $2a/W < 0.1$ 에서의 式(13)의 點線은 式(5)에 의한 위의 曲線에 따라 推定하여 表示한 것으로 式(17)에 의한 값과는 다른 값을 가진다.

한편 式(13)과 式(20)에 의한 計算值는 $0.2 \leq 2a/W \leq 0.5$ 의 區間에서 서로 비슷한 값을 가지나 塑性域을 补正한 式(13)의 結果가 CPE模型에 의한 값보다 낮은 應力比를 보이며 $2a/W \geq 0.55$ 에서는 오히려

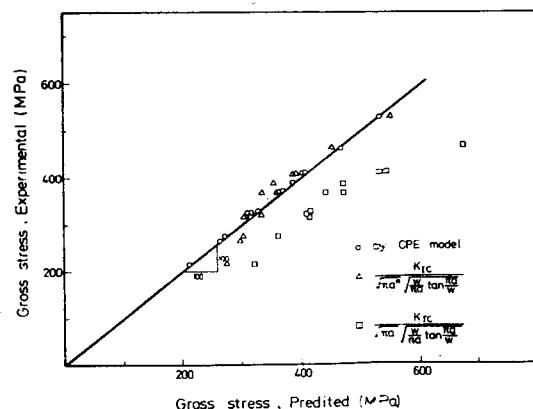


Fig. 7. Predicted stress vs. experimental stress of center cracked panel.

려 높게 나타나고 있으서, 크랙길이가 0.1 미터에서 이들 세 결과값의 차이가 매우 크게 나타남을 알 수 있다.

Fig. 7에는 Fig. 6에서 이용한理論値와 實驗에서 얻은 實驗値들을 함께 나타내었으며 굵은선은 理論値와 實驗値가 1대1임을 表示한다. 이로 부터 알 수 있는 것은 CPE 模型에 의한 理論値가 實驗値와 가장 잘一致하고 그 다음이 塑性域의 影響을 고려한 式(13)에 의한 값이며 式(5)의結果는 두값 사이에 큰 差異를 보인다.

Fig. 5, Fig. 6 및 Fig. 7을 통하여 스테인레스鋼과 같이 大變形을 隨伴하는 高韌性 材料의 破壞豫測에는豫想한 바와 같이 線形 破壞力學에 의한 評價는 不適當하며 CPE 模型에 의한豫測이 嚴密하여 CPE 模型의 有効性이 確實함을 알 수 있다.

結論

大規模의 塑性域을 同伴하면서 破壞하는 高韌性材料의 輸塑性 破壞評價를 위하여 提案된 바 있는 CPE 模型의 有効性을 立證하고자 塑性域의 影響을 补正한 線形 破壞力學과의 理論的 檢討와 오스트리아이트系 스테인레스鋼에 대한 實驗的 比較檢討를 통하여 얻은 結論은 다음과 같다.

豫測한 바와 같이 線形 破壞力學의 適用은 小規模 降伏條件이 成立하는 경우에만 可能하며 CPE 模型은 大變形을 形成하면서 破壞하는 경우의 破壞模型으로서 有効하다.

더욱 嚴密한 有効性을 立證하기 위하여 다음의 事項이 必要하다고 본다.

1. 크랙의 길이가 짧은 試驗片에 대한 實驗이 必要하다.
2. 크랙成長開始點을 정확하게 찾을 수 있는 方法이 必要하다.
3. 破壞進行領域에 대한 두께의 影響을 고려해 보아야 할 必要性이 있다.

参考文献

- 1) 大路清嗣(1979): 破壞力學の骨組. 日本機械學會誌 82(733), 1363-1369.
- 2) Irwin, G. R. (1957): Analysis of Stress and Strain Near the End of a Crack Traversing a

Plate. Journal of Applied Mechanics Sept., 361-364.

- 3) 宋知浩(1980): 破壞力學의 現況(I). 大韓機械學會誌 20(6), 448-456.
- 4) Rice, J. R. (1968): A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. Journal of Applied Mechanics 35, 379-386.
- 5) Wells, A. A. (1961): Crack Propagation Symp. Proc., Cranfield College of Aeronautics, 1, 210. (Ref. 6에서 引用)
- 6) 白鳥正樹 et al. (1980): 數值破壞力學. 實教出版 5.
- 7) Smith, F. W. and Lee, K. Y. (1984): Proposal of a Model for Elastic-Plastic Fracture Analysis. will be Published in Bull. Nat. Fish. Univ. Pusan, 24(1).
- 8) Westergaard, H. M. (1939): Bearing Pressure and Cracks. Journal of Applied Mechanics ASME A49-A53.
- 9) Love, A. E. H. (1944): A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 4th Ed., Dover New York 88.
- 10) Irwin, G. R. (1957): "Analysis of Stresses and Strains Near the End of Crack Traversing a Plate. Journal of Applied Mechanics ASME 361-364.
- 11) 岡村弘之(1976): 線形破壞力學入門. 培風館75-78.
- 12) Cotterell, B. and Mai, Y. M. (1981): Plane Stress Ductile Fracture. in Advances in Fracture Research edited by D. Francois, 5th International Conference on Fracture Vol. 4, France, 1683-1695.
- 13) JSME S001-1981(1981): 輸塑性破壞韌性 J 試験方法. JSME.
- 14) ASTM E399-78a(1979): Standard Test Method for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Materials. 1979 Annual Book of ASTM Standards, Part 10 ASTM 540-561.
- 15) Blauel, J. G. (1979): Experimental Techniques for the Determination of the Initiation of Failure. Advances in Elasto-Plastic Fracture Mechanics Advanced Seminar on Fracture Mechanics 2nd ISPRA, 65-88.