論文 84-21-3-1

마할라노비스 距離의 모멘트에 對한 多項式 表現의 簡略化

(A Simplification of Polynomial Representations for the Moments of the Mahalanobis Distances)

金 秀 重*, 洪 再 根*

(Soo Joong Kim and Jae Keun Hong)

要 約

集團內 마할라노비스 距離가 센트럴 카이-제곱 分布를 함은 잘 알려진 事實이다. 本 論文에서는 集團間 마할라노비스 距離가 논-센트럴 카이-제곱 分布를 함을 보이고, 또한 그 모멘트들을 係數들이 簡單한 循環關係를 갖는 多項式으로 簡略히 表現하여, 모멘트를 利用한 認識이나 係數推定等에 利用되기 쉽게 하였다.

Abstract

It is investigated that Mahalanobis distances are invariant under a proper transformation and interest MDs are distributed as non-central chi-square while it is well known that intraset MDs are distributed as central chi-square. And their moments have been expressed as simple polynomials whose coefficients satisfy straightforward recursive relations.

I. 序 論

統計的으로 패턴(pattern)을 認識할 境遇 마할라노비스 距離(Mahalanobis distance)는 매우 重要한 役割을 하고 있다. 패턴벡터들이 같은 先驗確率 (priori probability)을 갖는 正規分布를 하는 境遇, 이것은 最適決定函數[1,2]와 잘못 認識될 確率(error probability)[1,3]을 나타내기도 한다.

本 論文에서는 正規分布를 하는 패턴벡터들에 적절한 線形變換을 行하여 MD들이 패턴벡터의 次元과 같은 自由度를 갖는 카이-제곱(chi-square) 分布를 이루고 있음을 보였고, 그 모멘트들을 多項式으로 簡略히 表現하여 利用이 쉽게 하였다. 또한 係數들의 循環關係도 구하였다.

*正會員, 慶北大學校 工科大學 電子工學科

(Dept. of Electronics Eng., Kyung Pook National Univ.)

接受日字: 1983年 6月 10日

II. 마할라노비스 距離

集團 ω_1과 ω_2에 屬하는 n-次元의 패턴벡터들이 N $(\mathbf{m}_j, \mathbf{C}_j)$의 正規分布를 한다면, 그 密度函數는

$$p(\mathbf{x}|\omega_j) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot |\mathbf{C}_j|^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_j)^T \mathbf{C}_j^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_j)]$$

이고, 다음과 같이 定義되는

$$r_j(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j) = (\mathbf{x}-\mathbf{m}_j)^T \mathbf{C}_j^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_j), \qquad \mathbf{x} \in \omega_j$$

MD는 集團內(intraset) MD이며, 이것은 各 패턴벡터들이 集團中心과 이루는 幾何學的 距離 $||\mathbf{x}-\mathbf{m}_j||$의, 그 集團의 크기 $|\mathbf{C}_j|$에 對한 比를 나타낸다.

集團間(interset) MD는 다음의 式

$r_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j) = (\mathbf{x}-\mathbf{m}_j)^T C_i^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_j)$, $\mathbf{x} \in \omega_i$, $i \neq j$

으로 定義되며, 이것은 集團 ω_i에 屬하는 各 패턴벡터들이 集團 ω_j의 中心과 이루는 幾何學的 距離의, ω_i의 크기에 對한 比를 나타낸다.

주어진 패턴벡터들에 $\mathbf{y}=\mathbf{P}^T\mathbf{x}$의 線形變換을 行하여도 變換된 패턴벡터들은 亦是 $N(\boldsymbol{\mu}_j, \hat{C}_j)$의 正規分布를 하며, 變換後의 平均벡터 $\boldsymbol{\mu}_j$와 共分散行列 $\hat{C}_j$은 다음과 같다.[8]

$\boldsymbol{\mu}_j = \mathbf{P}^T\mathbf{m}_j$, $\hat{C}_j = \mathbf{P}^T C_j \mathbf{P}$

變換後의 마할라노비스 距離를 구해보면

$$\begin{aligned} r_i(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_j) &= (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_j)^T \hat{C}_i^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_j) \\ &= [\mathbf{P}^T(\mathbf{x}-\mathbf{m}_j)]^T[\mathbf{P}^T C_i \mathbf{P}]^{-1}[\mathbf{P}^T(\mathbf{x}-\mathbf{m}_j)] \\ &= (\mathbf{x}-\mathbf{m}_j)^T C_i^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_j) \\ &= r_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j) \end{aligned}$$

이다. 즉 變換後에도 MD는 不變이다. 만일 $(C_1^{-1}C_2)\mathbf{P} = \mathbf{P}\Lambda$, $\hat{C}_1 = \mathbf{P}^T C_1 \mathbf{P} = \mathbf{I}$이면, $\hat{C}_2 = \mathbf{P}^T C_2 \mathbf{P} = \Lambda$이다.

즉 $\mathbf{P}$가 $C_1^{-1}C_2$의 型式行列(modal matrix)이고 各 固有벡터의 크기(norm)를 $\hat{C}_1$이 單位行列이 되게 하면, $\hat{C}_2$은 $C_1^{-1}C_2$의 固有値들로 된 對角線行列이 된다.

이와 같은 變換을 行한 後에는 各 패턴벡터들이 $N(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{I})$와 $N(\boldsymbol{\mu}_2, \Lambda)$의 正規分布를 하게 되어, 各 成分들間에는 相關關係가 없게 된다. 즉 統計的으로 獨立(statistically independent)이다.

만일 $C_1 = C_2$이면 $\mathbf{P}$는 $C_1 = C_2$의 規準化된(normalized) 型式行列이고, 變換後 $\hat{C}_1$과 $\hat{C}_2$이 모두 單位行列이 되어 문제는 더욱 단순해진다.

Ⅲ. 集團內 MD와 모멘트

變換後 $\mathbf{y}$가 $N(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{I})$ 또는 $N(\boldsymbol{\mu}_2, \Lambda)$의 正規分布를 하므로, $(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_j)$는 $N(\mathbf{O}, \mathbf{I})$ 또는 $N(\mathbf{O}, \Lambda)$의 正規分布를 하게 된다. 따라서 다음과 같이 주어지는 集團內 MD

$$r_1(\mathbf{x}, \mathbf{m}_1) = (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_1)^T(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_1) = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_{1i})^2, \quad \mathbf{y} \in \omega_1$$

$$r_2(\mathbf{x}, \mathbf{m}_2) = (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_2)^T \Lambda^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_2) = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_{2i})^2/\lambda_i, \quad \mathbf{y} \in \omega_2$$

는 自由度가 n인 센트럴 카이-제곱(central chi-square) 分布[5~7]를 하며[7], 그 密度函數는

$$p[r_j(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j)] = \frac{r^{(n-2)/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \cdot e^{-r/2}, \quad 0 \leq r < \infty$$

이고, 모멘트 發生函數[5~7]는

$$M_r(v) = E\{e^{vr}\} = (1-2v)^{-n/2}$$

이다. 그리고 $r_j(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j)$의 k次 모멘트는

$$E_j\{r^k(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j)\} = M_r^{(k)}(0)$$

$$= \frac{2^k\Gamma(\frac{n}{2}+k)}{\Gamma(n/2)}$$

이다.[6] 이것은 패턴벡터의 次元 n만으로 表現되며, 共分散行列 또는 平均벡터와는 無關하다. 또한 이것은 n의 k次 多項式이므로 $E_j\{r^k(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j)\}$를

$$\begin{aligned} E_j\{r^k(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j)\} &= 2^k\left(\frac{n}{2}+k-1\right)\left(\frac{n}{2}+k-2\right)\cdots \\ &\quad \cdots\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot\frac{n}{2} \\ &= n(n+2)(n+4)\cdots(n+2k-2) \\ &= \sum_{t=0}^{k} a(k, t)\cdot n^t \qquad (1) \end{aligned}$$

라 두면 $a(0,0)=1$이고 $a(k,t)$는 定理 1의 간단한 循環關係를 갖는다.

(定理1) $0 \leq t \leq k$이면

$$a(k, t) = a(k-1, t-1) + 2(k-1)\cdot a(k-1, t) \qquad (2)$$

이고, $t<0$이거나 $t>k$이면 $a(k,t)=0$이다.

(證明) 부록 1 참조.

4次까지의 모멘트를 구하면 다음과 같다.

$E_j\{r(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j)\} = n$

$E_j\{r^2(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j)\} = 2n+n^2$

$E_j\{r^3(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j)\} = 8n+6n^2+n^3$

$E_j\{r^4(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j)\} = 48n+44n^2+12n^3+n^4$

Ⅳ. 集團間 MD와 모멘트

變換後 ω_1에 屬하는 $\mathbf{y}$는 $N(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{I})$의 正規分布를 하므로 $(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_2)$는 $N(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{I})$의 正規分布를 한다.

또한 ω_2에 屬하는 $\mathbf{y}$는 $N(\boldsymbol{\mu}_2, \Lambda)$의 正規分布를 하므로 $(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_1)$은 $N(\boldsymbol{\mu}_2-\boldsymbol{\mu}_1, \Lambda)$의 正規分布를 한다.

따라서 다음과 같이 주어지는 集團間 MD

$$r_1(\mathbf{x}, \mathbf{m}_2) = (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_2)^T(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_2) = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_{2i})^2, \quad \mathbf{y} \in \omega_1$$

$$r_2(\mathbf{x}, \mathbf{m}_1) = (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_1)^T \Lambda^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}_1) = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_{1i})^2/\lambda_i, \quad \mathbf{y} \in \omega_2$$

는 自由度가 n인 논-센트럴 카이-제곱(non-central chi-square) 分布[7,8]를 하며[8], 그 密度函數는

$$p[r_i(x, m_j)] = e^{-q}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^m r^{(2m+n-2)/2}e^{-r/2}}{m!\,2^{(2m+n)/2}\Gamma\left(\frac{2m+n}{2}\right)}, \quad 0 \leq r < \infty$$

이다. 여기서 q는 非中心 媒介變數(non-centrality parameter)로

$$q_i = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_i-\boldsymbol{\mu}_j)^T \hat{C}_i^{-1}(\boldsymbol{\mu}_i-\boldsymbol{\mu}_j) \qquad (3)$$

이고, 모멘트 發生函數[7,8]는

$$M_r(v) = e^{-q}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^m}{m!}(1-2v)^{-(2m+n)/2}$$

이다. 이로부터 $r_i(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j)$의 k次 모멘트를 구하기 위

하여

$$M_r^{(k)}(v)=e^{-q}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{q^m}{m!}\left(\sum_{t=0}^{k}b(k,t)\cdot m^t\right)\cdot (1-2v)^{-(2m+n+2k)/2}\right] \qquad (4)$$

라 두면 $b(0,0)=1$이고 $b(k,t)$는 定理 2의 循環關係를 갖는다.

(定理2) $0\leq t\leq k$이면

$$b(k,t)=2\cdot b(k-1,t-1)+(n+2k-2)\cdot b(k-1,t) \qquad (5)$$

이고, $t<0$이거나 $t>k$이면 $b(k,t)=0$이다.

(證明) 부록2 참조.

위의 式을 利用하여 $r_i(\mathbf{x},\mathbf{m}_j)$의 모멘트를 구하면

$$E_i\{r^k(\mathbf{x},\mathbf{m}_j)\}=M_r^{(k)}(0)$$
$$=e^{-q_i}\sum_{t=0}^{k}\left[b(k,t)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{m^t}{m!}q_i^m\right)\right] \qquad (6)$$

이다. 좀 더 簡略히 하기 위하여

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^t}{m!}q_i^m=\sum_{h=0}^{t}c(t,h)\cdot q^h e^{q_i} \qquad (7)$$

라 두면 $c(0,0)=1$이고 $c(t,h)$도 亦是 定理 3의 循環關係를 갖는다.

(定理3) $0\leq h\leq t$이면

$$c(t,h)=c(t-1,h-1)+h\cdot c(t-1,h) \qquad (8)$$

이고, $h<0$이거나 $h>t$이면 $c(t,h)=0$이다.

(證明) 부록3 참조.

式(7)을 式(6)에 代入하여

$$E_i\{r^k(\mathbf{x},\mathbf{m}_j)\}=\sum_{t=h}^{k}b(k,t)\cdot c(t,h)q_i^h$$
$$=\sum_{h=0}^{k}d(k,h)\cdot q_i^h \qquad (9)$$

이라 두면 $d(0,0)=1$이고, $d(k,h)$ 또한 定理 4의 循環關係를 갖는다.

(定理4) $0\leq h\leq k$이면

$$d(k,h)=2\cdot d(k-1,h-1)+(2k+2h+n-2)\cdot d(k-1,h) \qquad (10)$$

이다.

(證明) 부록4 참조.

以上을 整理하면, 集團間 MD의 k次 모멘트는 式(9)와 같이 q의 k次 多項式으로 簡略히 表現되며, q는 式(3)에 나타낸 바와 같이

$$q_1=\sum_{i=1}^{n}(\mu_{1i}-\mu_{2i})^2/2,\quad q_2=\sum_{i=1}^{n}(\mu_{2i}-\mu_{1i})^2/2\lambda_i$$

이다. 3次까지의 모멘트를 구하면 다음과 같다.

$$E_i\{r(\mathbf{x},\mathbf{m}_j)\}=n+2q_i$$
$$E_i\{r^2(\mathbf{x},\mathbf{m}_j)\}=n(n+2)+4(n+2)q_i+4q_i^2$$
$$E_i\{r^3(\mathbf{x},\mathbf{m}_j)\}=n(n+2)(n+4)+6(n+2)(n+4)q_i+12(n+4)q_i^2+8q_i^3$$

V. 應 用 例

集團 ω_1에 屬하는 패턴벡터들이 $N(\mu_1,\Lambda)$의 正規分布를 하고, 集團 ω_2에 屬하는 패턴벡터들이 $N(\mu_2, I)$의 正規分布를 하는 境遇, 平行移動시켜 다음과 같이 全体의 中心을 原點에 두고

$$E\{\mathbf{x}\}=P_1E_1\{\mathbf{x}\}+P_2E_2\{\mathbf{x}\}=0$$

또한 先驗確率의 比를 다음과 같이 r이라 두면

$$r=\frac{P_1}{P_2}=\frac{P(\omega_1)}{P(\omega_2)}$$

아래의 關係를 얻을 수 있고, 이것은 Fukunaga[9] 가 유도한 것과 表現은 다르나 內容은 같다.

$$E\{x_i^2\}=r\mu_i^2+(1+r)^{-1}(r\lambda_i+1)$$
$$E\{x_i^3\}=r(1-r)\mu_i^3+3r(1+r)^{-1}\mu_i(\lambda_i-1)$$
$$E\{x_i^4\}=r(1-r+r^2)\mu_i^4+6r(1+r)^{-1}\mu_i^2(\lambda_i+r)+3(1+r)^{-1}(r\lambda_i^2+1)$$
$$E\{x_ix_j\}=r\mu_i\mu_j$$
$$E\{x_i^2x_j\}=r(1-r)\mu_i^2\mu_j+r(1+r)^{-1}\mu_j(\lambda_i-1)$$

여기서 x_i는 패턴벡터 $\mathbf{x}$의 i번째 成分이며, μ_i와 λ_i는 ω_1에 屬하는 $\mathbf{x}$의 i번째 平均値와 分散이다.

위의 關係式은, 各 모드의 共分散行列 C_1, C_2는 알고 있으나 各 先驗確率 P_1, P_2와 平均벡터 μ_1, μ_2를 모르는 混合된 모드(mixed mode)인 正規分布 패턴의 媒介變數 推定(parameter estimation)에 利用될 수 있다.

VI. 結 論

正規分布를 하는 패턴벡터들을 적절히 線形變換하여, 마할라노비스 距離가 카이-제곱 分布를 함을 알게 되었으며, 이들의 高次 모멘트를 다음과 같이 간단한 多項式으로 表現하였다.

$$E_j\{r^k(\mathbf{x},\mathbf{m}_j)\}=\sum_{t=0}^{k}a(k,t)\cdot n^t$$
$$E_i\{r^k(\mathbf{x},\mathbf{m}_j)\}=\sum_{h=0}^{k}d(k,h)\cdot q_i^h$$

또한 그 係數들의 循環關係는

$$a(k,t)=a(k-1,t-1)+2(k-1)\cdot a(k-1,t)$$
$$d(k,h)=2d(k-1,h-1)+(2k+2h+n-2)\cdot d(k-1,h)$$

와 같이 表現되었다.

高次 모멘트에 대한 이와 같은 간단한 表現式은 모멘트를 利用한 認識이나 係數推定에 利用되리라 생각된다.

附 録

1. 定理 1의 證明

(證明) $r_j(\mathbf{x},\mathbf{m}_j)$의 $(k-1)$次 모멘트를 式(1)과 같이 表現하면

$$E_i\{r^{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_i)\} = n(n+2)(n+4)\cdots(n+2k-4)$$
$$= \sum_{t=0}^{k-1} a(k-1, t)\cdot n^t$$

이므로 k次 모멘트는

$$E_i\{r^k(\mathbf{x}, \mathbf{m}_i)\} = (n+2k-2)\sum_{t=0}^{k-1} a(k-1, t)\cdot n^t$$

이다. 이것을 式(1)과 比較하면

$$\sum_{t=0}^{k} a(k, t)\cdot n^t = \sum_{t=1}^{k} a(k-1, t-1)\cdot n^t$$
$$+2(k-1)\cdot\sum_{t=0}^{k-1} a(k-1, t)\cdot n^t$$

이나, $t<0$이거나 $t>k$이면 $a(k, t)=0$이므로

$$\sum_{t=0}^{k} a(k, t)\cdot n^t = \sum_{t=0}^{k}[a(k-1, t-1)$$
$$+2(k-1)\cdot a(k-1, t)]\cdot n^t$$

이다. 즉 $a(k, t)$는 式(2)의 循環關係를 갖는다.

2. 定理 2 의 證明

(證明) $M_r^{(k-1)}(v)$를 式(4)와 같이 表現하면

$$M_r^{(k-1)}(v) = e^{-q}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{q^m}{m!}\left(\sum_{t=0}^{k-1} b(k-1, t)\cdot m^t\right)\cdot\right.$$
$$\left.(1-2v)^{-(2m+n+2k-2)/2}\right]$$

이고, 이것을 한번 더 微分하면

$$M_r^{(k)}(v) = e^{-q}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{q^m}{m!}\left(\sum_{t=0}^{k-1} b(k-1, t)\cdot m^t\right)\cdot\right.$$
$$\left.(2m+n+2k-2)(1-2v)^{-(2m+n+2k)/2}\right]$$

이다. 이것을 式(4)와 比較하면

$$\sum_{t=0}^{k} b(k, t)\cdot m^t = (2m+n+2k-2)\sum_{t=0}^{k-1} b(k-1, t)\cdot m^t$$
$$=2\sum_{t=1}^{k} b(k-1, t-1)\cdot m^t$$
$$+(n+2k-2)\cdot\sum_{t=0}^{k-1} b(k-1, t)\cdot m^t$$

이나, $t<0$이거나 $t>k$이면 $b(k, t)=0$이므로

$$\sum_{t=0}^{k} b(k, t)\cdot m^t = \sum_{t=0}^{k}[2\cdot b(k-1, t-1)$$
$$+(n+2k-2)\cdot b(k-1, t)]\cdot m^t$$

이다. 즉 $b(k, t)$는 式(5)의 循環關係를 갖는다.

3. 定理 3 의 證明

(證明) 式(7)의 左右邊을 $S_t(q)$라 두면

$$S_{t-1}(q) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^{t-1}}{m!}q^m = \sum_{h=0}^{t-1} c(t-1, h)\cdot q^h e^q$$

이다. 兩邊을 q에 대하여 한번 偏微分하면

$$q^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^t}{m!}q^m = \sum_{h=0}^{t-1}[c(t-1, h)\cdot(q^h e^q + h\cdot q^{h-1}e^q)]$$

$$q^{-1}\sum_{h=0}^{t} c(t, h)\cdot q^h e^q = \sum_{h=0}^{t-1} c(t-1, h)\cdot q^h e^q$$
$$+h\sum_{h=0}^{t-1} c(t-1, h)\cdot q^{h-1}e^q$$

$$\sum_{h=0}^{t} c(t, h)\cdot q^{h-1} = \sum_{h=1}^{t} c(t-1, h-1)\cdot q^{h-1}$$
$$+\sum_{h=0}^{t-1} h\cdot c(t-1, h)\cdot q^{h-1}$$

이나, $h<0$이거나 $h>t$이면 $c(t, h)=0$이므로

$$\sum_{h=0}^{t} c(t, h)\cdot q^{h-1} = \sum_{h=0}^{t}[c(t-1, h-1)+h\cdot c(t-1, h)]$$
$$\cdot q^{h-1}$$

이다. 즉 $c(t, h)$는 式(8)의 循環關係를 갖는다.

4. 定理 4 의 證明

(證明) 式(7)을 式(6)에 代入하여 整理하면

$$E_i\{r^k(\mathbf{x}, \mathbf{m}_i)\} = e^{-q}\sum_{t=0}^{k}[b(k, t)\sum_{h=0}^{t} c(t, h)\cdot q^h e^q]$$
$$=\sum_{t=0}^{k}\sum_{h=0}^{t} b(k, t)\cdot c(t, h)\cdot q^h$$
$$=\sum_{h=0}^{k}\sum_{t=h}^{k} b(k, t)\cdot c(t, h)\cdot q^h$$

이다. 이것을 式(9)와 比較하고, $b(k, t)$와 $c(t, h)$의 循環關係를 代入하면

$$d(k, h) = \sum_{t=h}^{k} b(k, t)\cdot c(t, h)$$
$$=\sum_{t=h}^{k}[2\cdot b(k-1, t-1)$$
$$+(2k+n-2)\cdot b(k-1, t)]\cdot c(t, h)$$
$$=2\sum_{t=h}^{k} b(k-1, t-1)\cdot[c(t-1, h-1)$$
$$+h\cdot c(t-1, h)]$$
$$+(2k+n-2)\cdot\sum_{t=h}^{k} b(k-1, t)\cdot c(t, h)$$
$$=2\sum_{t=h-1}^{k-1} b(k-1, t)\cdot c(t, h-1)$$
$$+2h\cdot\sum_{t=h-1}^{k-1} b(k-1, t)\cdot c(t, h)$$
$$+(2k+n-2)\cdot\sum_{t=h}^{k} b(k-1, t)\cdot c(t, h)$$

이나, $h>t$이면 $c(t, h)=0$이고, $t>k$이면 $b(k, t)=0$이므로

$$d(k, h) = 2\cdot d(k-1, t-1) + 2h\sum_{t=h}^{k-1} b(k-1, t)\cdot c(t, h)$$
$$+(2k+n-2)\sum_{t=h}^{k-1} b(k-1, t)\cdot c(t, h)$$
$$=2\cdot d(k-1, t-1)$$
$$+(2k+2h+n-2)\cdot d(k-1, h)$$

이다. 즉 $d(k, h)$는 式(10)의 循環關係를 갖는다.

參 考 文 獻

[1] J.T. Tou and R.C. Gonzalez, *Pattern Recognition Principles*. pp.119-127, Addison-Wesley, 1974.

[2] R.O. Duda and P.E. Hart, *Pattern Classification and Scene Analysis*. pp.22-31, John Wiley and Sons, 1973.

[3] K. Fukunaga and T.F. Krile, "Calculation of Bayes recognition error for two multi-

variate gaussian distributions", *IEEE Trans. Comp.*, vol.C-18, no.3, pp.220-229, 1969.
[4] W.B. Davenport, Jr., *Probability and Random Processes*. pp.422-428, McGraw-Hill, 1970.
[5] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. pp.153-158, and pp.250-253, McGraw-Hill, 1965.
[6] Samuel S. Wilks, *Mathematical Statistics*. pp.183, John Wiley & Sons, 1961.
[7] S.R. Searle, *Linear Models*. pp.47-51, John Wiley & Sons, 1970.
[8] F.A. Graybill, *An Introduction to Linear Statistical Models*. pp.74-77, McGraw-Hill, 1961.
[9] K. Fukunaga and T.E. Flick, "Estimation of the parameters of a gaussian mixture using the method of moments", *IEEE Trans. on PAMI*, vol. PAMI-5, no.4, pp. 410-416, July 1983.