論文 84-21-2-4

方向性 積線圖의 提案과 回路網 解析에의 應用(I)

(A Proposal of the Directed Product Graph and its Applications to Network Analysis(I))

全 純 美*, 金 秀 重**

(Sun Mi Jeon and Soo Joong Kim)

要 約

새로운 方向性 積線圖(directed product graph:DPG)를 提案하고 積線圖에 가지의 方向性과 및 環路의 概念을 導入하므로 位相數學的으로 能動과 또는 결합성 소자까지 포함하는 회로에 대한 Mason公式의 分母(△)項을 그 符號와 消去項에 무관하게 보다 쉽게 구하게 하였다. 또한 이때 회로망 선도에서 나무(tree)를 선택하는데 따르는 제약조건을 제거하였다.

Abstract

A new directed product graph (DPG) is proposed from the product graph for electrical networks. By introducing the direction of an edge and the concept of a loop to product graph, it is more easy and rapid to obtain topologically the denominator of Mason's formula without relation of the sign rule and without arising terms cancelled. Also the constraints of tree selection at a given network-graph can be removed.

I. 序 論

임의의 회로망에서 Mason의 利得公式[1]

$$M=\sum_{k=1}^{N}\frac{M_k\cdot\triangle_k}{\triangle} \quad (1)$$

但, $\triangle=1-\sum_{Pm1}+\sum_{Pm2}-\sum_{Pm3}+\cdots\cdots$ (2)

를 구하는 방법을 大別하면 位相數學的 方法(topological method)과 記號表示方法(symbolic method)으로 나눌 수 있다. 이중에 회로망을 位相數學的으로 해석하는 방법으로서는 Mason Graph(SFG), Coates Graph, 및 이들의 變形된 線圖(graph)[2]와 線圖이론(graph theory)을 이용한 방법[3]들이 있으며 最近에는 J·E·Barbay등에 의해 積線圖(product graph) 가 提案되었고[4] 그 後 이 積線圖의 가지에 符號를 부여하여 능동과 또는 결합성 소자까지 포함한 회로망을 位相數學的 方法에 의해 解析한 論文도 발표되었다.[5,6]

本 論文에서는 회로망 해석을 位相數學的으로 보다 용이하고 빠르게 처리하기 위해 方向性積線圖(directed product graph)를 提案하였고 이 積線圖에서 가지의 方向性과 環路의 概念으로 Mason公式의 分母를 그 各各의 項과 및 그 符號를 同時에 처리하여 이들을 보다 효율적으로 구하게 하였으며 이때 주어진 회로망으로부터 얻은 선도에서 나무선택은 어떤 제약조건없이 임의로 취하여도 가능하였다.

*正會員, 盛智工專大學 電子科

(Dept. of Electronics Eng., Sung Ji Technical Junior College)

**正會員, 慶北大學校 工科大學 電子工學科

(Dept. of Electronics Eng., Kyung Pook National Univ.)

接受日字: 1983年 11月 21日

Ⅱ. 方向性 積線圖(DPG)의 提案

모든 회로망은 항상 方向性 線圖(directed graph) G로 나타낼 수 있으며 이 회로망이 능동과 또는 결합성 소자를 포함할 경우에는 方向性 電壓線圖(directed voltage graph) G^V와 方向性 電流線圖(directed current graph) G^I로 분리하여 나타낼 수 있다.[3] 그러나 주어진 회로망의 해석을 위해 線圖 G로부터 나무(tree)는 임의로 택할 수 있으나 특별히 회로망이 線圖 G^V와 G^I로 분리 표현될 경우에는 단순히 G^V와 G^I의 나무가 같게 되도록 그 가지를 택한다.

1) 方向性 線圖G의 가지화살方向

회로망을 方向性 線圖G(G^V 및 G^I)로 표현할 때 이들 線圖에서 임의의 나무(tree) T_1에 대한 나무가지(tree branch)와 補木가지(cotree branch)의 화살(arrow)方向은 다음과 같이 한다.

i) 나무가지 화살은 해당가지의 전압강하 方向을 나타내게 취하고,

ii) 補木가지 화살은 해당가지의 전류方向을 나타내는데, 기준절점에 接續(incidence)된 나무가지들의 전압高低를 가능한 고려하여 취한다.

2) 積線圖(product graph) PG의 작성

方向性 線圖 G(G^V 및 G^I)에서 나무가지를 임피던스(Z)項으로 補木가지를 어드미턴스 (Y)項으로 取하고 또한 이들을 새로이 각각 좌우에 節點으로 나열한 후① 이들 각 Z(Y)節點에서 이와 絶組[cut-set](連組[tie-set])를 이루는 모든 Y(Z)節點까지 直線(積線圖에서 가지에 該當한다)으로 연결하여 積線圖 PG(PG^V 및 PG^I)를 얻는다.[4,6,7]

3) 方向性 積線圖 DPG의 작성

方向性 線圖 G(G^V 및 G^I)에서 個個의 Z(Y)의 화살 方向과 이와 絶組(連組)를 이루는 Y(Z)들의 화살방향이 一致하면 積線圖 PG(PG^V 및 PG^I)에서 節點 Z(Y)→節點 Y(Z) 되도록 해당가지에 화살을 취하고 反對이면 節點 Z(Y)←節點 Y(Z) 되도록 해당가지에 화살을 취한다.

이렇게 하여 方向性 積線圖(directed product graph) DPG(DPG^V 및 DPG^I)를 얻는다.

Ⅲ. 方向性 積線圖에서의 節點(node) 및 環路(loop)의 性質

方向性 積線圖 DPG(DPG^V 및 DPG^I)에서 가지(ZY項)들과 接續이 없는 節點이나, 또는 가지들에 依해 形成되는 단독환로② (single loop)는 모두 다음과 같은 性質을 갖는다.

(정리 1) 方向性 積線圖 DPG(DPG^V 및 DPG^I)에서 가지와 接續이 없는 節點이나 또는 가지들에 依해 形成된 단독환로는 모두 Mason行列式 전개에서의 消去項이다.

(증 명) J. B. Murdoch[8]와 R. R. Mielke & D. P. Brown[9]에 의해서 임의의 비분리 선도(non-separable graph) G에서 나무 T_1에 대한 기본절조행열(fundamental cut-set matrix)을 $\alpha_F=[U\ \alpha_C]$라 할 때 [α_C의 모든 次數(1~最大次數)의 非特異 副行列의 數] + 1(one)은 Mason行列式의 非消去項과 1對 1의 對應關係에 있고 또한 B. G. LEE[7]에 의해서 副行列 α_C는 이 線圖 G의 나무 T_1에 대한 DPG에서의 Z節點 및 Y節點으로 각각 그 行과 列을 취한 積行列(product matrix)과 完全히 一致한다. 이제 여기서 α_C의 임의의 副行列을 α_{C1}이라 두자. 그러면 이 α_{C1}에 해당하는 DPG(DPG^V 및 DPG^I)의 副線圖(subgraph)가 가지의 接續이 없는 節點을 포함하거나 또는 단독환로를 형성하면 반드시 副行列 α_{C1}은 그 한행이나 한열이 모두 零(zero)이거나, 또는 행이나 열중에 적어도 한쪽의 모든 요소는 두 개의 零아닌 요소(+1, −1) 만을 가지므로 $|\alpha_{C1}|=0$으로 된다. 즉 副行列 α_{C1}은 特異行列(消去項)이 된다. 따라서 (정리 1)은 성립한다.

Ⅳ. Mason公式의 分母(△)項 결정

1) DPG에서 각 Y(Z)節點의 副線圖

DPG(DPG^V 및 DPG^I)로부터 Mason公式의 分母(△) 各項을 좀더 간편하게 구하기 위해 다음과 같이 각 Y(Z)節點에 대한 副線圖를 구한다. 즉 DPG(DPG^V 또는 DPG^I)에서 각 Y(Z)節點들을 그 隣接(adjacency)된 Z(Y)節點들이 모두 같은 것끼리 분류하여, 함께 분류된 節點을 가장 많이 갖는 Y(Z)節點의 副線圖부터 구하되 DPG(DPG^V 및 DPG^I)에서 이 Y(Z)節點과 같이 분류된 다른 모든 Y(Z)節點들을 그 接續된 가지와 함께 除去시켜 얻는다. 또한 이미 副線圖를 구한 Y(Z)節點들은 나머지 다른 Y(Z)節點에 대한 副線圖에서는 그 接續된 가지와 함께 除去시킨다.

2) Mason公式의 分母(△)項 결정

DPG(DPG^V 및 DPG^I)에서 消去項으로 나타나는 形態(pattern)를 Ⅲ의 (정리 1)에 의해 細分하면

---

① 만일 方向性 線圖G의 G^V와 G^I가 서로 다른 경우, Z節點과 Y節點을 나열한 配列順序가 PG^V와 PG^I에서 서로 同一해야 한다.

② 단독환로 : DPG(DPG^V 또는 DPG^I)의 임의의 한 節點 Z(Y)에서 출발하여 그 출발점으로 되돌아 오는 폐경로(closed path)로써, 이 경로중의 節點들로만 이루어지는 다른 어떠한 폐경로도 포함치 아니함을 의미한다(가지 方向性은 관계없음).

i) 가지(ZY項)의 接續이 없는 節點Z(또는 Y)를 포함하는 형태.

ii) 여러개의 단독환로를 형성하되 그 서로 겹치는 가지가 唯一하지 않은 형태.

iii) 적어도 한쪽(Z 또는 Y)節點들 모두, 各各 가지(ZY項) 두개씩 만을 接續하는 단독환로의 형태.

iv) 隣接된 Z(Y)節點들이 모두 같은 Y(Z)節點이 2個 이상 포함된 형태.

와 같다.

따라서 DPG(DPG^V 및 DPG^I)의 各 Y(또는 Z) 節點들에 대한 副線圖로부터 위의 4가지중 어느형태도 이루지 아니하는 가지(ZY項)들의 모든 次數의 곱항을 구한다.

V. Mason公式의 分母(△) 各項의 符號 결정

주어진 회로망에 비결합성 수동소자만 있을 경우($DPG^V=DPG^I$)와 능동과 또는 결합성 소자도 포함할 경우($DPG^V \neq DPG^I$) 모두, 위에서 구한 各項의 符號를 다음과 같이 결정한다.

i) Ⅳ의 2)에서 구한 項들 각각에 대해 이들 各項의 Z 및 Y節點들로 이루어진 DPG(DPG^V 및 DPG^I) 의 副線圖에서 어떠한 節點도 중복되지 않게 가능한 모든 가지를 택한다. 이때 이들 副線圖가 가지 一部를 唯一하게 共有하는 多重環路(multi-loop)일 경우에는 선택된 가지들 중에 이 共有가지가 포함되어서는 안된다.

ii) 이들 副線圖에서 택하여진 가지들의 方向性을 節點 Z →節點 Y 는 (+)로, 節點 Z ←節點 Y 는 (−)로 취하여 이를 모두 곱한다.

iii) 이 선택된 가지들의 交叉回數(cross number)③를 C라 하면 ii)의 結果에 $(-1)^C$를 곱한다.

iv) 주어진 회로망이 능동과 또는 결합성 소자도 포함할 경우($DPG^V \neq DPG^I$)에, 各 項의 符號는 이들 各 項에 해당하는 DPG^V 및 DPG^I의 副線圖로부터 ii)와 iii)에 의해 各各 구한 符號를 서로 곱하여 얻는다.

따라서 비결합성 수동소자만 있을 경우($DPG^V=DPG^I$)는 항상 (+)項만 존재하게 된다.

이제 Ⅳ의 1)에서 얻은 DPG(DPG^V 및 DPG^I)의 各 Y(Z)節點에 대한 副線圖로부터 구한 Mason 公式의 部分 分母項들을 $\triangle_i$ (i=1~총 Y(Z)節點 개수)라 하면, Mason公式의 전체 分母(△)는

$$\triangle = 1 + \sum_i \triangle_i \qquad (3)$$

但, i=1~총 Y(Z)節點 개수

으로 표현된다.

③ 交叉回數(cross number) : DPG(DPG^V 및 DPG^I)에서 가지들의 相互 엇갈린 횟수를 의미한다.

Ⅵ. 例 題

그림 1의 회로망 선도는 가지 4와 5, 가지 4와 6 사이에 결합성 소자가 있는 경우이다. 이회로망 선도에 대한 方向性 電壓線圖 G^V와 方向性 電流線圖 G^I를 작성하면 그림 2의(a) 및(b)와 같다.

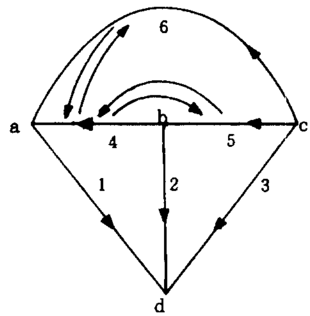


그림 1. 결합성 소자를 포함한 회로망 선도 G
Fig. 1. Network-graph G with coupling elements.

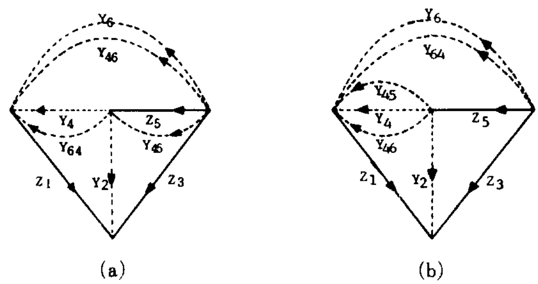


그림 2. 그림 1의(a)방향성 전압선도 G^V 및(b)방향성 전류선도 G^I
Fig. 2. (a) Directed voltage graph G^V and (b) directed current graph G^I of Fig. 1.

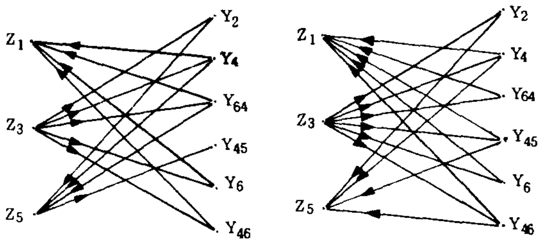
이때 나무(tree)는 임의로 택하되 (a)G^V와 (b)G^I에서 同一하게 취해야 하며 여기서는 가지 1, 3, 5를 나무로 택하였다.

따라서 나무가지 (1, 3, 5)를 임피던스(Z)로 나머지 補木가지(2, 4, 6, 45, 46, 64)를 어드미턴스 (Y)로 하여 작성한 것이다.

그림 2의 (a)G^V 및 (b)G^I로부터 方向性 電壓積線圖 DPG^V 및 方向性 電流積線圖 DPG^I를 그리면 그림 3의 (a) 및 (b)와 같다.

그림 3으로 부터 Mason公式의 分母(△)項을 구하자. 여기서는 (a)DPG^V로 부터 구하기로 한다.

各 Y節點에 대한 DPG^V 및 DPG^I의 副線圖를 작성하는 순서는 다음과 같다. a)DPG^V 또는 b)DPG^I에서



(a) (b)

그림 3. 그림 2 의 (a) 방향성 전압적선도 DPG^V 및 (b) 방향성 전류적선도 DPG^I

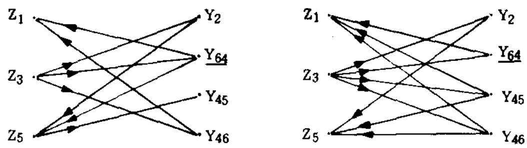
Fig. 3. (a) Directed voltage product graph DPG^V and (b) directed current product graph DPG^I of Fig. 2.

그 隣接된 Z節點들이 모두 같은 Y節點들 중에 Y_4 節點이 (a) DPG^V에서 Y_{64} 節點과, (b) DPG^I에서 Y_{45} 節點 및 Y_{46} 節點과 함께 분류되어 3個의 節點(Y_{45}, Y_{46}, Y_{64})를 가지므로 먼저 Y_4 節點에 대한 DPG^V 및 DPG^I 의 副線圖를 구한다. 즉 (a) DPG^V 및 (b) DPG^I 各各에서 Y_{64}, Y_{45}, Y_{46} 節點과 그에 接續된 가지들을 함께 除去하면 된다. 이렇게 하여 작성된 副線圖가 그림4의 (a) 및 (b)이다.

그림 4 (a)로부터 Ⅳ의 2)에 따라서 Z_1Y_4, Z_3Y_4 및 Z_5Y_4 項을 포함하는 가지(ZY項)들의 모든 차수의 곱항을 구한 후, 이항들이 그림4 (b)로부터 Ⅳ의 2) 조건에 맞는지를 확인한 다음 이들 各項의 符號를 Ⅴ에 의해 구하고, 이를 $\triangle_1$이라 두면 다음과 같다.

$$\triangle_1 = +Z_1Y_4+Z_1Y_4Z_3Y_2+Z_1Y_4Z_5Y_2+Z_1Y_4Z_3Y_6Z_5Y_2 +Z_3Y_4+Z_5Y_4+Z_5Y_4Z_1Y_6+Z_5Y_4Z_3Y_6$$

Y_4 節點과 유사하게 Y_{64} 節點에 대한 DPG^V 및 DPG^I 의 副線圖를 작성하면 그림 5 의 (a) 및(b)와 같다. 즉 그림 3 의 (a) DPG^V 또는 (b) DPG^I 에서 Y_{64} 節點에 隣接된 Z節點만을 역시 隣接하고 있는 다른 Y節點은 Y_6 節點뿐이므로 (a) DPG^V 및 b) DPG^I 에서 이 Y_6 節點과 이미 副線圖를 구한 Y_4 節點을 그 接續된 가지와 함께 除去하면 된다.



(a) (b)

그림 5. Y_{64} 節點에 대한 (a) DPG^V 의 부선도 및 (b) DPG^I 의 부선도

Fig. 5. (a) Subgraph of DPG^V and (b) subgraph of DPG^I for vertex Y_{64}.

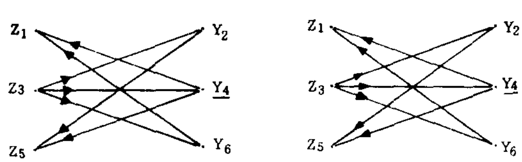
그림 5 의 (a) 및(b)로부터 Ⅳ의 2)와 Ⅴ에 의해 Z_1Y_{64}, Z_3Y_{64} 및 Z_5Y_{64} 를 포함하는 가지(ZY項)들의 모든 차수의 곱항을 그 부호와 함께 구하고, 이를 $\triangle_2$라 두면 다음과 같다.

$$\triangle_2 = +Z_1Y_{64}+Z_1Y_{64}Z_3Y_2-Z_1Y_{64}Z_3Y_2Z_5Y_{45} +Z_1Y_{64}Z_5Y_2-Z_1Y_{64}Z_5Y_{45}-Z_1Y_{64}Z_3Y_{46}Z_5Y_2 +Z_3Y_{64}-Z_3Y_{64}Z_5Y_{45}-Z_5Y_{64}Z_1Y_{46}-Z_5Y_{64}Z_3Y_{46}$$

이와 같은 방법으로 Y_6, Y_{46}, Y_2, Y_{45} 節點들에 대한 DPG^V 및 DPG^I 의 副線圖를 구하고 이로부터 各項과 그 符號를 Ⅳ의 2)와 Ⅴ에 따라 구하여 이를 各各 $\triangle_3$ $\triangle_4$, $\triangle_5$, $\triangle_6$ 라 두면 Mason公式의 分母($\triangle$)는 다음과 같이 된다.

$$\triangle = 1+\sum_{i=1}^{6}\triangle_i$$
$$= 1+Z_1Y_4+Z_1Y_4Z_3Y_2+Z_1Y_4Z_5Y_2+Z_1Y_4Z_3Y_6Z_5Y_2 +Z_3Y_4+Z_5Y_4+Z_5Y_4Z_1Y_6+Z_5Y_4Z_3Y_6 +Z_1Y_{64}+Z_1Y_{64}Z_3Y_2-Z_1Y_{64}Z_3Y_2Z_5Y_{45} +Z_1Y_{64}Z_5Y_2-Z_1Y_{64}Z_5Y_{45}-Z_1Y_{64}Z_3Y_{46}Z_5Y_2 +Z_3Y_{64}-Z_3Y_{64}Z_5Y_{45}-Z_5Y_{64}Z_1Y_{46}-Z_5Y_{64}Z_3Y_{46} +Z_1Y_6+Z_1Y_6Z_3Y_2+Z_1Y_6Z_5Y_2-Z_1Y_6Z_5Y_{45} \underline{-Z_1Y_6Z_3Y_2Z_5Y_{45}}+Z_3Y_6+Z_3Y_6Z_5Y_2-Z_3Y_6Z_5Y_{45} +Z_1Y_{46}+Z_1Y_{46}Z_3Y_2+Z_1Y_{46}Z_5Y_2+Z_3Y_{46} +Z_3Y_2+Z_5Y_2-Z_5Y_{45}$$

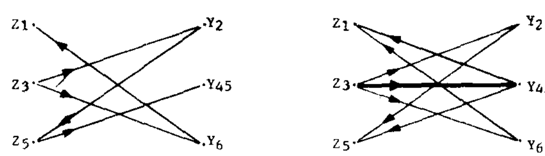
여기서 各項들의 符號 결정방법을 $-Z_1Y_6Z_3Y_2Z_5Y_{45}$ 項의 경우를 들어 설명하기로 한다. 이 項에 해당하는 DPG^V 및 DPG^I 의 副線圖는 그림 6 의 (a) 및(b)와같다.



(a) (b)

그림 4. Y_4 節點에 대한 (a) DPG^V의 부선도 및 b) DPG^I 의 부선도

Fig. 4. (a) Subgraph of DPG^V and (b) subgraph of DPG^I for vertex Y_4.



(a) (b)

그림 6. 各項의 부호결정 설명에 대한例 (例 : $-Z_1Y_6Z_3Y_2Z_5Y_{45}$)

Fig. 6. An example for explanation of sign-decision of each term (example: $-Z_1Y_6Z_3Y_2Z_5Y_{45}$).

그림 6 의(a) 및(b)로부터 어떤 節點도 중복되지 않고 택할 수 있는 모든 가지와 이 택하여진 가지들의 交叉回數는 예를 들면 아래와 같다. 특히 그림b)의 경우는 가지一部(Z_3Y_{45})를 공유하는 2重環路이므로 이 共有가지는 선택할 수 없다.

그림(a)의 경우 : $Z_1Y_6(\leftarrow)$, $Z_5Y_{45}(\rightarrow)$, $Z_3Y_2(\rightarrow)$ 交叉回數 2回.

그림(b)의 경우 : $Z_1Y_{45}(\leftarrow)$, $Z_3Y_6(\rightarrow)$, $Z_5Y_2(\leftarrow)$ 交叉回數 2回.

따라서 이 項의 符號는 $[(-1)\times(-1)^2]\times[(+1)\times(-1)^2]=(-1)$ 즉 (−)項으로 된다.

Ⅶ. 結 論

회로망의 해석을 위해 既存의 積線圖를 근거로 하여 새로운 方向性 積線圖(DPG)를 提案하였고 이로부터 나타나는 積線圖가지의 方向性과 가지들의 相互交叉를 符號로 처리함으로써 Mason 公式의 分母 各項의 符號를 용이하게 결정할 수 있었고 積線圖에 環路의 概念을 導入함으로 因해서 分母(△) 各 項의 構成이 積線圖의 形態(pattern)에 의해 결정됨을 보였다. 즉 Mason 公式의 分母(△) 各項과 그 符號를 位相數學的으로 同時에 처리함으로써 消去項과 符號律에 관계없이 보다 効率的으로 구할 수 있었다.

또한 회로망 선도 G에서 나무가지 선택의 제약조건을 除去하여 어떠한 회로망 선도에서도 任意로 나무가지를 선택할 수 있게 하였다.

이 이론은 능동과 또는 결합성 소자를 포함한 모든 전기회로에 그대로 적용이 되며 여기서는 결합성 소자만을 포함한 회로를 예로 들어 說明하였다.

參 考 文 獻

[1] Mason S.J., "Feedback theory; Further properties of signal-flow graph", *Proc. I.R.E.*, vol.44, no.7, pp.920-926, July 1956.

[2] W.K. Chen, *Applied Graph Theory*. Chap.3, 1975.

[3] W. Mayeda, *Graph Theory*. Chap.8, 1971.

[4] J.E. Barbay, G.V. Lago and R.W. Becker, "Product graph", *Proc. of the 15th Symp. on Circuit Thory*, 1972, Univ. of Missouri.

[5] 金秀重, 李柱根, "積線圖에 依한 回路網 函數의 決定", KIEE, vol. 15, no. 6, pp. 48-51, 12. 1978.

[6] 金秀重, "能動과/또는 結合性 回路網에 대한 積線圖", KIEE, vol. 14, no. 4, pp. 32-37, 10. 1977.

[7] B.G. Lee, "The product matrices and new gain formulas", *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-27, no.4, pp.284-292, April 1980.

[8] J.B. Murdoch, *Network Theory*. Chap.6, 1970.

[9] R.R. Mielke and D.P. Brown, "Cut-set submatrices and graph structure", *Mid-west Symp. Circuit Theory*, vol.8, pp. 494-99, 1975.