

# LMS 알고리즘의 2次元 適應 필터에의 応用に 관한 研究

## (Study on the Application of LMS Algorithm to the Two Dimensional Adaptive Filter)

辛 潤 炆\*, 金 春 成\*, 申 宰 浩\*, 李 鍾 珏\*

(Yoon Ki Shin, Choon Sung Kim, Jae Ho Sin and Chong Kak Lee)

### 要 約

LMS(least mean Square) 알고리즘은<sup>1)</sup> 그 簡便性에 의하여 適應 필터의 代表的인 알고리즘으로 되고 있다.

本 論文에서는 잘 알려진 1次元 LMS 適應 필터를 2次元 필터로 擴張시킬 수 있음을 보였으며, 필터의 收斂 速度 改善方案 및 2次元 適應 필터에서 發生하는 몇 가지 問題點들에 관하여 考察하였다.

### Abstract

LMS algorithm is used widely in adaptive filtering because of its simplicity.

In this paper it is shown that the one dimensional LMS adaptive filter can be extended in the two dimensional adaptive filter and the methods for improving the convergence rate and the several problems inherent in the two dimensional adaptive filter are discussed.

### I. 序 論

B. Widrow<sup>1)</sup> 등에 의하여 提示된 LMS 알고리즘은 適應 필터에 사용되는 代表的인 알고리즘이 되고 있다. LMS 알고리즘을 사용한 適應 필터를 LMS 適應 필터라고도 한다. 그러나 이 알고리즘은 計算量에서는 상당히 有利하지만 適應 利得(adaptation gain)의 크기에 따라 알고리즘의 收斂 速度 및 安定性이 크게 영향을 받는 短點이 있다. 이 점을 改善하기 위하여 變形된 여러 LMS 알고리즘이 提示되고 있다. 本 論文에서는 LMS 알고리즘 및 投射 알고리즘(projection algorithm)<sup>2)</sup> 그리고 [7]에서 提示된 알고리즘을 2次元 適應 필터에 適用시켜 보았으며, 2次元 適應 필터 알고리즘으로 사용될 경우에 發生하는 問題點들을 考

察하고자 한다.

### II. 2次元 適應 필터

2次元 MA(moving average) 모델은 아래와 같이 表示할 수 있다.

$$Y(m, n) = \sum_{m_1=-M_1}^{M_2} \sum_{n_1=-N_1}^{N_2} H(m_1, n_1) X(m-m_1, n-n_1) \quad (1)$$

$X(m, n)$ ,  $Y(m, n)$ ,  $H(m, n)$ 은 각각 入力, 出力, 衝擊 應答의 2次元 配列(array)을 나타내며  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ 는 필터 次數를 나타낸다. 式(1)에서 入力 및 出力 配列  $X(m, n)$ ,  $Y(m, n)$ 을 자료로 하여 未知의  $H(m, n)$  配列을 구하기 위하여 아래와 같은 適應 시스템(適應 필터)을 假定한다.

$$\hat{Y}(m, n) = \sum_{m_1=-M_1}^{M_2} \sum_{n_1=-N_1}^{N_2} \hat{H}(m_1, n_1) X(m-m_1, n-n_1) \quad (2)$$

$\hat{Y}(m, n)$ 은 推定出力 配列을,  $\hat{H}(m, n)$ 은  $H(m, n)$ 에 대한 推定 衝擊應答 配列을 나타낸다. 式 (1), (2)는 아

\*正會員, 서울大學校 工科大學 電子工學科  
 (Dept. of Electron. Eng., Seoul National Univ.)  
 接受日字: 1983年 12月 19日

래와 같이 벡터 형태로 表示할 수 있다.

$$Y(m, n) = \mathbf{H}^T \mathbf{X}_{mn} \quad (3)$$

$$\hat{Y}(m, n) = \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{X}_{mn} \quad (4)$$

벡터  $\mathbf{H}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}$  및  $\mathbf{X}_{mn}$ 은 각각 아래와 같이 定義된다.

$$\mathbf{H} = [H(-M_1, N_2), H(-M_1+1, N_2), \dots, H(M_2, N_2); \\ H(-M_1, N_2+1), H(-M_1+1, N_2+1), \dots, H(M_2, \\ N_2+1); \dots; H(-M_1, N_1), H(-M_1+1, N_1), \dots, \\ H(M_2, N_1)]^T \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = [\hat{H}(-M_1, N_2), \hat{H}(-M_1+1, N_2), \dots, \hat{H}(M_2, N_2); \\ \hat{H}(-M_1, N_2+1), \hat{H}(-M_1+1, N_2+1), \dots, \hat{H}(M_2, \\ N_2+1); \dots; \hat{H}(-M_1, N_1), \hat{H}(M_1+1, N_1), \dots, \\ \hat{H}(M_2, N_1)]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{X}_{mn} = [X(m+M_1, n-N_2), X(m+M_1-1, n-N_2), \dots, X \\ (m-M_2, n-N_2); X(m+M_1, n-N_2-1), X(m+ \\ M_1-1, n-N_2-1), \dots, X(m-M_2, n-N_2-1); \dots \\ ; X(m+M_1, n-N_1), X(m+M_1-1, n-N_1), \dots, \\ X(m-M_2, n-N_1)]^T \quad (7)$$

式 (3), (4)에서 推定 出力誤差  $Y(m, n) - \hat{Y}(m, n)$ 의 自乘平均이 最小가 되도록 配列  $\hat{\mathbf{H}}$ 를 適應시켜 나간다.

### III. 기울기 벡터 및 適應利得

#### 1. 推定 誤差 自乘平均

點  $(m, n)$ 에서의 出力 推定誤차를  $\epsilon(m, n)$ 이라 하고 그의 自乘平均을  $\zeta$ 라 하면  $\zeta$ 는 아래와 같이 表示된다.

$$\zeta = E[\epsilon^2(m, n)] = E[(Y(m, n) - \hat{Y}(m, n))^2] \\ = E[(Y(m, n) - \mathbf{H}^T \mathbf{X}_{mn})^2] \\ = E[Y^2(m, n)] - 2E[Y(m, n) \mathbf{X}_{mn}^T] \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{H}} \mathbf{E} \\ [\mathbf{X}_{mn} \mathbf{X}_{mn}^T] \hat{\mathbf{H}} \\ = C - 2\mathbf{P}^T \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{R} \hat{\mathbf{H}} \quad (8)$$

단,  $C = E[Y^2(m, n)]$ : (出力平均 파워) (9)

$\mathbf{P} = E[Y(m, n) \mathbf{X}_{mn}^T]$ : (入出力 相關係數) (10)

$\mathbf{E} = E[\mathbf{X}_{mn} \mathbf{X}_{mn}^T]$ : (入力 自己 相關係數) (11)

行列  $\mathbf{R}$ 은 對稱이며 正定(positive definite)한 行列이므로 아래와 같이 對角線 行列化할 수 있다.

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T \quad (12)$$

단,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{(M_1+M_2+1)(N_1+N_2+1)}]$  (13)

$\{\lambda_i\}$ : 行列  $\mathbf{R}$ 의 特性值

#### 2. 기울기 벡터

式 (8)에서  $\zeta$ 에 대한  $\hat{\mathbf{H}}$ 의 偏微分을  $\nabla$ 라 표시하면 아래의 式을 얻는다.

$$\nabla = \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{\mathbf{H}}} = -2\mathbf{P} + 2\mathbf{R} \hat{\mathbf{H}} \quad (14)$$

따라서 아래의 알고리즘 I에 의하여  $\zeta$ 가 最小가 되는 方向으로  $\hat{\mathbf{H}}$ 를 適應시켜 나갈 수 있다.

$$\text{알고리즘 I: } \left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_{j+1} &= \hat{\mathbf{H}}_j + \mu (-\nabla_j) \\ \nabla_j &= -2\mathbf{P} + 2\mathbf{R} \hat{\mathbf{H}}_j \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

j: 適應 回數

B. Widrow등에 의하여 定理된 바를 引用하면, 파라미터 誤差 벡터를  $\mathbf{V} = \mathbf{H}_j - \hat{\mathbf{H}}$ 라 하고  $\mathbf{V}' = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V}$ 를 정의할 때,  $\mathbf{V}'$ 의 P번째 因子는 알고리즘 I에 의하여 아래와 같이 時定數  $\tau_p$ 를 가지고 指數的으로 감소한다 고 알려져 있다.

$$\tau_p \approx 1/2\mu \lambda_p \quad (16)$$

$$1/\lambda_{\max} > \mu > 0: \text{收斂 條件} \quad (17)$$

$\lambda_{\max}$ 는 式 (13)에서  $\{\lambda_i\}$ 중 最大值이다.

#### 3. 適應 利得

式 (16), (17)에 의하여 알고리즘 I의 收斂 速度를 증가시키기 위해서는 相對的으로 알고리즘 I의 安定性이 희생되는 代價를 치르게 된다. 이 點을 緩和시키기 위해 適應利得  $\mu$ 를 每 適應 순간마다 變化시키도록 한다.  $\mu$ 를 適應回數 j의 函數로 表示하면 式 (15)는 아래와 같이 된다.

$$\hat{\mathbf{H}}_{j+1} = \hat{\mathbf{H}}_j + \mu_j (-\nabla_j) \quad (18)$$

임의의 j번째 適應 순간에 있어서  $\hat{\mathbf{H}}_j$ ,  $\nabla_j$ 는 決定이 되어있으므로  $\mu_j$ 를 變數로 보고  $\hat{\mathbf{H}}_{j+1}$ 에 의해 決定이 되는  $\zeta_{j+1}$ 이 最小가 되도록  $\mu_j$ 를 定한다. 여기서  $\zeta_{j+1}$ 은 아래와 같이 주어진다.

$$\zeta_{j+1} = E[(Y(m, n) - \hat{\mathbf{H}}_{j+1}^T \mathbf{X}_{mn})^2] \\ = C - 2\hat{\mathbf{H}}_{j+1}^T \mathbf{P} + \hat{\mathbf{H}}_{j+1}^T \mathbf{R} \hat{\mathbf{H}}_{j+1} \quad (19)$$

式 (19)로부터  $\zeta_{j+1}$ 은  $\hat{\mathbf{H}}_{j+1}$ 에 대해 유니모달(unimodal)하며, 同時에 式 (18)에 의하여  $\hat{\mathbf{H}}_{j+1}$ 은  $\mu_j$ 에 대하여 유니모달하다.

따라서  $\zeta_{j+1}$ 은  $\mu_j$ 에 대하여 유니모달하므로  $\zeta_{j+1}$ 이 最小가 되는  $\mu_j$ 의 最適值가 존재하며, 最適值를 구하기 위하여 아래와 같이  $\mu_j$ 로  $\zeta_{j+1}$ 을 偏微分한다.

$$\frac{\partial \zeta_{j+1}}{\partial \mu_j} = \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{j+1}}{\partial \mu_j} \cdot \frac{\partial \zeta_{j+1}}{\partial \hat{\mathbf{H}}_{j+1}} \\ = -2 \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{j+1}}{\partial \mu_j} \mathbf{P} + 2 \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{j+1}}{\partial \mu_j} \mathbf{R} \hat{\mathbf{H}}_{j+1} \quad (20)$$

式 (18)로부터  $\frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{j+1}}{\partial \mu_j}$ 을 구하면 아래와 같다.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_{j+1}}{\partial \mu_j} = -\nabla_j \quad (21)$$

따라서 式 (20), (21)로부터 아래의 式을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \zeta_{j+1}}{\partial \mu_j} = \partial \nabla_j^T \mathbf{P} - \partial \nabla_j^T \mathbf{R} \hat{\mathbf{H}}_{j+1} \\ = -\nabla_j^T (-2\mathbf{P} + 2\mathbf{R} \hat{\mathbf{H}}_{j+1}) \\ = -\nabla_j^T \nabla_{j+1} \\ = -\nabla_j^T (\nabla_j - 2\mu_j \mathbf{R} \nabla_j)$$

$$= -\nabla_j^T \nabla_j + 2\mu_j \nabla_j^T \mathbf{R} \nabla_j \quad (22)$$

式 (22)를 0으로 하는 最適值  $\mu_j^*$ 는 아래와 같이 주어진다.

$$\mu_j^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{\nabla_j^T \nabla_j}{\nabla_j^T \mathbf{R} \nabla_j} \quad (23)$$

이상의 式 (18), (23)으로부터 아래의 알고리즘 II가 誘導된다.

$$\left. \begin{aligned} \text{알고리즘 II : } \hat{\mathbf{H}}_{j+1} &= \hat{\mathbf{H}}_j + \mu_j^* (-\nabla_j) \\ \mu_j^* &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\nabla_j^T \nabla_j}{\nabla_j^T \mathbf{R} \nabla_j} \\ \nabla_j &= -2\mathbf{P} + 2\mathbf{R} \hat{\mathbf{H}}_j \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

알고리즘 II는 最適值  $\mu_j^*$ 를 사용함으로써 安定性은 상당히 클 것이나,  $\mu_j^*$ 를 구하는데 計算量이 많다. 특히 2次元 필터의 경우는 더욱 심하다. 따라서 最適值  $\mu_j^*$ 를 사용하는 대신, 스테피스트-디센트 (steepest-descent) 方法에 의하여  $\zeta_{j+1}$ 이 最小가 되는 方向으로  $\mu_j$ 를 適應시켜나간다.

$$\text{즉, } \mu_{j+1} = \mu_j + \rho \left( -\frac{\partial \zeta_{j+1}}{\partial \mu_j} \right) \quad (25)$$

여기서  $\rho$ 는  $\mu$ 에 대한 適應利得이다. 式 (22)로부터 아래의 式을 얻는다.

$$\frac{\partial \zeta_{j+1}}{\partial \mu_j} = -\nabla_j^T \nabla_{j+1} \quad (26)$$

따라서 式 (25), (26)으로부터  $\mu_j$ 는 아래와 같이 適應되어진다.

$$\mu_{j+1} = \mu_j + \rho \nabla_j^T \nabla_{j+1} \quad (27)$$

式 (18), (27)로부터 아래의 알고리즘 III이 誘導된다.

$$\left. \begin{aligned} \text{알고리즘 III : } \hat{\mathbf{H}}_{j+1} &= \hat{\mathbf{H}}_j + \mu_j (-\nabla_j) \\ \mu_j &= \mu_{j-1} + \rho \nabla_{j-1}^T \nabla_j \\ \nabla_j &= -2\mathbf{P} + 2\mathbf{R} \hat{\mathbf{H}}_j \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

#### IV. 實時間 處理를 위한 2次元 適應 필터 알고리즘

알고리즘 I, II 및 III에서는 出力推定 誤差  $\varepsilon(m, n)$ 의 自乘平均을 最小化하는 方向으로 기울기 벡터  $\nabla_j$ 를 구했다. 실제의 경우에는  $\zeta$ 를 最小化하는 대신 每 適應 순간마다  $e^2(m, n)$ 을 最小化하는 方向으로  $\hat{\mathbf{H}}$ 를 適應시킴으로써 每 適應 순간마다 式 (14)에서의 기울기 벡터  $\nabla$ 를 구하는데 필요한 計算量을 대폭 줄일 수 있다. 이 경우 式 (10), (11)에서의 벡터  $\mathbf{R}$  및 行列  $\mathbf{R}$ 은 아래와 같이 代置된다.

$$\mathbf{P}_{mn} = \mathbf{Y}(m, n) \mathbf{X}_{mn} \quad (29)$$

$$\mathbf{R}_{mn} = \mathbf{X}_{mn} \mathbf{X}_{mn}^T \quad (30)$$

여기서  $j$ 번째 適應순간에 해당하는 점을  $(m_j, n_j)$ 로 表示하면 式 (29), (30)을 式 (14)에 代入하여  $(m_j, n_j)$ 에서의 推定 기울기 벡터  $\nabla_{m_j n_j}$ 는 아래와 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_{m_j n_j} &= \frac{\partial e^2(m_j, n_j)}{\partial \hat{\mathbf{H}}_{m_j n_j}} = -2\mathbf{P}_{m_j n_j} + 2\mathbf{R}_{m_j n_j} \hat{\mathbf{H}}_{m_j n_j} \\ &= -2(\mathbf{Y}(m_j, n_j) \mathbf{X}_{m_j n_j} - \mathbf{X}_{m_j n_j} \mathbf{X}_{m_j n_j}^T \hat{\mathbf{H}}_{m_j n_j}) \\ &= -2(\mathbf{Y}(m_j, n_j) - \mathbf{X}_{m_j n_j}^T \hat{\mathbf{H}}_{m_j n_j}) \mathbf{X}_{m_j n_j} \\ &= -2\varepsilon(m_j, n_j) \mathbf{X}_{m_j n_j} \end{aligned} \quad (31)$$

式 (31)에 의해 알고리즘 I은 아래와 같이 간단한 형태의 알고리즘 I'로 된다.

$$\text{알고리즘 I' : } \hat{\mathbf{H}}_{m_{j+1} n_{j+1}} = \hat{\mathbf{H}}_{m_j n_j} + 2\mu \varepsilon(m_j, n_j) \mathbf{X}_{m_j n_j} \quad (32)$$

알고리즘 I'는 그 次元 LMS 알고리즘이 된다. 式 (29), (30)을 式 (24)에 代入하여 아래의 式을 얻는다.

$$\hat{\mathbf{H}}_{m_{j+1} n_{j+1}} = \hat{\mathbf{H}}_{m_j n_j} + \mu_{m_j n_j}^* (-\nabla_{m_j n_j}) \quad (33)$$

式 (31)에 의하여  $\mu_{m_j n_j}^*$ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \mu_{m_j n_j}^* &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{\nabla}_{m_j n_j}^T \hat{\nabla}_{m_j n_j}}{\hat{\nabla}_{m_j n_j}^T \mathbf{R}_{m_j n_j} \hat{\nabla}_{m_j n_j}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\varepsilon^2(m_j, n_j) (\mathbf{X}_{m_j n_j}^T \mathbf{X}_{m_j n_j})}{4\varepsilon^2(m_j, n_j) (\mathbf{X}_{m_j n_j}^T \mathbf{X}_{m_j n_j}) (\mathbf{X}_{m_j n_j}^T \mathbf{X}_{m_j n_j})} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{X}_{m_j n_j}\|^2} \end{aligned} \quad (34)$$

따라서 알고리즘 II는 아래의 알고리즘 II' 형태로 간단히 된다.

$$\text{알고리즘 II' : } \hat{\mathbf{H}}_{m_{j+1} n_{j+1}} = \hat{\mathbf{H}}_{m_j n_j} + \varepsilon(m_j, n_j) \frac{\mathbf{X}_{m_j n_j}}{\|\mathbf{X}_{m_j n_j}\|^2} \quad (35)$$

알고리즘 II'는 投射 알고리즘의 2次元 形態이다.

(알고리즘 II'의 收斂 速度)

알고리즘 II'는 參考文獻(2)에 나타난 1次元 適應 非循環 필터 및 [3]의 1次元 適應 循環 필터 알고리즘의 2次元 形態이다. 이 두文獻을 引用하면 알고리즘 II'도 반드시 收斂한다. 위의 두文獻을 참고하여 알고리즘 II'에 대한 대략적인 收斂 速度를 아래의 假定하에서 유도해 보기로 하겠다.

①  $\mathbf{X}(m, n)$ 은 平均은 0이며 標準偏差가  $\sigma_x^2$ 인 스토케스틱 過程이다.

② 벡터  $\mathbf{X}_{mn}$ 은 파라미터 誤差 벡터  $\hat{\mathbf{H}}_{mn} - \mathbf{H}$ 와 獨立的이다.

式 (35)의 양변으로부터  $\mathbf{H}$ 를 뺀 다음 양변에  $\|\mathbf{X}_{m_j n_j}\|^2$ 을 곱한 후 平均을 취한다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_{m_{j+1} n_{j+1}} - \mathbf{H} &= \hat{\mathbf{H}}_{m_j n_j} - \mathbf{H} + \frac{\mathbf{X}_{m_j n_j} \varepsilon(m_j, n_j)}{\|\mathbf{X}_{m_j n_j}\|^2} \\ &= \hat{\mathbf{H}}_{m_j n_j} - \mathbf{H} - \frac{\mathbf{X}_{m_j n_j} \mathbf{X}_{m_j n_j}^T (\hat{\mathbf{H}}_{m_j n_j} - \mathbf{H})}{\|\mathbf{X}_{m_j n_j}\|^2} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\therefore E[\|\mathbf{X}_{m_j n_j}\|^2 (\hat{\mathbf{H}}_{m_{j+1} n_{j+1}} - \mathbf{H})] = E[\|\mathbf{X}_{m_j n_j}\|^2]$$

$$E\{\hat{\mathbf{H}}_{m_{j+1} n_{j+1}} - \mathbf{H}\} = E\{\|\mathbf{X}_{m_j n_j}\|^2\} \cdot E\{\hat{\mathbf{H}}_{m_j n_j} - \mathbf{H}\} - E\{\mathbf{X}_{m_j n_j} \mathbf{X}_{m_j n_j}^T\} \cdot E\{\hat{\mathbf{H}}_{m_j n_j} - \mathbf{H}\} \quad (37)$$

式 (12)로부터  $\mathbf{R} = E\{\mathbf{X}_{m_j n_j} \mathbf{X}_{m_j n_j}^T\} = \mathbf{Q} \wedge \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \wedge \mathbf{Q}^T$  임

을 알 수 있다. 또한

$$E[\|X_{m,j\nu}\|^2] = (M_1 + M_2 + 1)(N_1 + N_2 + 1)\sigma_x^2 \quad (38)$$

이므로 이상의 식들과 함께 식 (37)의 양변에  $Q^{-1}/(M_1 + M_2 + 1)(N_1 + N_2 + 1)\sigma_x^2$ 을 곱한 후 아래와 같이 벡터  $V, V'$ 를 定義하면  $V'$ 에 대한 循環式은 아래와 같이 된다.

$$V_{m,j\nu} = E\{\hat{H}_{m,j\nu} - H\} \quad (39)$$

$$V'_{m,j\nu} = Q^{-1}V_{m,j\nu} \quad (40)$$

$$V_{m,j+1,n_{j+1}} = \left( \Pi - \frac{\Lambda}{(M_1 + M_2 + 1)(N_1 + N_2 + 1)\sigma_x^2} \right) V'_{m,j\nu} \quad (41)$$

벡터  $V_{m,j\nu}$ 의 p번째 因子를  $v'_{m,j\nu}(p)$ 로 表示하면  $v'_{m,j\nu}(p)$ 에 대한 기하학적 비율(geometric ratio)  $\gamma_p$ 는 아래와 같다.

$$\gamma_p = \frac{v'_{m,j+1,n_{j+1}}(p)}{v'_{m,j\nu}(p)} = 1 - \frac{\lambda_p}{(M_1 + M_2 + 1)(N_1 + N_2 + 1)\sigma_x^2} \quad (42)$$

B. Widrow에 의하면 식 (32)에 대한  $v'_{m,j\nu}(p)$ 의 기하학적 비율은  $1 - 2\mu\lambda_p$ 이므로 알고리즘 II'의 필터 次数가 증가하면 알고리즘 I'의  $\mu$ 값이 감소하는 것과 동일한 효과를 가지므로 알고리즘 II'의 平均的 收斂速度는 늦어지게 된다. 따라서 필터의 次数가 어느 정도 증가하면 식 (41)의  $v'_{m,j\nu}(p)$ 는 時定數  $\tau_p$ 를 가지고 指數的으로 감소한다고 近似化 할 수 있다. 따라서

$$\gamma_p \approx 1 - \frac{\lambda_p}{(M_1 + M_2 + 1)(N_1 + N_2 + 1)\sigma_x^2} \approx \exp\left(-\frac{1}{\tau_p}\right) = 1 - \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{2!\tau_p^2} - \frac{1}{3!\tau_p^3} + \dots \quad (43)$$

$\tau_p \gg 1$  이므로

$$\tau_p \approx \frac{(M_1 + M_2 + 1)(N_1 + N_2 + 1)\sigma_x^2}{\lambda_p} \quad (44)$$

따라서 알고리즘 II'는 높은 次数의 2次元 適應 非循環 필터의 알고리즘으로 사용하기에는 不適當하겠다.

마지막으로 식 (29), (30), (31)을 식 (28)에 代入하면 아래의 알고리즘 III'가 얻어진다.

$$\left. \begin{aligned} \text{알고리즘 III'}: \hat{H}_{m,j+1,n_{j+1}} &= H_{m,j\nu} + \mu_{m,j\nu}(-\hat{V}_{m,j\nu}) \\ \mu_{m,j\nu} &= \mu_{m,j+1,n_{j+1}} + \rho \hat{V}_{m,j-1,n_{j-1}}^T \hat{V}_{m,j\nu} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\hat{V}_{m,j\nu} = -2\varepsilon(m_j, n_j) X_{m,j\nu}$$

알고리즘 III'는 2次元  $\mu$ -LMS 알고리즘이 된다. 이 알고리즘의 收斂性에 대하여서는 다음 節에서 說明하고 있다.

### V. 알고리즘 III'의 收斂性 考察

알고리즘 III'는 기울기 벡터에 관해서 非線形 式이

므로 알고리즘 III'의 收斂速度를 精確한 式으로 表現하기가 힘들 것으로 생각된다. 이 節에서는 알고리즘 III'에서  $\mu$  適應 效果가 全体的인 알고리즘의 收斂速度에 미치는 영향을 대략적으로 考察하고자 한다.

式 (45)에서 우선  $\mu$ 를 常數로 놓은 다음 첫번째 式의 양변으로부터 H 벡터를 빼다.

$$\begin{aligned} \hat{H}_{m,j+1,n_{j+1}} - H &= \hat{H}_{m,j\nu} - H + \mu \{2\varepsilon(m_j, n_j) X_{m,j\nu}\} \\ &= \hat{H}_{m,j\nu} - H - 2\mu X_{m,j\nu} X_{m,j\nu}^T \cdot \\ &\quad (\hat{H}_{m,j\nu} - H) \end{aligned} \quad (46)$$

파라미터 誤差 벡터  $\hat{H}_{m,j\nu} - H$ 와  $X_{m,j\nu}$ 가 서로 獨立的이라 가정하고 式 (46)의 양변에 平均을 취하면 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} E\{\hat{H}_{m,j+1,n_{j+1}} - H\} &= E\{\hat{H}_{m,j\nu} - H\} - 2\mu E\{X_{m,j\nu} X_{m,j\nu}^T\} \cdot E\{\hat{H}_{m,j\nu} - H\} \\ &= E\{\hat{H}_{m,j\nu} - H\} - 2\mu R \cdot E\{\hat{H}_{m,j\nu} - H\} \end{aligned} \quad (47)$$

式 (47)에서  $V_{m,j\nu} = E\{\hat{H}_{m,j\nu} - H\}$ 라 하면  $V_{m,j\nu}$ 에 대한 아래와 같은 循環式을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V_{m,j+1,n_{j+1}} &= V_{m,j\nu} - 2\mu R V_{m,j\nu} = V_{m,j\nu} + \mu(-2R V_{m,j\nu}) \\ &= V_{m,j\nu} + \mu(-\mathcal{V}_{m,j\nu}) \end{aligned} \quad (48)$$

式 (48)에서의  $\mathcal{V}_{m,j\nu} = 2R V_{m,j\nu}$ 를 式 (45)에서  $\mu$ 에 관한 두번째 式의  $\mathcal{V}_{m,j\nu}$ 에 代入하면 아래와 같이  $\mu$ 에 관한 循環式이 유도된다.

$$\begin{aligned} \mu_{m,j\nu} &= \mu_{m,j+1,n_{j+1}} + \rho \mathcal{V}_{m,j-1,n_{j-1}}^T \mathcal{V}_{m,j\nu} \\ &= \mu_{m,j-1,n_{j-1}} + 4\rho \mathcal{V}_{m,j-1,n_{j-1}}^T R R V_{m,j\nu} \end{aligned} \quad (49)$$

式 (48), (49)로부터  $V_{m,j\nu}$ 에 관한 전체적인 循環式을 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} V_{m,j+1,n_{j+1}} &= V_{m,j\nu} + \mu_{m,j\nu}(-\mathcal{V}_{m,j\nu}) \\ \mu_{m,j\nu} &= \mu_{m,j-1,n_{j-1}} + \rho \mathcal{V}_{m,j-1,n_{j-1}}^T \mathcal{V}_{m,j\nu} \\ \mathcal{V}_{m,j\nu} &= 2R V_{m,j\nu} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

式 (50)의 첫번째 式에  $Q^{-1}$ 을 곱하여 정리하면 아래의 式을 얻을 수 있다.

$$V'_{m,j+1,n_{j+1}} = (\Pi - 2\mu_{m,j\nu} \Lambda) V'_{m,j\nu} \quad (51)$$

단,  $V'_{m,j\nu} = Q^{-1} V_{m,j\nu}$  (52)

式 (51)을 利用하여 式 (50)의  $\mu_{m,j\nu}$ 에 관한 循環式은 아래와 같이 定理할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_{m,j\nu} &= \mu_{m,j-1,n_{j-1}} + \rho \mathcal{V}_{m,j-1,n_{j-1}}^T \mathcal{V}_{m,j\nu} \\ &= \mu_{m,j-1,n_{j-1}} + 4\rho \mathcal{V}_{m,j-1,n_{j-1}}^T R R V_{m,j\nu} \\ &= \mu_{m,j-1,n_{j-1}} + 4\rho \mathcal{V}_{m,j-1,n_{j-1}}^T (Q \Lambda Q^{-1}) (Q \Lambda Q^{-1}) V_{m,j\nu} \\ &= \mu_{m,j-1,n_{j-1}} + 4\rho \mathcal{V}_{m,j-1,n_{j-1}}^T \Lambda^2 V'_{m,j\nu} (\because Q^{-1} = Q^T) \end{aligned} \quad (53)$$

式 (53)에서  $\rho = 0$ 일 때는 式 (51)의  $V'_{m,j\nu}$ 의 p번째 因子의 指數的 減소의 時定數는 式 (16)과 같다. 式 (54)에서  $\rho$ 가 適定 水準의 값을 가지므로 해서 알고리즘

Ⅲ'가 收斂한다면  $\mu$ 가 변하더라도  $\mu_{LOW} < \mu_{mju} < \mu_{UPP}$  범위내에 속할 것이므로  $\mu_{LOW} > 0$ ,  $\mu_{UPP} < 1/\lambda_{max}$  값을 가지면 式 (53)에 의하여  $\mu$ 가 변하더라도 式 (52)의  $V'_{mju}$ 는 여전히 指數의 내지는 近似的으로 指數 감소 형태를 가진다고 假定해도 별 무리가 없을 것이다. 이때의  $V'_{mju}$ 의 p번째 因子의 時定數를  $\tau'_p$ 라 한다. 즉,

$$U'_{mju}(p) \approx U'_{mono}(p) \cdot \exp\left(-\frac{j}{\tau'_p}\right) \quad (54)$$

$$p=1, 2, \dots, (M_1+M_2+1)(N_1+N_2+1)$$

式 (54)를 (53)에 代入하여 정리하면 다음과 같이 전개된다. 단,  $L=(M_1+M_2+1)(N_1+N_2+1)$ 로 定義한다.

$$\begin{aligned} \mu_{mju} &= \mu_{m,j-1} \nu_{j-1} + 4\rho V'_{m,j-1} \nu_{j-1} \wedge^2 V'_{mju} \\ &= \mu_{m,j-2} \nu_{j-2} + 4\rho (V'_{m,j-2} \nu_{j-2} \wedge^2 V'_{m,j-1} \nu_{j-1} + V_{m,j-1}^T \\ &\quad V'_{m,j-1} \nu_{j-1} \wedge^2 V'_{mju}) \\ &\quad \vdots \\ &= \mu_{mono} + 4\rho \sum_{k=0}^{j-1} V'_{mknk} \wedge^2 V'_{m,k+1} \nu_{k+1} \\ &= \mu_{mono} + 4\rho \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{i=1}^L U'_{mono}(i) \exp\left(-\frac{K}{\tau'_i}\right) \lambda_i^2 U'_{mono}(i) \\ &\quad \exp\left(-\frac{K+1}{\tau'_i}\right) \\ &= \mu_{mono} + 4\rho \sum_{i=1}^L \sum_{k=0}^{j-1} \{U'_{mono}(i) \lambda_i\}^2 \exp\left(-\frac{2K+1}{\tau'_i}\right) \end{aligned} \quad (55)$$

K에 대한 合을 積分의 原理를 이용하여 아래와 같이 近似化할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{j-1} \{U'_{mono}(i) \lambda_i\}^2 \exp\left(-\frac{2K+1}{\tau'_i}\right) \\ &\approx \frac{1}{T} \{U'_{mono}(i) \lambda_i\}^2 \exp\left(-\frac{1}{\tau'_i}\right) \int_0^{j-1} \exp\left(-\frac{2t}{\tau'_i T}\right) dt \\ &= \frac{\tau'_i}{2} \exp\left(-\frac{1}{\tau'_i}\right) \{U'_{mono}(i) \lambda_i\}^2 \{1 - \exp\left(-\frac{2(j-1)}{\tau'_i}\right)\} \end{aligned} \quad (56)$$

단, T=標準化 間隔

式 (56)을 (55)에 代入하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu_{mju} &= \mu_{mono} + \sum_{i=1}^L 2\rho \tau'_i \exp\left(-\frac{1}{\tau'_i}\right) \{U'_{mono}(i) \lambda_i\}^2 \cdot \\ &\quad \{1 - \exp\left(-\frac{2(j-1)}{\tau'_i}\right)\} \\ &= \mu_{mono} + \sum_{i=1}^L C_i \{1 - \exp\left(-\frac{2(j-1)}{\tau'_i}\right)\} \end{aligned} \quad (57)$$

$$C_i = 2\rho \tau'_i \exp\left(-\frac{1}{\tau'_i}\right) \{U'_{mono}(i) \lambda_i\}^2 \gg 0 \quad (58)$$

式 (57)에서  $j \rightarrow \infty$  일 때, 즉 定常 狀態에서의  $\mu_\infty$ 는 아래와 같다.

$$\mu_\infty = \mu_{mono} + \sum_{i=1}^L C_i > \mu_{mono} \quad (59)$$

式 (51), (57), (58)을 함께 세보면 알고리즘 Ⅲ'의 平均的 收斂 狀態를 나타내는 式이 된다.

$$V'_{m,j+1} \nu_{j+1} = (\Pi - 2\mu_{mju} \Lambda) V'_{mju} \quad (51)$$

$$\mu_{mju} = \mu_{mono} + \sum_{i=1}^L C_i \{1 - \exp\left(-\frac{2(j-1)}{\tau'_i}\right)\}$$

$$C_i = 2\rho \tau'_i \exp\left(-\frac{1}{\tau'_i}\right) \{U'_{mono}(i) \lambda_i\}^2 \gg 0 \quad (52)$$

式 (51)로 부터  $V'_{mju}$ 의 p번째 因子의 기하학적 비율  $\gamma_p$ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \gamma_p &= \frac{U'_{m,j+1} \nu_{j+1}(p)}{U'_{mju}(p)} = 1 - 2\mu_{mju} \lambda_p \\ &= 1 - 2\left\{ \mu_{mono} + \sum_{i=1}^L C_i \{1 - \exp\left(-\frac{2(j-1)}{\tau'_i}\right)\} \right\} \lambda_p \end{aligned} \quad (60)$$

따라서 適應 回數 j가 증가함에 따라  $\gamma_p$ 는 점점 감소하여 알고리즘 Ⅲ'의 收斂 速度는 더욱 加速된다. 式 (60)에서 알고리즘이 收斂하기 위한 充分條件은 아래와 같다.

$$0 < \mu_{mono} + \sum_{i=1}^L C_i < \frac{1}{2\lambda_{max}} \quad (61)$$

따라서  $\rho$ 는 필터 次數 및 入力 파우어의 4乘에 반비례하여 設定해야 한다. 실제의 實驗結果에 의하면 S가 充分이 작을 때도 收斂 速度의 증가 현상이 뚜렷하므로 전체적인 알고리즘의 安定性을 위해  $\rho$ 를 上界限보다 充分히 작게 設定해 주는 것이 좋겠다.

이상으로 알고리즘 Ⅲ'의 平均的 收斂 狀態를 관찰하였다. 그러나 실제의 알고리즘 Ⅲ'에서는 推定된 기울기 벡터를 사용하기 때문에 다음과 같은 式을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{P}_{m,j-1} \nu_{j-1} \hat{P}_{mju} &= (\hat{H}_{m,j-1} \nu_{j-1} - H)^T X_{m,j-1} \nu_{j-1} X_{m,j-1}^T \nu_{j-1} \\ &\quad X_{mju} X_{mju}^T (\hat{H}_{mju} - H) \end{aligned} \quad (62)$$

式 (62)를 (45)에 代入하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \mu_{mju} &= \mu_{m,j-1} \nu_{j-1} + 4\rho (\hat{H}_{m,j-1} \nu_{j-1} - H)^T X_{m,j-1} \nu_{j-1} \\ &\quad X_{m,j-1}^T \nu_{j-1} X_{mju} X_{mju}^T (\hat{H}_{mju} - H) \end{aligned}$$

파라미터 誤差 벡터와 入力 配列이 서로 獨立의일 때 式 (63)의 양변의 平均을 취하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \mu_{mju} &= \mu_{m,j-1} \nu_{j-1} + 4\rho V_{m,j-1}^T \nu_{j-1} \cdot E\{X_{m,j-1} \nu_{j-1} X_{m,j-1}^T \nu_{j-1} \\ &\quad X_{mju} X_{mju}^T\} \cdot V_{mju} \\ &\approx \mu_{m,j-1} \nu_{j-1} + 4\rho V_{m,j-1}^T \nu_{j-1} E\{X_{m,j-1} \nu_{j-1} X_{m,j-1}^T \nu_{j-1}\} \\ &\quad E\{X_{mju} X_{mju}^T\} V_{mju} \\ &= \mu_{m,j-1} \nu_{j-1} + 4\rho V_{m,j-1}^T \nu_{j-1} R R V_{mju} \end{aligned} \quad (64)$$

따라서 실제의 경우  $X_{m,j-1} \nu_{j-1}$ 과  $X_{mju}$ 와의 相關度에 따라  $\mu_{mju}$ 의 값이 달라진다. 다시 말해서 2次元에서는 1次元과 달리 適應 方向을 크게 行 方向과 列 方向의 두가지로 나눌 수 있으므로 이 두 適應 方向에 따라  $X_{m,j-1} \nu_{j-1}$ 과  $X_{mju}$ 의 相關度가 달라지게 된다. 만일 2次元 配列 X(m,n)이 行 方向으로 相關度가 클 경우에는  $(m_j, n_j) = (m_{j-1} + 1, n_{j-1})$ 이 되도록 行 方向으로 適應시켜 나가는 것이  $\mu$ 값을 效率的으로 適應시키는 結果가 될 것이며 그 반대로 列 方向의 相關度

가 큰 경우에는  $(m, n) = (m, n, n+1)$ 이 되도록 適應 順序를 定하는 것이 有利하다. 이 現象은 VI節의 實驗에서도 立證되고 있다.

VI. 電算 시뮬레이션

첫번째 모델로는, 모든 係수가 1인 아래와 같은 M A 모델을 設定하였다.

$$Y(m, n) = \sum_{m_1=-2}^2 \sum_{n_1=-2}^2 X(m-m_1, n-n_1)$$

人力配列은 FACOM 기종의 package 썬브루틴인 NOR-RNS를 사용하여 랜덤 신호를 發生시켜 사용하였다. 本 論文에서는 平均이 0이며 標準 偏差는 0.5로 하였다. 이 신호의 相關도는 계산 결과 아래와 같았다.

$$E[X(m, n) X(m+1, n)] = 0.023 : \text{行 方向 相關度}$$

$$E[X(m, n) X(m, n+1)] = 0.00032 : \text{列 方向 相關度}$$

위의 모델에 대한 각 알고리즘 I', II', 및 III'의 파라미터 抽出能力을 그림 1에서 比較하고 있다. 각 알고리즘들의 初期值 파라미터는 모두 0으로 하였다.

그림 1에서 알고리즘 I'에 비해 알고리즘 II' 및 III'는 모두 收斂 速度가 빠르다. 필터의 次数가  $5 \times 5$ 로 비교적 낮기 때문에 알고리즘 II'도 收斂 速度가 빠르다. 알고리즘 III'는 適應利得을 初期值  $\mu_0 = 0.001$ 로 하였고  $\rho = 0.0001$ 로 하였다. 시뮬레이션에 사용된 人力配列은 行 方向 相關도가 列 方向에 비해 크기 때문에 行 方向 適應時의 收斂 速度가 列 方向에 비해 빠른 것으로 나타나 있다.

그림 2에서는 알고리즘 III'에 의하여 行 方向 및 列 方向 適應에 따른 파라미터 誤差의 감소 및 適應利得  $\mu$ 의 變化 狀態를 도시하고 있다. 그림 2에서 보듯이 列 方向 適應의 경우 人力配列의 列 方向으로의 相關도가 낮기 때문에 行 方向 適應에 비해  $\mu$  값이 效率的으로 適應이 되지 못하고 있어(그래프(3), (4))결과적으로 전체적인 收斂 速度가 行 方向에 비해 늦어지고 있다(그래프(1), (2)).

다음에 適應 필터의 次数의 變化에 따른 알고리즘 I', II' 및 III'의 收斂 狀態를 比較하기 위해 2次元 모델의 次数를  $11 \times 11$ 로 높혀 아래와 같이 設定하였다.

$$Y(m, n) = \sum_{m_1=-5}^5 \sum_{n_1=-5}^5 X(m-m_1, n-n_1)$$

入力은 앞의 시뮬레이션 경우와 同--하다. 이번에는 필터의 次数가  $11 \times 11$ 로 높아졌기 때문에 알고리즘 III'의  $\rho$ 를  $0.5 \times 10^{-5}$ 으로 낮추어 設定하였다. 이때의 알고리즘 I', II' 및 III'의 收斂 狀態는 그림 3에 도시되어 있다. 알고리즘 II'(그래프(2))는 필터 次数가  $5 \times 5$ 次에서  $11 \times 11$ 로 증가함에 따라 收斂 速度가 그

림 1에서의 경우와 比較하여 상당히 느려졌음을 알 수 있다. 이것은 式(44)가 뜻하는 바와 같다. 알고리즘 I' 및 III'는 필터 次数 變化에 대해 收斂 速度 變化가 그리 크지 않음을 알 수 있다.

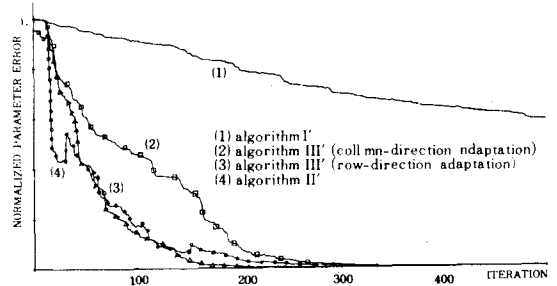


그림 1. 각 알고리즘의 收斂 速度 比較 (필터 次数:  $5 \times 5$ )

Fig. 1. Comparison of convergence rate of each algorithm(filter order:  $5 \times 5$ ).

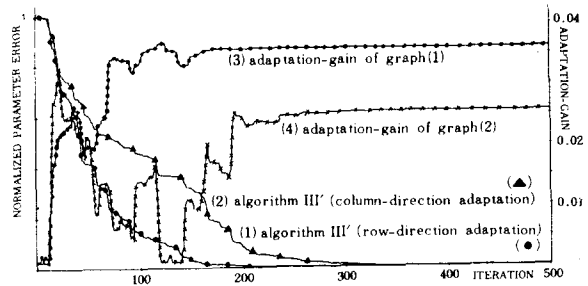


그림 2. 알고리즘 III'의 행 방향 및 열 방향 적응에 따른 收斂 速度 및 適應 利得 變化

Fig. 2. Convergence rate and variation of adaptation gain of algorithm III' in column and row direction adaptation.

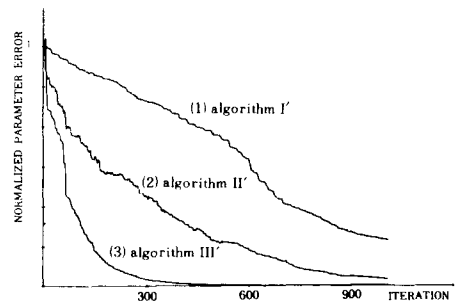


그림 3. 각 알고리즘의 收斂 速度 比較 (필터 次数:  $11 \times 11$ )

Fig. 3. Comparison of convergence rate.

## VII. 結 論

## 參 考 文 獻

이상의 理論 및 시뮬레이션 結果를 종합하여보면 LMS 알고리즘의 2次元 형태인 알고리즘 I'는 1次元과 마찬가지로 2次元에서도 그대로 適用할 수 있다. 알고리즘 II'는 投射 알고리즘의 2次元 형태로서 필터의 次數가 낮을 때는 유리하나 次數가 증가하면 오히려 LMS 알고리즘 보다 收斂 速度가 느릴 수도 있다. 특히 2次元 非循環 필터는 次數가 비교적 높기때문에 알고리즘 II'는 2次元에서는 收斂 速度면에서는 不利하다.

알고리즘 III'는  $\mu$ -LMS 알고리즘의 2次元 형태로서 필터의 次數에 크게 영향을 받지 않으면서 收斂 速度도 비교적 빠르다. 따라서 2次元 필터에 사용될 경우 收斂 速度면에서 알고리즘 I, II'에 비해 有利하다. 다만 알고리즘 III'는  $\rho$ 의 크기에 따라 安定性이 영향을 받는다. 그러나 實驗 結果,  $\rho$ 가  $\mu_0$ 보다 충분히 작은 경우에도 알고리즘의 收斂 速度 증가가 두드러졌으므로  $\rho$ 를 어떤 上限値이하로 충분히 작게해 주면 되겠다. 알고리즘 III'의 또 다른 特性은 알고리즘의 適應 方向에 따라 收斂 速度가 變한다는 것이다. 그러나 보통의 映像 信號의 경우 行 方向과 列 方向의 相關度가 그렇게 큰 차이가 나지 않으므로 알고리즘의 適應 方向에 대해서는 별로 고려할 필요가 없을 것 같다.

앞으로 좀 더 研究해야 할 課題로는 알고리즘 III'가 收斂을 보장 받을 수 있는  $\rho$ 값의 上限値를 좀 더 具體的인 式으로 定해주는 問題를 들 수 있겠다. 이 값은 實驗的으로 구하는 것이 가장 바람직하다. 끝으로 本 論文의 結果를 應用할 수 있는 代表的인 分野로서는 2次元 스펙트럼 해석을 들 수 있다.

- [1] B. Widrow, J.M. McCool, M.G. Larimore, C.R. Johnson, "Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter," *Proc. IEEE*, vol. 64, no.8, pp. 1151-1162, Aug. 1976.
- [2] T.A.C.M. Classen and W.F.G. Mecklenbrauker, "Comparison of the convergence of two algorithms for adaptive FIR digital filter," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-29, no.3, pp. 670-678, June 1981.
- [3] 辛潤炘, 李鍾珪, "HARF 알고리즘에서의 誤差緩和 필터 除去에 관한 研究," *電子工学会誌* 第20卷 第4号, pp. 1~9, 7月 1983年.
- [4] J.G. Proakis, "Channel identification for high speed digital communications," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-19, no.6, pp. 916-922, Dec. 1974.
- [5] J.G. Glover, "High order algorithms for adaptive filters," *IEEE Trans. Communication*, vol. COM-27, no.1, pp. 216-221, Jan. 1979.
- [6] R.G. Gilltin, F.R. Magee, "Self-orthogonalizing adaptive equalization algorithms," *IEEE Trans. Communications*, vol. COM-25, no.7, pp. 666-672, July 1977.
- [7] 辛潤炘, 李鍾珪, "LMS 適應 필터 設計를 위한 高速 收斂 알고리즘에 관한 研究," *電子工学会誌* 第19卷 第5号, pp. 13~19, 10月 1982年.
- [8] G.C. Goodwin, K.S. Sin, Adaptive filtering prediction and control.