論　文

大 韓 造 船 學 會 誌
第21卷 第2號 1984年 6月
Journal of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 21, No. 2, June 1984

回轉 SHELL의 挫屈 解析

任尙鍈* · 張昌斗* · 尹壯鎬**

The Buckling Analysis of Shells of Revolution

by

S.J. Yim* · C.D. Jang* · C.H. Youn**

Abstract

An extension of the finite element method to the stability analysis of shells of revolution under static axisymmetric loading is presented in this paper.

A systematic procedure for the formulation of the problem is based upon the principle of virtual work. This procedure results in an eigenvalue problem. For solution, the shell of revolution is discretized into a series of conical frusta. The buckling mode in the circumferential direction is assumed, this assumption makes the problem economical for the computing time.

The present method is applied to a number of shells of revolution, under axial compression or lateral pressure, and comparision are made with other theoretical results. The results show good agreement each other.

The effects of aspect ratio, boundary conditions and buckling modes on the buckling strength of shells of revolution are studied. Also the optimum shape of cylindrical shell under uniform axial compression is obtained from the view point of structural stability.

記　號

n : 원주방향의 mode no.

t : shell의 두께

ϕ : 원주각

r : 回轉 shell의 半徑

u, v, w : x, ϕ 그리고 z(두께)방향의 變位

θ : 角變位

$w_x\cdots$: 變位 w의 x등에 관한 편미분

$[B]$: 變形度 matrix$=[B_0]\times(\cos n\phi$ 또는 $\sin n\phi)$

$[k]$: 要素座標系의 의한 요소강성 matrix

$[k_G]$: 要素座標系에 의한 기하학적 강성 matrix

$[K]$: 전체좌표계의 요소 강성 matrix

$[K_G]$: 전체좌표계의 기하학적 강성 matrix

$[\sigma^0]$: 初期應力 matrix

E : Young's Modulus

ν : Poisson's Ratio

N_s, M_s : 子午線方向의 단위 길이당 힘, 모우먼트

N_θ, M_θ : 圓周方向의 단위 길이당 힘, 모우먼트

$N_{s\theta}$: Shell 面內의 단위 길이당 전단력

I. 緖　言

Shell構造는 그의 幾何學的 特性에 기인한 剛性의 效率的인 增大와 輕量性 때문에 各種構造物에 널리 使

接受日字 : 1984年 4月 13日, 再接受日字 : 1984年 5月 24日.

* 正會員, 서울大學校 工科大學

** 正會員, 三星重工業株式會社

用되어 왔던 바, shell 구조의 보다 合理的인 設計에 대한 요구가 높아지고 있다.

shell 構造의 合理的이고 經濟的인 設計를 爲해서는 주어진 外力에 對한 構造物의 安全率을 的確히 推定할 必要가 있는데, 특히 shell 構造의 취약점이라고 할 수 있는 挫屈등 構造安定性에 對한 진단은 필요불가결이라고 사료된다. 따라서 本 論文에서는 이들 shell 構造의 挫屈現象을 규명하기 爲한 기초적인 연구를 수행하였는데, 본래 shell 構造는 그의 幾何學的 形狀과 이에 따른 複雜한 變形擧動 때문에 解析的인 方法으로 이들 諸現象을 解析하는데는 많은 難點이 있다. 특히, 挫屈現象에 있어서는 幾何學的인 非線型性을 考慮해야 하기 때문에 이러한 경향은 더욱 짙다고 할 수 있다. shell 構造에 對한 종래의 연구결과[5], [6]를 보면 回轉 shell에 對하여 굽힘강성을 무시하고 소위 膜解析에서 出發하여 이들 굽힘강성을 고려한 비교적 간단한 문제에 對해서는 解析的인 方法으로 그 解를 구하여 왔으나 荷重이나 기하학적 형상이 복잡한 문제에 있어서는 그의 적용이 곤란했다. 그러나 최근 수치계산의 강력한 수단이 되는 大型電子計算機의 發達과 더불어 1960年代에는 F.D.M.[7], [8], F.E.M.[9], [10] 등으로 shell의 彈性問題를 해결하는 많은 硏究가 되어왔다. 그 이후 1970年代에는 F.D.M.[11]과 F.E.M.[12], [13], [14] 등의 方法으로 回轉shell의 挫屈問題를 다루는 많은 硏究가 되어왔다.

本 論文은 지금까지의 shell 理論[2][4][6]을 바탕으로 원주방향의 挫屈mode를 삼각함수로 가정하는 解析的인 方法과 有限要素法을 조화시켜 定式化 한 후 Program을 구성하였다. 그리고, 이 方法으로 各種 回轉 shell이 균일한 axial compression 또는 lateral pressure 등의 하중을 받을 경우의 挫屈問題를 해석하여 他의 理論 및 解析結果와 비교하여 本 解析法이 有效함을 보였다.

또한, shell 構造의 aspect ratio, boundary condition 또 buckling mode등이 回轉 shell의 挫屈荷重에 미치는 영향에 대하여 명확히 하였다. 그리고, 균일한 axial compression을 받는 cylindrical shell의 構造安定性의 측면에서 최적形狀을 求하였다.

Ⅱ. 有限變形問題의 有限要素法에 의한 定式化

本 節에서는 3次元 문제로, 유한변형 문제를 유한요소해석으로 定式化를 행하고저 한다.

挫屈問題를 지배하는 假想일의 방정식은 증분原理에 依해서 다음과 같이 求해 진다[3], [5].

$$\iiint \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dV+\iiint \sigma_{ij}^{(0)}\frac{1}{2}\delta(u_{k,i}\cdot u_{k,j})\,dV=0 \qquad (1)$$

이와같은 假想일의 방정식을 출발점으로 하여 다음과 같은 순서로 定式化를 수행한다.

(STEP Ⅰ) $\{U\}=[H]\{\alpha\}$

여기서, $\{U\}$: 요소內의 변위 Vector

$\{\alpha\}$: 일반화 좌표

$[H]$: 형상함수

(STEP Ⅱ) 절점의 변위 Vector를 $\{u\}$라 놓으면

$\{u\}=[A]\{\alpha\}$

그러므로, $\{\alpha\}=[A]^{-1}\{u\}$

(STEP Ⅲ) 변위 勾配 matrix $\frac{\partial}{\partial x_i}\{U\}\ (i=1,2,3)$ 을 求한다.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\{U\}=\frac{\partial}{\partial x_i}[H]\{\alpha\}=\frac{\partial}{\partial x_i}[H][A]^{-1}\{u\}$$

그러므로,
$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\{U\}\\ \frac{\partial}{\partial y}\{U\}\\ \frac{\partial}{\partial z}\{U\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}[H][A]^{-1}\\ \frac{\partial}{\partial y}[H][A]^{-1}\\ \frac{\partial}{\partial z}[H][A]^{-1}\end{Bmatrix}\{u\}=[G]\{u\}$$

여기서, $[G]$ matrix는 $[H][A]^{-1}$ matrix를 x, y, z에 關해 변형도의 2次成分과 일치 하도록 적당히 미분한 勾配 matrix이다.

(STEP Ⅳ) 요소의 변형도 성분 $\{\varepsilon_s\}$를 계산한다.

$$\{\varepsilon_s\}=[B_1]\{\alpha\}=[B_1][A]^{-1}\{u\}=[B]\{u\}$$

여기서 $[B]$matrix는 $[H][A]^{-1}$ matrix를 적당히 미분하여 미소변형에 따른 변형도 $\{\varepsilon_s\}$와 일치하도록 만든 matrix이다.

(STEP Ⅴ) 요소의 응력성분 $\{\sigma\}$를 계산한다.

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}=[D][B_1][A]^{-1}\{u\}=[D][B]\{u\}$$

여기서, $[D]$ matrix는 요소내의 應力變形度 관계식을 나다내는 matrix로 재료의 特性에서 도입되는 matrix이다.

이상과 같이 (STEP Ⅰ)~(STEP Ⅴ)의 과정으로 求해진 各各의 matrix를 式 (1)에 代入하면 式(1)은 다음식과 같이 表示된다.

$$\iiint [B]^T[D][B]\,dV+\iiint [G]^T[\sigma^0][G]\,dV=[k]+[k_G]=0 \qquad (2)$$

여기서, $[\sigma^0]$: 초기응력 matrix

$[k]$: 요소 강성 matrix$=\iint [B]^T[D][B]\,dV$

$[k_G]$: 요소의 기하학적 강성 matrix $=\iiint [G]^T[\sigma^0][G]\,dV$

Ⅲ. Shell 挫屈의 有限要素解析

복잡한 형상이나, 경계조건을 갖는 回轉 shell의 挫屈문제는 해석적인 방법으로 解를 구하기는 상당히 어렵다.

따라서, 本 論文에서는 子午線방향의 곡률을 무시한 원추대형요소를 사용하는 有限要素法과 원주방향의 挫屈 mode를 삼각함수로 가정하는 해석적인 방법을 조화시켜 回轉 shell의 挫屈문제를 해석하려 한다.

여기서, 각 要素는 節線으로 연결되어 있다〔Fig. 1〕

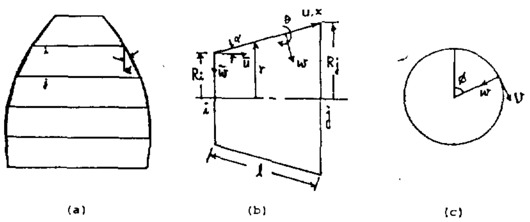

Fig. 1 Axisymmetric shell structure having two ring nodes

요소에서의 변위를 다음과 같이 가정한다.

$$u=(\alpha_1+\alpha_2\xi)\cos n\phi=u_n\cos n\phi$$
$$v=(\alpha_3+\alpha_4\xi)\sin n\phi=v_n\sin n\phi$$
$$w=(\alpha_5+\alpha_6\xi+\alpha_7\xi^2+\alpha_8\xi^3)\cos n\phi=w_n\cos n\phi \tag{3}$$

여기서, $\xi=x/l$

$$\text{따라서}\ \theta=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{l}\ \frac{\partial w}{\partial \xi}=\frac{1}{l}\ \frac{\partial w_n}{\partial \xi}\cos n\phi$$
$$=\theta_n\cos n\phi \tag{4}$$

이 변위성분에 대응하는 절선변위는 다음과 같다.

$$\{d\}=\begin{Bmatrix} d_{in}\times(\cos n\phi\ \text{또는}\ \sin n\phi) \\ d_{jn}\times(\cos n\phi\ \text{또는}\ \sin n\phi)\end{Bmatrix}$$
$$=\{u_{in}\cos n\phi\ \ v_{in}\sin n\phi\ \ w_{in}\cos n\phi\ \ \theta_{in}\cos n\phi$$
$$u_{jn}\cos n\phi\ \ v_{jn}\sin n\phi\ \ w_{jn}\cos n\phi\ \ \theta_{jn}\cos n\phi\}^T \tag{5}$$

式 (5)에서 $\{u_n\}_{\xi=0}=\{d_{in}\}$

$$\{u_n\}_{\xi=1}=\{d_{jn}\} \tag{6}$$

式 (3), (4) 그리고 (5)에서 $\{\alpha\}$를 소거하고, 요소변위를 節線변위로 나타내면 다음과 같다.

$$u=[u_i(1-\xi)+u_j\xi]\cos n\phi$$
$$v=[v_i(1-\xi)+v_j\xi]\sin n\phi$$
$$w=[(1-3\xi^2+2\xi^3)w_i+l(\xi-2\xi^2+\xi^3)\theta_i$$
$$+(3\xi^2-2\xi^3)w_j+l(-\xi^2+\xi^3)\theta_j]\cos n\phi$$
$$\theta=\Big[-\frac{6}{l}(\xi-\xi^2)w_i+(1-4\xi+3\xi^2)\theta_i$$
$$+\frac{6}{l}(\xi-\xi^2)w_j+(-2\xi+3\xi^2)\theta_j\Big]\cos n\phi \tag{7}$$

Shell의 理論 〔2〕, 〔6〕에 원추대要素의 기하학적 特性을 代入하여 다음과 같은 변형도—변위 관계식을 얻을 수 있다. 그런데, 여기서는 有限變形理論을 적용하기 때문에 변형도의 2次項도 포함된다. 그러나, ε_z, γ_{zx}, $\gamma_{\phi z}$가 변형 enery에 기여하는 量이 무시할 정도로 작다. 따라서 ε_z, γ_{zx}, $\gamma_{\phi z}$의 2次項은 무시한다.

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\phi\\ \gamma_{x\phi}\\ \chi_x\\ \chi_\phi\\ \chi_{x\phi}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} u_x \\ \frac{1}{r}v_\phi+\frac{1}{r}(u\sin\alpha-w\cos\alpha) \\ \frac{1}{r}u_\phi+v_x-\frac{1}{r}v\sin\alpha \\ w_{xx} \\ \frac{1}{r^2}w_{xx}+\frac{1}{r^2}v_\phi\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{r}w_x \\ 2\Big(\frac{1}{r}w_{xx}-\frac{1}{r^2}w_\phi\sin\alpha+\frac{1}{r}v_x\cos\alpha \\ -\frac{1}{r^2}v\sin\alpha\cos\alpha\Big)\end{Bmatrix}$$

$$+\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}w_x^2\\ \frac{1}{2}\Big(\frac{v}{r}+\frac{w_\phi}{r}\Big)^2\\ \frac{w_xw_\phi}{r}\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\{\varepsilon_s\}+\{\varepsilon_L\} \tag{8}$$

여기서, $\{\varepsilon_s\}$=微小變形에 기인하는 變形度

$\{\varepsilon_L\}$=大變形에 기인하는 變形度

Fig. 1에서 $r=R_i+(R_j-R_i)\xi$

또, 應力—變形度 관계를 나타내는 〔D〕 matrix는 平面應力狀態이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[D]=\frac{E\cdot t}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & t^2/12 & \nu t^2/12 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \nu t^2/12 & t^2/12 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu^2)\,t^2/24\end{bmatrix} \tag{9}$$

shell의 理論은 Kirchoff-Love의 假定과 shell의 두께가 다른 次元에 비하여 작다는 假定에서 出發하기 때문에 ε_z와 전단변형도 γ_{zx}, $\gamma_{\phi z}$는 0으로 볼 수 있다. 전단응력 τ_{zx}, $\tau_{\phi z}$ 그리고 法線應力 σ_θ는 理論上으로 存在하나 τ_{zx}, $\tau_{\phi z}$ 그리고 σ_z는 σ_x, σ_ϕ, $\tau_{x\phi}$에 비하여 무시할 수 있을 정도로 작다. 따라서, 近似的으로 平面應力狀態가 成立된다.

요소강성 matrix를 求하기 위해서는 $\{\varepsilon_s\}$가 고려된다. 전절의 (STEP IV)에 式 (7)(8)을 使用하여 $[B_0]$

matrix가 얻어진다. 여기서, $[B]=[B_0]\times(\cos n\phi$ 또는 $\sin n\phi)$

式 (2)에서

$$[k]=\iint[B]^T[D][B]dxdy=\iint[B]^T[D][B]rd\phi dx$$
$$=\int r[B_0]^T[D][B_0]\pi dx=\pi\cdot l\int_0^1 r[B_0]^T[D][B_0]d\xi \tag{10}$$

式 (10)에 式 (9)와 $[B_0]$ matrix를 代入하여 요소강성 matrix를 얻을 수 있게 된다.

기하학적 강성 matrix는 大變形에 기인하는 변형도 $\{\varepsilon_L\}$로 얻어진다.

$$\{\varepsilon_L\}=\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_x\\ \delta\varepsilon_\phi\\ \delta\gamma_{x\phi}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}w_x^2\\ \left(\frac{v}{r}+\frac{w_\phi}{r}\right)^2\\ 2\cdot\frac{w_xw_\phi}{r}\end{Bmatrix} \tag{11}$$

그런데, $\tau_{x\phi}=0$이므로 式 (11)은 다음과 같이 된다.

$$\{\varepsilon_L\}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}w_x\\ 0\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}0 & w_x\\ (v+w_\phi)/r & (v+w_\phi)/r\end{bmatrix} \tag{12}$$

여기서 前節의 기호를 使用하면,

$$\begin{Bmatrix}w_x\\ (v+w_\phi)/r\end{Bmatrix}=[G]\{u\} \tag{13}$$

따라서 式 (2)에서 기하학적 강성 matrix는 다음과 같다.

$$[k_G]=\iiint[G]^T[\sigma^0][G]dV$$
$$=\iiint[G]^T[\sigma^0][G]rd\phi dxdz$$
$$=\pi\cdot l\cdot t\int_0^1 r[G_0]^T[\sigma^0][G_0]d\xi \tag{14}$$

여기서 $[G]=[G_0]\times(\cos n\phi$ 또는 $\sin n\phi)$ $[B_0]$ matrix와 $[G_0]$ matrix는 APPENDIX에 수록하였다.

式 (10), (14)를 얻어내는 과정에서 $\sin n\phi$와 $\cos n\phi$의 項은 삼각함수의 직교성에 의하여 π가 된다.

여기서 $[k]$ matrix와 $[k_G]$ matrix는 요소좌표계에 대한 강성 matrix이므로 전체좌표계의 강성 matrix로 변환시켜야 한다. 변환 matrix는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \text{SYM.} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \end{pmatrix} \tag{15}$$

式 (15)에 의해서 式 (10), (14)를 전체좌표계의 강성행렬로 변환시킨 후, 각각의 요소에서 얻어진 요소 강성행렬로 전체 강성행렬 $[K]$와 전체 기하학적 강성행렬 $[K_G]$를 求하여 式 (2)에 代入함으로써 回轉 shell의 挫屈문제는 다음과 같은 固有値문제로 귀결된다.

$$|[K]+[K_G]|=0 \tag{16}$$

Ⅳ. 計算例 및 考察

本 論文에서는 Fig. 2에 보인 Model에 대하여 計算을 수행하였다.

<Model I>

균일한 axial comp.을 받는 두께가 일정한 cylindrical shell을 6가지의 서로 다른 경계조건에서 좌굴하중을 구하고, 結果를 Table 1에 수록하였다.

本 論文의 方法으로 해석한 결과가 Rehfield [16], Hoff and Soong[17], 그리고 Navaratna[12]등의 結果

Table 1 Effect of boundary conditions of cylindrical shell under axial compression

Boundary Conditions	Buckling Coeff. $\lambda_b=\sigma_{cr}/\sigma_{CL}$			
	Rehfield	Hoff, Soong	Navaratna	Author
$w=M_s=N_s=N_{s\theta}=0$	$\frac{1}{2}+0(n^2)$	0.505 (3)	0.5036 (2)	0.5061 (2) 1.22%
$w=M_s=u=N_{s\theta}=0$	$\frac{1}{2}+0(n^2)$	0.505 (3)	0.5037 (2)	0.5060 (2) 1.2%
$w=M_s=N_s=v=0$	1.00	1.00	1.055 (8)	1.0234(10) 2.34%
$w=M_s=u=v=0$	1.00	1.001(14)	1.040 (8)	1.0193 (8) 2.43%
$Q_s=w'=u=N_{s\theta}=0$			1.030 (2)	1.0340 (2) 3.4%
$Q_s=M_s=N_s=N_{s\theta}=1$	0.38	0.370(14)	0.3798(15)	0.3859(17) 1.55%

* 좌굴 하중 밑의 숫자는, Rehfield와 비교한 Error(%) * ( )속의 번호는 원주 방향의 mode No.

* $L/R=1.75$, $R/t=800$ * $L/2$에 20요소 * $\sigma_{CL}=[E/\{3(1-\nu^2)\}^{\frac{1}{2}}]\cdot(t/R)$, $E=10^7$ psi, $\nu=0.3$

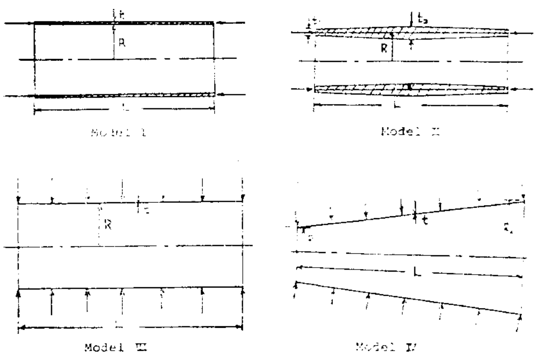

Fig. 2 Types of calculation models

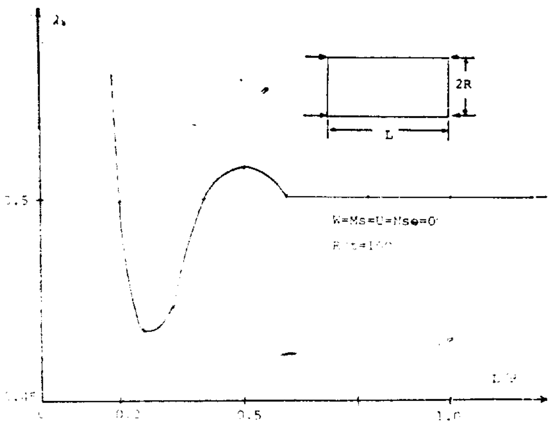

Fig. 3 Buckling coefficient of axially compessed cylindrical shell

와 매우 잘 一致하고 있음을 보여준다.

또, 경계조건이 $w=M_s=u=N_{s\theta}=0$인 경우, $L/R=0.25$ 부근에서 좌굴하중(λ_b)이 급격히 감소하는 경향을 보인다(Fig. 3). 그리고, $L/R>0.6$에서는 거의 일정한 좌굴하중 (λ_b)을 갖는다.

또한, 경계조건이 $Q_s=M_s=N_s=N_{s\theta}=0$인 경우에는 $L/R>2.0$이면 거의 같은 좌굴하중 (λ_b)을 갖는다 (Fig. 4).

L/R이 어느정도 커지면 일정한 좌굴하중 (λ_b)을 갖는 현상은 다른 경계조 건에서도 마찬가지이다.

〈Model II〉

Table 2에서 보면, 두께가 중앙부로 갈수록 線型的으로 증가하는 cylindrical shell이 균일한 axia lcomp. 을 받을 경우, 평균두께가 같은 일정한 두께를 갖는 cylindrical shell의 좌굴하중 (λ_b)보다 큰 값을 갖음을 알 수 있다. 또, 이러한 경향은 두께의 증가량이 커질수록 커진다.

〈Model III〉

두께가 일정한 cylindrical shell에 균일한 外壓이 작

Table 2 Buckling coefficient of cylindrical shell with linealy increasing thickness under axial compression

Thickness		$\lambda_b(=\sigma_{cr}/\sigma_{cL})$
$t_1=1.0$	$t_2=1.0$	0.5019(1)
$t_1=0.5$	$t_2=1.5$	0.5627(2)
$t_1=0.0$	$t_2=2.0$	0.5929(9)

* 경계조건 $w=M_s=N_s=N_{s\theta}=0$
* $R=100$in, $L=160$in, $E=10^7$psi, $\nu=0.3$
* $L/2$에 20요소

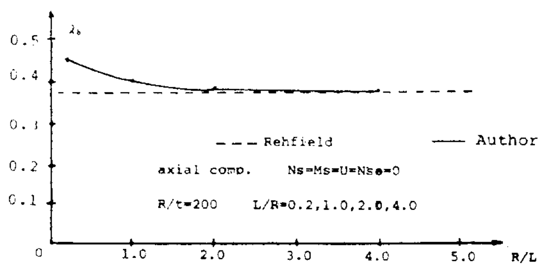

Fig. 4 Buckling coefficient of compressed cylindrical shell

Table 3 Boundary conditions of cylindrical shell and effect of L/R under uniform external pressure(psi)

Boundary Condi. \ L/R	0.2	0.5	1.0	2.0	4.0
$u=v=w=w'=0$	1225(19)	268(12)	132(9)	67(7)	
$u=N_{s\theta}=w=w'=0$	1215(19)	281(12)	130(9)	66(7)	
$u=v=w=M_s=0$	667(13)	238(12)	124(9)	65(7)	
$N_s=v=w=w'=0$	1218(19)	266(12)	112(8)	51(6)	26(4)
$N_s=v=w=M_s=0$	661(13)	212(11)	99(8)	48(6)	25(4)

* ( ) 속의 번호는 원주 방향의 mode No.
* $t=1.0$in, $R=100$in, $E=10^7$psi, $\nu=0.3$
* L에 20요소

용할 때, 여러가지 경계조건과 L/R의 변화에 따른 좌굴하중을 Table 3에 수록하였다. Table 3과 Fig. 5에서, L/R이 커질수록 원주방향의 mode No.가 감소함을 알 수 있다. 또, 균일한 外壓을 받는 경우, 경계조건에 따라서 좌굴하중이 달라지나 $L/R>2.0$이면 $u=0$과 $N_s=0$으로 경계조건이 양분된다. 즉 길이가 긴($L/R>2.0$) cylindrical shell은 $u=0$을 포함하는 경계조

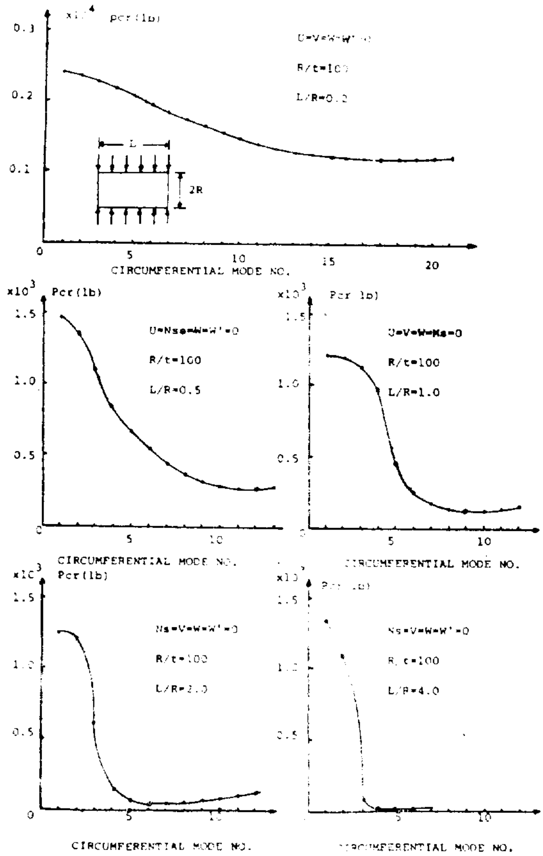

Fig. 5 The change of buckling modes of cylindrical shell under uniform external pressure

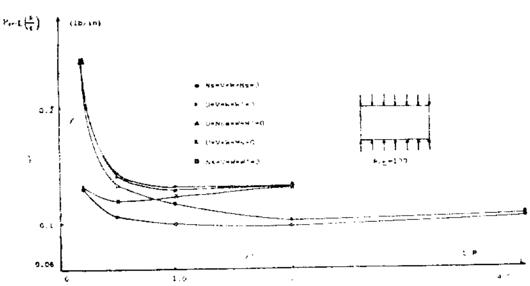

Fig. 6 Boundary effect of laterally pressed cylindrical shell

건을 갖는 경우는 모두 일정한 좌굴하중 ($P_{cr}\times L$)을 갖는다. 그리고 $N_s=0$을 포함하는 경계조건을 갖는 경우는 모두 같은 좌굴하중 ($P_{cr}\times L$)을 갖는다(Fig. 6). 이러한 結果로부터, L/R이 커질수록 양단에서의 moment의 효과는 줄어들고, 길이 방향의 구속여부만이 좌굴문제를 지배하게 됨을 알 수 있다.

〈Model IV〉

Table 4는 균일한 外壓을 받는 conical shell의 좌굴하중을 나타내고 있는데, 本 論文의 結果가 Volmir [18]나 Ross [13]의 結果와 거의 일치함을 보여주고 있다.

Table 4 Buckling load of conical shell under uniform external pressure

	simple—simple	fixed—fixed
Volmir formula	350	
Ross	327 (4)	433 (4)
Author	329.75(4)	430.67(4)

* ( )속의 번호는 원주방향의 mode No.
* 단순—단순 ; 양단에서 $v=w=0$,
 고정—고정 ; 양단에서 $u=v=w=w'=0$
* $t=1.0$in, $R_1=25$in, $R_2=50$in, $L=141.782$in.
* L에 20요소

Table 5 Buckling load of cylindrical shell under uniform external pressure

R \ B.C.	simple—simple	fixed—fixed
25(in)	615.27(3)	804.53(3)
50(in)	200.94(4)	268.75(5)

* Table 4와 同一

Table 5는 Model III을 계산한 結果이다.

Table 4와 Table 5에서 균일한 外壓을 받는 conical shell의 좌굴하중과, 큰 半徑을 갖는 cylindrical shell의 좌굴하중 사이의 값을 갖으며, 큰 半徑을 갖는

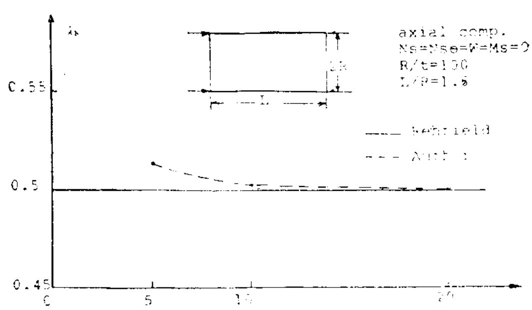

Fig. 7 Number of element in $L/2$

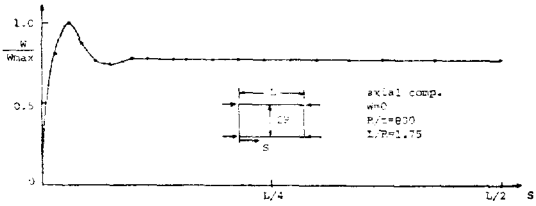

Fig. 8 Buckling mode

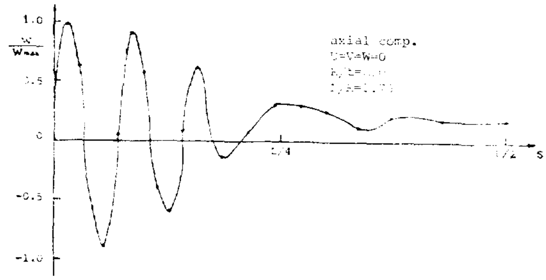

Fig. 13 Buckling mode

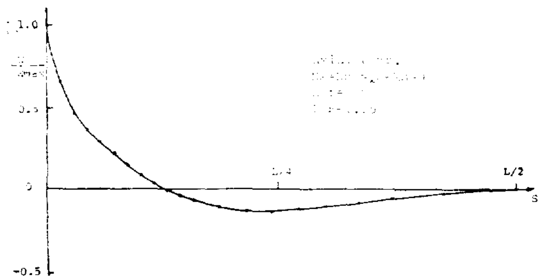

Fig. 9 Buckling mode

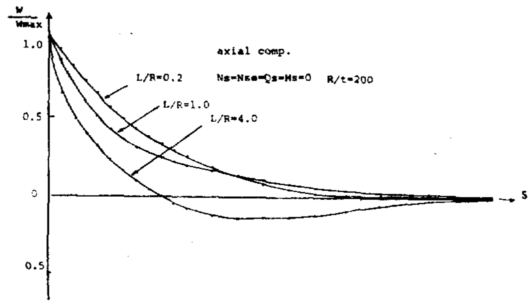

Fig. 14 Buckling modes

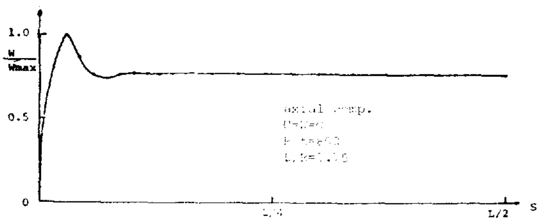

Fig. 10 Buckling mode

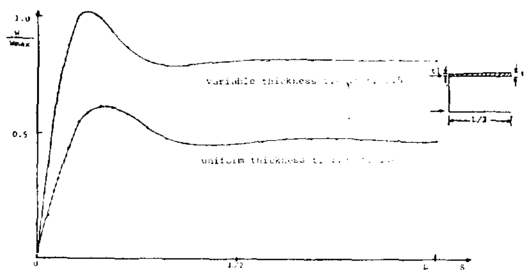

Fig. 15 Buckling mode of axially compressed shell with variable thickness

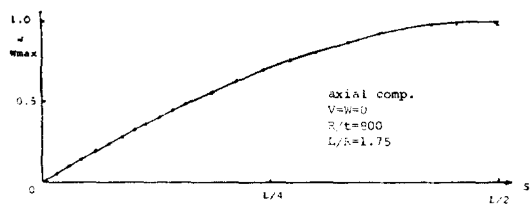

Fig. 11 Buckling mode

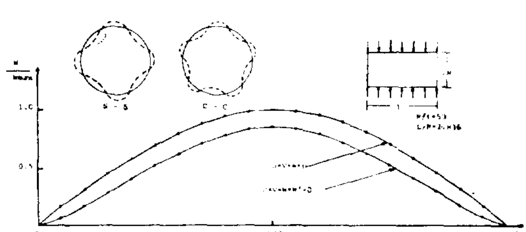

Fig. 16 Buckling modes of cylindrical shell under uniform external pressure

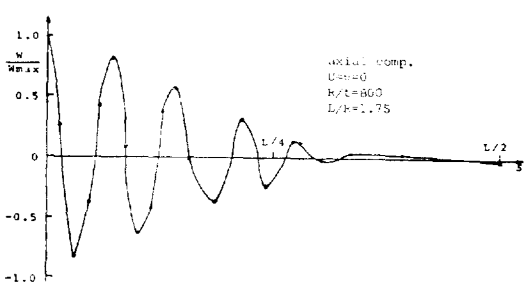

Fig. 12 Buckling mode

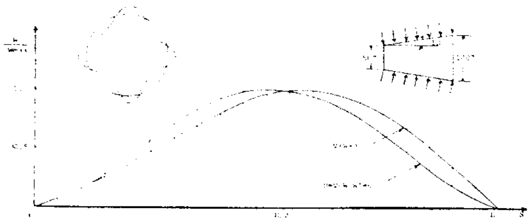

Fig. 17 Buckling modes of conical shell under uniform external pressure

cylindrical shell의 좌굴하중에 가까운 값을 갖음을 알 수 있다. Fig. 5는 요소數에 따른 수렴도를 나타낸 것이다. $L/2$에 5요소인 경우에 약 3%의 오차, 10요소인 경우에 1%의 오차를 보이고 있다. 따라서 요소수는 過多하게 늘려줄 필요는 없다. 또, 균일한 axial compression을 받는 cylindrical shell은 兩端에서 mode의 變化가 심하기 때문에 要素分割을 양단에서 많이 해주어야 하고, 중앙부에서는 mode의 변화가 작기 때문에 많은 요소로 분할할 필요가 없다.

여러가지 경우에 대한 좌굴 mode는 Fig. 8~Fig. 17에 收錄하였다.

V. 結 言

以上의 計算例와 考察에서 다음과 같은 結論을 얻어낼 수 있다.

1) 균일한을 axial compression을 받는 두께가 일정한 cylindrical shell은 길이와 반경과의 비가 2.0이상인 경우 일정한 좌굴하중 (λ_b)을 갖는다.

2) 두께가 중앙부로 갈수록 선형적으로 증가하는 cylindrical shell이 균일한 axial compression을 받는 경우, 평균두께가 같은, 일정한 두께를 갖는 cylindrical shell의 좌굴하중 보다 큰 값을 갖으며 폭의 기울기가 클수록 그 영향은 크다.

3) 균일한 外壓을 받는 cylindrical shell은 길이와 반경과의 비가 커질수록 원주방향의 좌굴 mode數가 감소한다.

4) 균일한 外壓을 받는 cylindrical shell에서, 길이와 반경과의 비가 2.0이 넘을 때 $u=0$을 포함하는 경계조건을 갖는 경우는 모두 일정한 좌굴하중 $P_{cr}\cdot L$을 갖고, $N_s=0$을 포함하는 경계조건을 갖는 경우는 모두 같은 좌굴하중 $P_{cr}\cdot L$을 갖는다.

5) 균일한 外壓을 받는 conical shell의 좌굴하중은 conical shell의 큰 반경을 반경으로 갖는 cylindrical shell의 좌굴하중보다 크고, conical shell의 작은 반경을 반경으로 갖는 cylindrical shell의 좌굴하중보다 작다. 그리고, 큰 반경의 cylindrical shell의 좌굴하중에 가까운 값을 갖는다.

이상 회전 shell의 좌굴강도에 대한 기초적인 검토를 수행하였으나 초기처짐등의 initial imperfection, 좌굴후의 거동 및 following force등의 영향에 관한 금후의 연구가 요청된다.

參 考 文 獻

〔1〕 S.P. Timoshenko and J.M. Gere, "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill, 1961.

〔2〕 V.V. Novoghilov, "Thin Shell Theory", Wolters-Noordhoff Publishing Groningen, 1970 The Netherlands.

〔3〕 鷲津久一郎, "弾性學の變分原理概論", Computer による構造工學講座 Ⅱ-3-A 培風館, 1971.

〔4〕 三股重也, "シエル構造解析" Computer による構造工學講座 Ⅱ-6-A 培風館, 1974.

〔5〕 川井忠彦, "座屈問題解析", Computer による構造工學講座 Ⅱ-6-13 培風館, 1974.

〔6〕 Washizu, "Variational Method in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, 1975.

〔7〕 Izkak Sheinman and Yair Tene, "Buckling in Segmented Shells of Revolution Subjected to Symmetric and Antisymmetric Loads", AIAA Jour., Vol. 12, No. 1, Jan. 1974 pp. 15-20.

〔8〕 P.P. Radkowski, R.M. Davis and M.R. Bolduc, "Numerical Analysis of Equation of Thin Shells of Revolution", ARS Jour. Jan. 1962 pp. 36-41.

〔9〕 P.E. Grafton and D.R. Strome, "Analysis of Axisymmetric Shells by The Direct Stiffness Method", AIAA Jour., Vol. 1, No. 10, 1963 pp. 2342-2347.

〔10〕 J.H. Percy, T.H.H. Pian, S. Klein and D.R. Navaratna, "Application of Matrix Displacement Method to Linear Elastic Analysis of Shells of Revolution", AIAA Jour., Vol. 3, No. 11, 1965 pp. 2138-2145.

〔11〕 R.E. Jones and D.R. Strome, "Direct Stiffness Method Analysis of Shells of Revolution Utilizing Curved Elements", AIAA Jour., Vol. 4, No.9, 1966 pp. 1519-1525.

〔12〕 D.R. Navaratna, T.H.H. Pian and E.A. Witner, "Stability Analysis of shells of Revolution by The Finite Elements Method", AIAA Jour. Vol. 6, No. 2, 1968 pp. 335-361.

〔13〕 C.T.F. Ross, "Lobar Buckling of Thin-Walled Cylindrical and Truncated Conical Shells under External Pressure," Jour. of Ship Research, Vol. 18, No. 4, 1974 pp. 272-277.

〔14〕 C.T.F. Ross, "Vibration and Instability of Ring-Reinforced Circular Cylindrical and Conical Shells", Jour. of Ship, Vol. 20, No. 1, 1976, pp. 22-31.

〔15〕 David Bushnell, "Buckling of Shells-Pitfall for Designers", AIAA Jour., Vol. 19, No. 9, 1981. pp. 1183-1226.

〔16〕 L.W. Rehfield, "Futher Study of the Effect of Edge Restraint on the Buckling of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells", SUDAER 237, May 1965, Stanford Univ., Stanford, Calif.

〔17〕 N.J. Hoff and T.C. Soong, "Buckling of Circular Cylindrical Shells in Axial Compression," International Jour. Mechanical Sciences, Vol. 7, July 1965, pp. 489~520.

〔18〕 A.S. Volmir, Stability of Elastic System, Moscow 1963, also translated into English by the Cearling house for Federal Scientific and Technical Information, A.D. 628-508.

APPENDIX I: $[B_0]$ Matrix

$$
\begin{pmatrix}
-1/l & 0 & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 & 0 \\
\frac{(1-\xi)\sin\alpha}{r} & n(1-\xi)/r & -(1-3\xi^2+2\xi^3)\times\cos\alpha/r & -l(\xi-2\xi^2+\xi^3)\times\cos\alpha/r & \xi\sin\alpha/r & n\xi/r & -(3\xi^2-2\xi^3)\times\cos\alpha/r & -l(-\xi^2+\xi^3)\times\cos\alpha/r \\
\frac{-n(1-\xi)}{r} & \{-1/l-(1-\xi)\sin\alpha/r\} & 0 & 0 & -n\xi/r & (1/l-\xi\sin\alpha/r) & 0 & 0 \\
0 & 0 & (-6+12\xi)/l^2 & (-4+6\xi)/l & 0 & 0 & (6-12\xi)/l^2 & (-2+6\xi)/l \\
0 & \frac{n(1-\xi)\cos\alpha}{r^2} & \left\{-\frac{n^2}{r^2}(1-3\xi^2+2\xi^3)+\frac{1}{rl}(-6\xi+6\xi^2)\sin\alpha\right\} & \left\{-\frac{n^2}{r^2}l(\xi-2\xi^2+\xi^3)+\frac{1}{r}(1-4\xi+3\xi^2)\sin\alpha\right\} & 0 & n\xi\cos\alpha/r^2 & \left\{-\frac{n^2}{r^2}(3\xi^2-2\xi^3)+\frac{1}{rl}(6\xi-6\xi^2)\sin\alpha\right\} & \left\{-\frac{n^2 l}{r^2}(-\xi^2+\xi^3)+\frac{1}{r}(-2\xi+3\xi^2)\sin\alpha\right\} \\
0 & 2\left\{-\cos\alpha/rl-\frac{(1-\xi)}{r^2}\cos\alpha\sin\alpha\right\} & 2\left\{-\frac{n}{r}(-6\xi+6\xi^2)/rl+\frac{n}{r^2}(1-3\xi^2+2\xi^3)\times\sin\alpha\right\} & 2\left\{-\frac{n}{r}(1-4\xi+3\xi^2)+\frac{nl}{r^2}(\xi-2\xi^2+\xi^3)\times\sin\alpha\right\} & 0 & 2(\cos\alpha/rl-\xi\cos\alpha\sin\alpha/r^2) & 2\left\{-\frac{n}{rl}(6\xi-6\xi^2)+\frac{n}{r^2}(3\xi^2-2\xi^3)\times\sin\alpha\right\} & 2\left\{-\frac{n}{r}(-2\xi+3\xi^2)+\frac{nl}{r^2}(-\xi^2+\xi^3)\times\sin\alpha\right\}
\end{pmatrix}
$$

APPENDIX II: $[G_0]$ Matrix

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \frac{1}{l}(-6\xi+6\xi^2) & (1-4\xi+3\xi^2) & 0 & 0 & \frac{1}{l}(6\xi-6\xi^2) & (-2\xi+3\xi^2) \\
0 & (1-\xi)/r & -\frac{n}{r}(1-3\xi^2+2\xi^3) & -\frac{nl}{r}(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 0 & \xi/r & -\frac{n}{r}(3\xi^2-2\xi^3) & -\frac{nl}{r}(-\xi^2+\xi^3)
\end{pmatrix}
$$