

C³I와 스토캐스틱 콘트롤에 관하여

李 萬 炯
(釜山大 工大 副教授)

■ 차

례 ■

- | | |
|-----------------------------------|---------------|
| 1. 서론 | 4. 추계학적 제어시스템 |
| 2. C ³ I의 소개 | 5. 결론 |
| 3. C ³ I에 응용되는 최신제어 이론 | 참고문헌 |

1 서론

전자공업은 방위산업발달에 획기적인 역할을 담당하고 있으며, 특히 전략적 C³I (Command, Control, Communication and Intelligence) 개념을 도입하여, 국가방위를 위한 연구가 미국의 여러 대학들과 국방성 산하 연구기관에서 활발히 진행되고 있다. 11~13 이 글에서는 C³I에 대한 개략적인 개념을 소개하고, 추계학적 (Stochastic) 관점에서 C³I가 실전을 위하여 어떻게 응용되고 있는가를 고찰하기 위하여 최근에 발표되고 있는 비선형필터링 (Non-linear Filtering), 적응형필터링 (Adaptive Filtering), 최적제어 문제들을 소개하고자 한다.

최근 컴퓨터와 통신기술의 급진적인 진보에 따라 C³I는 군사계획에 있어 그 임무완수를 위한 최적의 요소로서 이용되는 전략적 개념이다. C³I는 중앙집중 데이터 처리를 위한 초대형 컴퓨터의 효용에 기반을 두고 1960년도에 미국에서 시작되었다. 이러한 중앙집중 처리 장치는 통신시설과 직접 상호 연결되어 디지털 데이터를 명령 지휘소 사이에 전송함으로써 그 운용 효율을 극대화시킬 수 있도록 하였다. 중앙 집중 적으로 자료처리를 가능하게 만든 컴퓨터의 출현은 육상, 항공, 해상, 해저등에서 이동중인 표적 (Moving Target)의 추적을 위해 추계학에 바탕을 둔 Kalman-Buchy 필터⁷⁾, 확장된 (Ex-

tended) Kalman 필터^{8),9)}, 그 밖의 여러 비선형 추정 (Estimation) 알고리즘^{10)~13)}, 최적 이론, Identification 등을 가능 하도록 해 주고 있다.

먼저 추계학이 C³I에 응용되는 것을 다루기 전에 C³I에 대하여 간략히 소개하고, 제어공학분야중에서 추계학의 역할, 그리고 C³I와의 관계를 알아 보기로 한다.

2 C³I의 소개

2.1 C³I의 정의

C³I에 대하여 여러가지로 정의되고 있으나 가장 적합한 정의를 내리기는 극히 어려운 일이다. C³I는 정보와 지시의 습득, 수집, 프로세싱, 평가 재배급 등을 통한 항공, 육상, 바다에 있는 아군의 시설 및 인적 자원들을 적시에 판단 결정을 함으로써 그 이용의 효율성을 높여 주는 수단으로 단순히 정의하고자 한다. 네가지 요소로 이루어진 C³I는 서로 상관 관계를 가지고 유지되고 있으며 그 각각의 특성은 다음과 같이 분류할 수 있을 것이다.

- 명령 (Command) : 목적한 바를 수행하기 위하여 임무를 부여할 대상과 지시의 결정.
- 통제 (Control) : 할당된 임무, 목적들에 대한 각 참가자의 관리.
- 통신 (Communication) : 모든 참가자들 사이에서 서로 정보의 교환.

·지능(Intelligence) : 적의 상태와 목적의 추정.

C³I의 이 네가지 구성요소에 있어서 공통된 요소는 정보처리로서 이것은 다음의 두가지 목적을 수반한다. 첫째 그들이 해결할 수 있으며, 가장 중요하다고 사료되는 문제들에 대해 이용할 수 있는 참가자의 선정, 둘째로 각 임무를 띤 요소들이 그 할당된 목적과 만나게될 확률을 최대로 해주는 것이다. C³I는 종종 Force Multiplier 라고도 불리우는데 이는 좋은 C³I가 현재 보유하고 있는 능력보다 효율적으로 부여된 임무를 수행할 수 있기 때문이다.

예로 AWACS (Airborn Warning and Control System)은 C³I에 한 구성요소로서 대공방위에 있어 전투기와 지대공 미사일들을 지원하는 체제로서 가장 효율적으로 주어진 여건하에 정보를 수집하여 지휘관에게 적절한 작전수행이 가능하도록 해준다.

여기서 제어 시스템들은 임무수행의 지시에 적합하도록 페루우프 관계를 포함하기 때문에 센서에 입각한 시스템들로 구성된다. 제어 시스템에 대해 개발시켜야 할 프로그램은 대공방위, 지상목표물 공격, 해상방위 (항공 모함, 전함, 잠수함) 등과 같이 특별한 임무들을 수행하는데 필요하고 다양한 센서에 의해 영향을 받는다.

2.2 C³I에 필요한 기술

1970 년도에 들어 디지털 통신의 발달은 초대형 컴퓨터와 함께 C³I의 영역을 더욱 확대시켜 주었다. 지금까지 저장되어 있는 정보와 위성통신은 거대한 컴퓨터 연결망에 있어서 그 중추가 되며 미래에 전개될 명령과 감독체제에 대해 핵심적인 역할을 담당하게 될 것이다. 현대 C³I의 컴퓨터 연결망은 서로 국부적으로 설치된 컴퓨터들로 구성되어 있으며, 유사시 상업적인 시스템 역시 이 전체의 연결망을 위해 존속해야만 할 것이다. 현재의 기술 개발은 기존 C³I를 지속 시키면서 훨씬 많은 양의 데이터를 취급 할 수 있도록 분포된 소프트웨어(분포된 자료 처리와 데이터 베이스)의 개발이 강조되고 있다. 컴퓨터와 컴퓨터 통신망은 그 연결이 복잡 다단하므로, 각 컴퓨터에 공급되는 업무에 대한 우선 순위의 부여 및 그 통제 또한 앞으로 연구개발되어야 할 것이다. 오늘날 이 시스템은 같은 종류의 공통된 명령어를 가지고 자료를 교환하면서 그 복잡성을 해결하고 있으나 시스템 상호간의 협력을 보다 높은 수준까지 달성시키기 위해서 중앙집중식으로 일원화된 자료 처리방식을 선택하여야 할 것이다. 또 주어진 데이터를 근거로 하여 내린 명령과 통제가 지속되면서 공격을

가하는 동안과 공격후 군사력을 재편성하기 위해 분포되어 있는 데이터를 재수집하고 이를 바탕으로 한 새로운 명령과 통신망의 구축이 요구 될 것이다.

비록 현대의 디지털 기술은 정보를 처리하고, 기억시키고, 전달하는 능력은 크게 증가시켰지만 “ 데이터 홍수” 을 처리하지는 못하고 있다. 개발된 센서와 신호 처리 장치는 보다 많은 데이터를 처리하도록 설계되어야 할 것이며, 컴퓨터들도 보다 빠른 속도로 처리하며 기억시켜 나가도록 해야 한다. 결과적으로 정보운영 시스템에서 보다 정확한 기술적 프로그램 제작하기 위해서, 현대 통계학, OR, 의사결정 이론을 이용한 최적인 의사결정 시스템을 개발하고 있다. 이 시스템 장치들은 문제에 대해 직접 정보를 최소로 줄이고 그 대안을 만들어 의사 결정자가 적극적으로 그 장치에 적응해 나가도록 해 주는 것이다. 최근 흥미있게 대두되는 것은 Knowledge-based 시스템인데 이는 가능한 응답의 가지수가 너무 많아 인간이 빨리 처리 할 수 없는 상황에서는 매우 성공적으로 결론을 얻을 수 있을 것이다. 전략상으로 이러한 시스템은 정치적, 군사적, 그리고 경제적 여건에 기초를 둔 중요한 응답에 대한 의견을 제시해 주는데 사용될 수 있을 것이다. 쇠도하는 데이터를 처리하기 위한 다른 중요한 분야 즉 인간과 기계사이의 interface 문제인데, 비록 상호연관되어 전개되는 터미날은 어떻게 설계해야 하는지 알고 있으나 데이터가 무한히 많은 경우에는 인간과 기계사이의 interface 문제를 잘 이해 하지 못한다. 자동적으로 판단에 도움이 될 이 시스템의 용도가 증가함에 따라 사용자는 선택을 위한 기계와의 상호작용을 주시해야 하므로, 지금까지 발달하지 못한 인간과 기계사이의 관계를 규명짓는 소프트 과학에 많은 연구투자가 병행되어 져야만 한다.

2.3 C³I 오퍼레이션과 시뮬레이션

불행하게도 C³I 개념은 아주 빠른 속도로 진보되어 가는 경향 때문에 상황의 변동에 적응시켜 나가기 위해서는 막대한 경비의 지출이 요구되고 있는 실정이다. 따라서 수행하는 데 있어 비용이 거의 들지 않고 실제 작전하에서 전개될 위험부담이 없도록 해 줄 수 있는 강건한 시스템으로 발전시켜 나갈 수 있는 방법들이 개발되어야만 한다. 본 절에서는 C³I 시스템들의 효율증대를 위한 요구 사항들과 그 측정법들을 알아보고 시스템과 그들 요소의 발전과정과 평가를 할 수 있게 하는 시뮬레이션 접근법을 고찰해 보기로 한다. 초대형 컴퓨터에 입각한 시뮬레이

선 방법 역시 비용이 소요되며 그것의 개발과 오퍼레이션의 운용 또한 결코 쉬운일은 아니다.

C³I에 요구되는 것으로 “지휘자는 무엇을 아는 것이 필요한가?” 라고 하는 간단하고 의문의 여지가 없는 이 질문에 대하여 만족 할만한 답변은 어렵다. 왜냐하면 그것은 다른 것들 가운데서 어떤 수준의 명령이 포함되어 있으며, 분쟁상황이 무엇에 관한 것이며, 얼마나 많은 경험을 지휘관이 가지고 있으며, 그의 선택권, 그에 소속된 병력 및 군사장비, 그 가진 지성에 따라 위의 질문에 대한 답이 좌우된다. 초 정밀도를 갖는 센서와 빠른 통신은 적당하게 변화하는 정도의 국부적 전개 상황에 대해서 지휘자가 새로운 입력을 넣어 주지 않아도 컴퓨터가 직접 의사결정할 수 있도록 해 주었다. C³I의 센서 체제는 요구된 정보와 데이터가 적시에 필요한 장소에서 이용 할 수 있도록 확신시켜 주는 것이 강조되어야만 한다. 의사 결정장치를 가진 시뮬레이션이 C³I 시스템 수행에 있어서 결정적으로 필요한 대량의 정보원으로 알려져있다. 시뮬레이션하는데 요구되는 형태는 아직 자세히 파악되어 있지 않지만 그러나 일반적 정의에 의하면 그것은 다음의 사항들을 취급해 주어야 하므로 그 영역은 광범위하다.

- 중요한 명령들과 명령의 수준.
- 다중통신과 그 특성.
- 정보 센서와 자동화된 데이터 프로세싱.
- 원폭과 관련되는 데이터 기능.
- 실 상황과 전쟁 시나리오.
- 인간과 기계와의 interface.

시뮬레이션은 명령과 감독의 의미를 띄고 시스템 수행특성과 연관되어 있지 않으면 안된다. 다시 말

하면 시간지연, 정도, 결정, 해결과 같은 수단들이 명령과 감독의 실제 유통 즉 목표물의 확인, 표적의 파괴, 파손과 살상, 육상 혹은 해상 감시, 전투 혹은 위기의 출현과 관련을 갖지 않으면 안된다. 성공 또는 실패에 대한 절대적이고 만능적인 지표가 없기 때문에 시뮬레이션은 주어진 조건하에서 최적인 모델과 명령장치를 사용함으로써 비교 평가를 행하여야만 한다. 명령 장치는 전쟁과 위기에 영향을 미칠 그 환경과 시나리오와의 상호작용을 염두에 두고 행해야 한다. 따라서 양진영의 전쟁게임의 시뮬레이션은 요구하는 많은 단계를 거쳐 시행되어 지야 한다.

그림 1은 최근 요구 조건에 대한 시뮬레이션 모의개념을 간략하게 보여 주고 있다. 이것은 필수적으로 자동 조작되는 양진영의 전쟁게임을 나타내고 있다. 중요한 요소들로서는 군사력모델, C³I 모델, 명령상황전개와 명령종합 입력루우프로 구성되어 있다. 군사력의 모델은 시나리오에 의한 일련의 디지털 전투모델과 충돌레벨들을 추정하는데 참고된다. 지형, 날씨, 그리고 또 다른 환경요소는 시나리오를 적합하도록 해 줄 수준에서 모델화하는 것이 필요하다. 두번째 중요한 성분인 C³I 부분의 소프트웨어 구성요소들은 지능센서, 통신의 상호연결, 전개된 상황운용, 원폭과 자동프로세스를 위해 개발되어야 할 것이다. 전쟁에서 바로 C³I를 통한 데이터 교환은 정보를 제공해주며 그 시스템은 지휘관에 전달되도록 해준다. 지휘관은 그래프 상황도를 보며 정보를 계속 수집하여 주어진 상황에 적절한 상황판단을 내린다. 전투에 참가한 군사력에 대한 지휘관의 명령은 모델화된 통신조직을 통하여 다시 하달되고

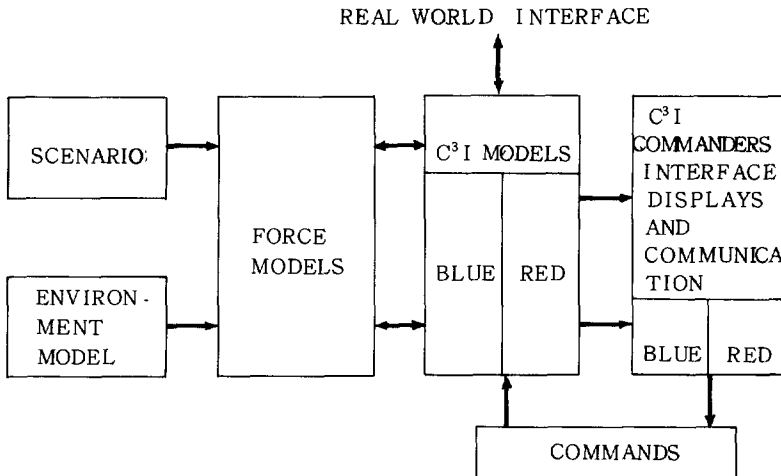


그림 1. 일반적 C³I 시뮬레이션 개념

군사력은 그들이 상황하에서 지닌 여건에 따라 재 운용된다. 청군과 C³I 관리가 강조되고 있는 동안, 홍군의 지휘관은 청군작전에 대해 적절히 대처해 나갈 소프트웨어를 확인하여 관리하는 것이 필요하다. 지휘관들을 훈련시키는 장치로서 시뮬레이션 모의실험의 그 잠재적 가치는 과대평가되어 지지 않는다. 시뮬레이션과 실제 상황연습은 다음과 같이 비교할 수가 있다. 시뮬레이션은 시스템과 그 변화를 평가 하는데 빠르고 값싼 수단이며 실제 상황연습은 시뮬레이션의 정도를 높여 주고 보완해 주는 수단으로써, 또 궁극적인 조사방법으로 필요한 것이다. 마지막으로 시뮬레이션 기법은 국제적인 분쟁에서 뿐만 아니라 실제로 있을지 모르는 대규모 전면전과 같은 경우까지 사용 가능하다. 현재 C³I의 기술수준은 여기서 언급하고 있는 것과 같이 정밀한 모의실험으로써 유지되어야 하고 시뮬레이션을 위한 필요한 장비와 충분히 우수한 인적자원, 연구와 경비가 뒷받침되어 이를 수행하여야 한다.

③ C³I에 응용되는 최신제어이론

현대 과학의 기술적 진보는 방어명령, 감독 및 통신등에 있어서 일대 혁신적인 역할을 담당하고 있다. 전투능력을 향상시킬 수행능력, 용량, 종합적 기능들을 가진 C³I 시스템을 운용하는데 있어 상호 연관된 일반적 시스템을 개발, 제작, 이용하고자 할 때 여러 전문적인 분야가 포함되어 있다. 효율적인 C³I 체계를 오퍼레이션하는데 있어 우수한 시설과 병기가 요구되고 있으며 이들 대부분이 최신 제어이론, 근대수학, OR, 의사결정이론이 응용되고 있다. 여기서 국부적으로 제어공학분야가 실제 어떻게 이용되고 있는지를 검토해 보고자 한다.

모든 유도병기제어와 유도시스템들은 고전적 제어이론으로 설계제작되어 왔다. 1868년 조속기에 관한 Maxwell의 연구에서 시작하여 1930년대 벨 연구소의 Nyquist와 Bode 등의 성공적 연구기여에 까지 지속되었다. 세계 2차대전 동안 레이더와 총의 높은 정확도의 필요에 따라 이 고전적 기법들은 전쟁이 끝날때 까지 기술자와 과학자들에 의해서 응용되어 왔다. 아직도 많은 분야에서, 이 고전적 기술은 제어 기술자들의 기초적인 기법으로 신뢰되고 있다. 고전적 방법으로 제어시스템 설계의 필수적 특성은 안정도, 잡음, 혹은 비선형의 각 영향을 분리하여 고려해 주고 적절한 절충에 도달할때까지 계속하는 설계절차를 행하는 접근법에 있다. 유도미

사일루우프 설계를 생각해 보자. 이때 목적은 비록 차단저지 지역에서 실패할 율을 최소화되도록 해주는 것이지만, 이것은 실제 설계과정에서는 거의 고려해 주지 않는다. 특별한 유도루우프 대신 모형이 선택되어 지면, 충분히 큰 루우프이득을 갖도록하여 안정상태에서 요구된 정확도를 만족시키는 것으로 설계를 하게 된다. 루우프는 Nyquist 선도가 적합한 이득과 위상여유에 도달할때까지 보상회로를 사용하여 안정화 시킨다. 시스템의 수행에 있어서 잡음의 영향은 계산 혹은 시뮬레이션에 의하여 구하여지며, 만약 어떤 요소들이 큰 오차를 가지거나 포화될 가능성이 있음이 발견될 시는 필터링을 하거나 혹은 루우프이득을 감소시켜 주어야 한다. 이때 실패간격, 잡음특성, 안정도, 정상상태오차 등도 함께 고려되어져야만 한다. 여기서 가장 적합한 이득과 위상여유는 무엇이며 잡음성능과 안정도 사이의 절충은 무엇인가 하는 문제가 대두된다.

고전적 제어이론에 대해 근대제어이론은 실패간격과 같은 매개변수들을 명백하게 최적화 하는데 까지 관심을 기울이며, 고전적 기법 사용에 필요한 특별한 설계절차를 통하지 않고 목적한 바를 달성할 수 있도록 하고 있다. 물론 근대제어이론은 Wiener 필터의 개발로 2차대전에서 시작되어 오늘에 왔으나 40년전의 기술자들도 최적화 문제를 고려해 주고 있었다. 비록 Wiener 필터의 실질적 사용은 유도무기 시스템들에 응용하는데 있어 다소 제한이 있으나, Wiener 필터 개발은 근대제어의 아이디어를 도입시켰고 상태추정과 최적제어의 근대개념까지 연결시켜 주는 역사적 중요성을 가지고 있다.

3.1 Wiener 필터

1940년대 엔지니어들이 직면하였던 근본적인 문제는 최소오차로 잡음이 존재하는 표적을 추적해야 하는 레이더를 어떻게 설계할 것인가 하는 것이었다. 추적구간 동안 순시오차를 최소로 하기 위하여 오차의 절대값을 적분함으로써 이를 극복할 수 있었는데 이를 성능지표라 부르고 오늘날 까지 자주 사용되고 있는 기법중의 하나이다. 그 다음의 문제는 목표물과 잡음의 기동을 정의하는 것이었다. 잡음이 시간의 함수로 정의된다면 문제는 간단하나 그들은 시간의 랜덤함수이므로 문제가 야기 된다. 표적의 운동신호는 전략기가 큰 관성때문에 한 위치에서 다른 위치로 신속히 움직이는 것은 불가능하므로 저주파에 밀집되어 있다고 생각한다. 표적운동신호 θ_T 와 잡음신호 θ_N 는 그들의 통계학적 특성이 시간에 따라

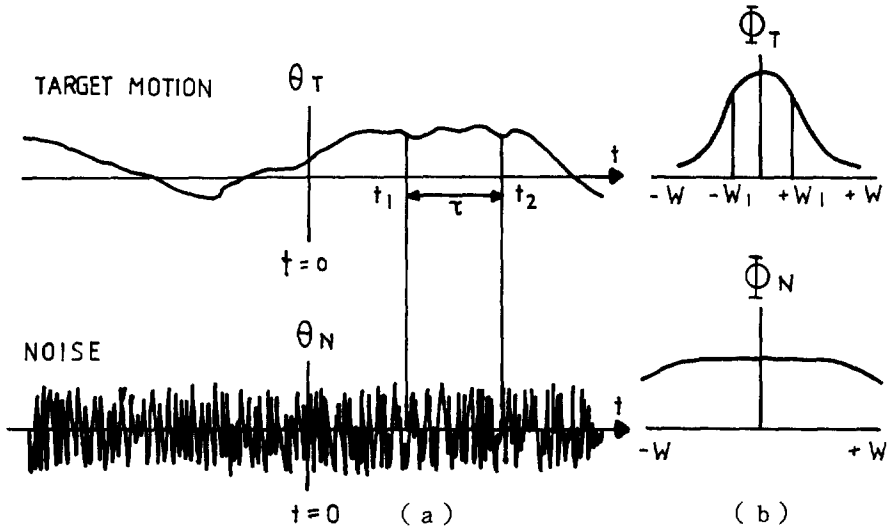


그림 2. 표적운동과 잡음 특성

변화하지 않으므로 Stationary이며 그림 2의 (a)에서 보여 주는 것과 같이 Power Spectrum을 고려하여 Wiener 필터를 설계하는 것이 필요하다. 회전 벡터의 수평투사에 기인한 정현파를 고려할때 양의 주파수는 반시계방향의 회전을 만들며, 음의 주파수는 시계방향의 회전을 나타낸다.

초기의 필터 개념에 있어서 Wiener는 θ_T 와 θ_N 의 Auto-correlation 함수를 이용했고, 만약 θ_N 가 표적운동에 의하여 발생한 잡음이라면 그 순간에 θ_T 와 θ_N 사이의 Cross-correlation 역시 고려하였다. θ_T 와 θ_N 사이에 correlation이 없다고 가정한다면 두 신호의 Power Spectrum을 사용한 Bode와 Shannon에 의한 Wiener 필터가 유도된다. 여기서 우리는 유도병기시스템에 관한 문제를 따지고 있으므로 필터의 요구되는 출력을 그림 3에서 보여주는 미사일의 각위치를 θ_M 이라고 생각한다. 시행 착오법과 표적운동의 잡음 Power Spectrum Φ_T 와 Φ_N 의 정보를 이용할 수 있다고 가정하게 되면 필터에 대한 입력은 $\theta_T + \theta_N$ 이다. 구하고자 하는 필터 F는 입력 $\theta_T + \theta_N$ 에 대한 θ_M 에 관계된 페루우프 시스템을 발견하는 것인데 이때 성능지표는 다음 식으로 주어진다.

$$\int_0^T (\theta_M - \theta_T)^2 dt \quad (3-1)$$

여기서 T는 비행시간이다.

그림 3은 미사일의 비행시간동안 최소제곱오차로서 표적행로에 관하여 미사일이 추적하도록 해주는 시스템이다. Power Spectrum Φ_T 와 Φ_N 의 측각

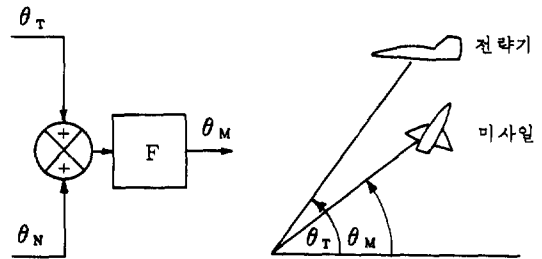


그림 3. 필터 F

적인 조사로부터 저역통과 필터를 설계하는 것이 당연하다고 느껴진다. 다른 대역폭을 가진 여러가지 저역통과 필터들을 시도하는 대신에 우리의 목적은 성능지표를 최소로 하는 것과 근대적 접근법에서 필수적인 수학의 개념에서 유도된 최적필터의 설계에 있다.

1800년대에 Gauss는 랜덤변수들을 다루기 위하여 데이터프로세싱 방법으로 Deterministic Least-square 방법을 고안하여 궤도 측정문제에 응용하였고, 그후 Fisher는 연속시스템을 주파수영역에서고려하고 설계절차가 통계적 Stationary 프로세스에 한정되었으며 주어진 최적상태는 단지 정상상태인 영역내에서만 추정되었다. 그후 Kolmogorov가 Discrete한 문제를 다루었으나 이 추정(Estimation) 기법은 nonstationary와 Multiport 시스템들을 취급할 때는 그 계산이 아주 어렵고 복잡하다.

3.2 근대제어 이론

앞절에서 언급한 것과 같이 제어시스템 설계에 대한 근대 접근법의 필수적인 사항은 성능지표의 최소

화에 집중되어 있다. 그러나 비록 Wiener 필터의 목적이 성능지표를 최소로 해주는 것이나 과거 20년 동안 발달되었던 근대 기법들도 아직 진실한 표본을 구하지 못하고 있다. 주파수영역에서 해석하고 있는 고전적 제어법에 비교하여 근대 제어이론의 대표적인 특징은 시간영역내에서 신호들의 표현과 조작을 취급하는데 있다. 각 주파수성분에 의한 신호를 기술해준 고전적 이론은 중첩의 원리를 단순히 응용하기 위하여 선형성과 시불변이라는 큰 제한을 주어야 한다. 시간 영역에서 시스템을 기술하는 미분방정식을 상태방정식으로 치환함으로써 위의 제한을 무시하도록 해준다. 사실 1950년 중반기에 이용할 수 없었던 컴퓨터는 미분방정식의 해를 수치적으로 쉽게 얻도록 해 주었다. 초대형 컴퓨터의 개발로 근세에 제어이론은 눈부신 성장을 하였음을 부인할 수가 없다. 근대 제어이론에서 다른 중요한 개념은 역시 시스템 상태에 관한 아이디어이다. 그림 4와 같은 포인트 질량 미사일과 같은 간단한 시스템을 생각해 보자.

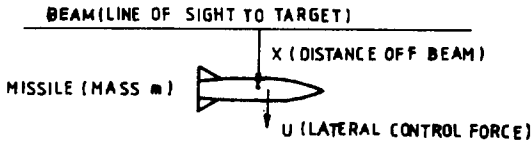


그림 4. 간단한 미사일 시스템

제어측력 u , 미사일 질량 m 을 가진 그림 4의 간단한 미사일 시스템은 다음과 같은 미분방정식으로 기술할 수 있다.

$$u = m\ddot{x} \quad (3-2)$$

만약 모든 순간 순간에 위치 x 와 속도 \dot{x} 를 알고 있다면 2차시스템은 완전하게 결정할 수가 있다. 변수 x 와 \dot{x} 는 시스템 상태변수이다.

일반적으로 n 차 선형시스템은 다음의 벡터행렬식으로 나타낼 수가 있다.

$$\dot{\underline{x}}(t) = A(t) \underline{x}(t) + B(t) \underline{u}(t) \quad (3-3)$$

여기서 A 와 B 는 시간에 따라 변화하는 요소이고 \underline{u} 는 다중입력, \underline{x} 의 n 개의 성분은 시스템의 출력으로 간주할 수 있을 것이다. 이식은 또한 고전적 제어와 근대적제어 이론사이의 필연적 차이를 보여주고 있다. 고전적 이론은 단지 단일 입력력인 경우로 한정된 반면, 상태공간 개념에 따라 보다 자연스럽게 다변수 입출력으로 시스템을 해석할 수 있는 기법이 근대 제어이론이라 할 수가 있다.

우리의 궁극적 목적은 Wiener 필터 기법에서도 말했던 것과 같이 근대 제어이론을 사용하여 다음의 성

능지표를 최소로 해주는 것이다.

$$\int_0^T \{ (\theta_M - \theta_T)^2 + \lambda \dot{\theta}_M^2 \} dt \quad (3-4)$$

여기서 θ_T 는 잡음 θ_N 가 섞인 측정값으로 랜덤함수이고, λ 는 Weighting 요소이다. 그러나 θ_T 에 잡음이 포함되어 있지 않다면 쉽게 최적제어를 구할 수가 있다. 상태변수 다음 값은 랜덤함수에 종속되고 있으므로 쉽게 정의 될 수 없으며 성능지표를 최소화하는 문제는 최적 추계학적 제어시스템 (Optimal Stochastic Control System)의 설계 문제까지 비약되어야 함을 알 수 있다.

4 추계학적 제어시스템

1960년대 Kalman 필터 기법은 미국의 우주계획에 때 맞추어 적절한 시기에 발표되었고 컴퓨터의 발달과 더불어 근대 다중센서 시스템에서 데이터 처리를 위한 유용한 수단으로 이용되어지고 있다.

4.1 Wiener 프로세스와 추계학적 미분방정식

시스템의 동특성을 기술하는데 있어 일반적으로 다음의 식으로 나타내어 진다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \quad (4-1)$$

여기서 $x(t)$ 는 시간 t 에서 시스템의 상태변수이고, $u(t)$ 는 어떤 제한하에서 입력을 나타내고 있다. 그러나 많은 시스템들은 랜덤인 완전히 알 수 없는 외란에 종속되고 있으므로 이 경우 추계학적 모델은 어떤 추계학적 프로세스 x_i 에 따라 전개되는 시스템의 상태로 나타내는 것이 가장 적합하다. 이와 같이 추계학적 프로세스는 외란의 영향을 의미하는 $g(t, x_i)$ v_i 항을 포함하는 식으로 표현한 시스템에 대한 해를 가지고 시스템을 해석하는 것이 보다 자연스러운 접근법일 것이다.

$$\frac{dx_i}{dt} = f(t, x_i, u_i) + g(t, x_i) v_i \quad (4-2)$$

여기서 v_i 는 수학적으로는 정의되지만 실제 프로세스에서는 존재하지 않는 백색잡음 (White Noise)이다. v_i 는 통계학적 성질들이 잘 알려져 있는 물리적 법칙으로 이해되어 질 수 있다.

자연적인 확산에 있어서 점분자 (Point Particle)의 랜덤운동은 종종 Brownian 운동 혹은 Wiener 프로세스라 부른다. 백색잡음의 외란에 의해 구동된 Brownian 특성을 고려한 간단한 물리계의 모델에 있어서 (4-2)식의 공식적인 해 (Formal Solution)는

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_s, u_s) ds + \int_0^t g(s, x_s) v_s ds, \quad (4-3)$$

$$x(0) = x_0$$

이때 Brownian 운동 w_t 는 $v_s = \frac{dw_s}{ds}$ 되도록 하는 다음의 식을 만족한다.

$$w_t = \int_0^t v_s ds \quad (4-4)$$

그러나 v_t 는 어느 곳에서도 미분이 불가능하므로 w_s 는 함수가 아니다. 따라서 (4-3) 식은 정의되지 않는다. 공학적인 관점에서 Brownian 운동 w_t 의 공식적인 유도도 다음과 같은 근사적인 표현을 사용하기로 한다.

$$v_t \approx \frac{dw_t}{dt} \quad (4-5)$$

여기서 방정식 (4-2) 는 단지 공식적으로 다음의 미분형과 등가라고 생각한다.

$$dx_t = f(t, x_t, u_t) dt + g(t, x_t) dw_t \quad (4-6)$$

또 방정식 (4-6) 은 다음의 적분식으로 나타낼 수 있을 경우에만 그 의미를 가진다. 즉,

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_s, u_s) ds + \int_0^t g(s, x_s) dw_s \quad (4-7)$$

방정식 (4-7) 은 마지막 항의 적분이 보통 Lebesgue - Stieljes 의미로서 정의할 수 없기 때문에 어떤 의미를 나타내지 않는다. 그러므로 먼저 추계학적 미분방정식의 이론을 소개하기에 앞서 추계학적 적분정의를 하여야만 한다. 여기서 우리는 추계학적 적분을 Ito [14] 혹은 Stratonovich [15] 의 Mean Square Sense 로써 정의할 수 있을 것이다. Ito 적분은 Brownian 운동에 대해 단순히 함수적으로 정의되며 Stratonovich 적분은 Brownian 운동의 명백한 함수로만 표현된다. 따라서 Stratonovich 적분은 Ito 적분에 비교하여 보다 엄격히 제한된 함수로서 정의되어진다. 여기서 우리는 Ito 적분이 Stratonovich 적분보다 사용하기 편리한 성질때문에 방

정식 (4-7) 의 마지막 항을 추계학적 적분 혹은 Ito 적분이라 부르고자 한다. Stratonovich 적분은 그 수학적 제한때문에 비선형 필터링에 응용할 수 없으므로 앞으로 추계학적 적분을 Ito 적분이라고 생각하기로 한다.

추계학적 제어와 필터링이론에서 대부분의 결과들은 주어진 프로세스가 선형 추계학적 미분방정식을 만족한다는 가정하에서 구하여 졌다. 선형 추계학적 방정식의 초기치와 그 구조에 대하여 적당한 가정을 부여하게 되면 그 프로세스는 Gaussian 으로 만들 수 있고 이것은 필터방정식이 유한한 차원을 갖도록 하는 중요한 성질이라고 사료된다.

4.2 Kalman 필터

앞에서 보였던 간단한 미사일의 시스템에서 표적의 각위치 θ_T 는 잡음 θ_N 과 혼합되어 있으므로 미사일 위치 θ_M 에 의한 측정치 $\theta_T + \theta_N$ 을 가지고 실제의 필터를 설계해야만 한다.

그림 5는 3.2 절에서 설명했던 실제 미사일 시스템의 수학적 모델을 나타내고 있다. 만약 등가인 물리적 모델을 시뮬레이터 (Simulator) 의 어떤 형태로 구성할 수 있다면 원래 시스템에 대한 참고가 없이도 시뮬레이터 모델에 의하여 주어지는 θ_T 와 θ_M 의 값을 이용하는 것이 가능해진다.

b) 제어하기 위한 미사일부분

시뮬레이터 모델이 바른 초기상태에서 출발되었다면 실제 시스템 거동에 잘 추종해 나갈 것이다. 이와 같은 경우 일 뿐으로 실제 시스템 모델구조, 매개변수, 초기조건들을 알고 있다 하더라도 랜덤함수인 입력 w 는 시뮬레이터 모델내에서 다시 산출해 낼 수가 없다. 입력 w 는 실제 시스템에 대한 우리의 지식으로서는 불확실하게 나타나진다. 물론 시스템들에 대한 측정치는 측정프로세스가 항상 오차를 수반하고 있기 때문에 정확하다고 할 수 없으므로 여기서

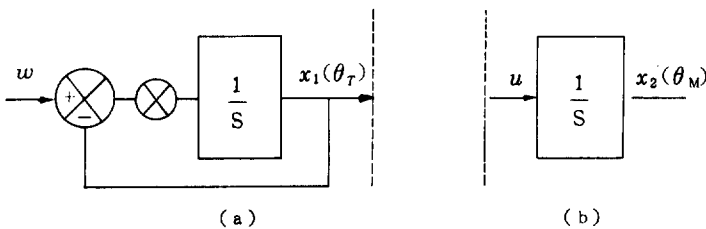


그림 5. a) 표적운동을 나타낸 부분
b) 제어하기 위한 미사일부분.

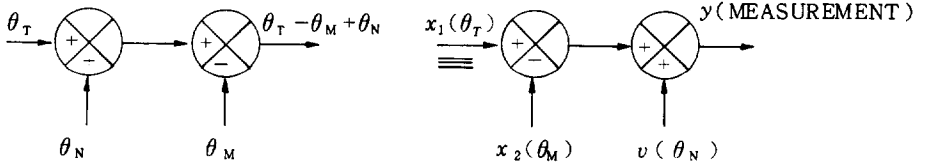


그림 6. 잡음 v 에 따른 측정치 y

우리는 θ_T 에 대한 잡음 θ_N 을 백색잡음이라고 가정하고 Kalman필터를 구하여 보기로 한다. 부피이드 백 시스템으로써 수행될 필터 F_p 에 요구되는 θ_M 의 측정치가 완전하다고 가정하면 페루우프 추적 시스템은 θ_T 와 θ_M 을 분리하여 측정하는 것이 아니고 $\theta_T - \theta_M$ 의 값으로 구현 가능하다. 그림 6에서는 이 경우를 보여주고 있는데 y 는 측정값을 나타내고 v 는 측정시의 잡음이다. 우리의 주된 목적은 시스템 구조와 매개변수들에 대한 정보, 잡음원 w 와 v 의 통계학적 성질을 가지고 주어진 측정치 y 로서 상태변수 x_1 과 x_2 에 최적인 추정자(Estimator)를 구하고자 하는 것이다. 앞에서 제안한 시뮬레이터 모델과 등가인 가상적인 시스템 모델은 백색잡음원 w 을 제외하고는 실제 시스템 모델과 동일하다. Kalman 필터는 실제 시스템의 상태를 서로 독립적으로 추정하므로써 측정 프로세스와 시스템모델 출력을 취급함에 따라 구하여진다.

필터링문제가 포함하고 있는 물리적 현상등을 고려하여 잠수함, 어뢰, 미사일, 전폭기와 같은 다이내믹 시스템은 6 자유도 운동방정식으로 기술할 수 있으며 적 목표물의 위치와 속도등은 잡음과 혼합된 정보데이터로 임의의 시간마다 레이다나 센서에 수신되고 상태추정의 최적적인 방법을 이용하여 해석할 수가 있다. 항해하고 있는 표적물의 추적성능평가(Tracking Performance Evaluation)를 하기에 앞서 잡음을 가진 운동물체에 대한 다음의 다이내믹 방정식을 생각해 보자.

$$dx_t = A(t)x_t dt + B(t)u_t dt + G(t)dw_t \quad (4-8)$$

여기서 상태벡터 x_t 는 직접 관측할 수 없으며, 다음의 y_t 벡터에 의하여서만 x_t 가 관측된다.

$$dy_t = C(t)x_t dt + H(t)dv_t \quad (4-9)$$

또 w_t 와 v_t 는 상호 독립적인 Wiener 프로세스라 정의한다. (4-9) 식으로 부터 주어지는 Innovation 프로세스는

$$dv_t = dy_t - C(t)\hat{x}_t dt \quad (4-10)$$

이때 추정자 $\hat{x}_t = E\{x_t | y_t\}$ 는 다음의 Kalman 필터 방정식을 만족시켜 주고 기호 E 는 수학적 기대값을

나타낸다.

$$d\hat{x}_t = A(t)\hat{x}_t dt + B(t)u_t dt + P(t)C^*(t)[H(t)H^*(t)]^{-1}dv_t, \quad \hat{x} = E(x) = m_0 \quad (4-11)$$

여기서 $P(t)$ 는 $E\{(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^*\}$ 는 오차 Covariance로 다음의 Riccati 방정식의 해이다.

$$\dot{P} = GP^* - PC^*[HH^*]^{-1}CP + AP + PA^*, \quad P(0) = Cov(x) = P_0 \quad (4-12)$$

그림 7에서 위의 Kalman 필터에 관한 것을 보여주고 있다.

이동표적의 운동학적 특성이 (4-8)식으로 주어지는 최적필터 즉 Kalman 필터는 앞에서 보는 바와 같이 쉽게 구하여진다. 불행히도 실제 이동 표적물은 비선형 미분방정식으로 기술되어지기 때문에 확장된 Kalman 필터의 응용이 시도되고 있으나 비선형 특성때문에 필터가 안전성을 잃는 경우가 많다(9, 13, 16). 즉 필터를 오퍼레이션하면 오차 평방편차가 어떤 한정된 값에 수렴하지 않고 발산하기 때문이다. 따라서 최근 이동표적의 추적을 위한 비선형 필터의 개발이 요구되고 있는 실정이다. 특히 비선형 다이내믹 시스템을 해석하는데 있어 이동 표적물에 대한 필터링문제는 확장된 Kalman 필터보다는 조건부 Gaussian 필터가 보다 적합함이 증명되어졌다(17, 18, 19, 20, 21, 22). 그러나 적 표적물의 위치, 방향등에 대하여 의외로 전략적 책략(Maneuvering)을 수반하고 있을 때는 확장 Kalman 필터와 조건부 Gaussian 필터등은 최적인 결과를 유도하지 못하고 결국 추적에 실패하고 만다. 따라서 전략적 책략 표적(Maneuvering Target)에 대한 연구가 계속되고 있다. 적 표적물을 운전하고 있는 자가 위치, 속도, 이동방향등이 탐지되고 있다는 것을 감지하게 되면 전략적 책략을 갖게 되므로 추정의 관점에서 불때는 이에 대한 적응방법을 고려한 최선의 필터를 설계하여야 한다.

전략적 책략을 하고 있는 물체에 대한 추적이나 탐색법으로는 Jazwinski의 제한된 기억필터링(8), 두개의 Kalman 필터로 접근한 Thorp(23), Moose의 N개의 책략적 입력신호법(24), 매개변수들의 빠

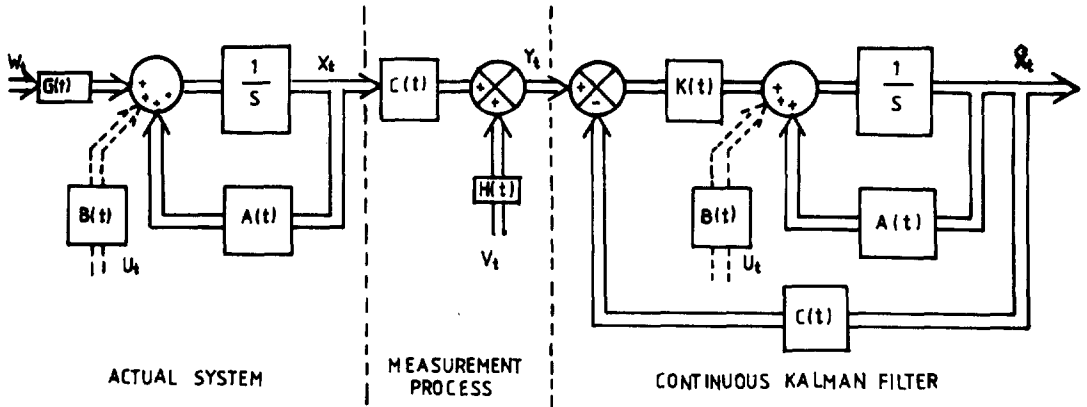


그림 7. Kalman 필터

른 점프(Jump)에 의한 적응제어를 고려한 Swor-der [25], Friedland의 분리평가기법[26], Mehra [27], Wilsky [28], Chou[29]들에 의하여 개발된 잔류시퀀스법(Innovation 프로세스에 대하여), 여러 군집단의 Kalman 필터 뱅크를 이용하여 적응형 필터를 연구한 Magill [29], Athans [30], Bar-Shalom [31]들의 방법들이 소개되어 있다.

4.3 필터와 최적제어

4.1 절에서 언급하였던 예와 같은 경우에 표적과 미사일 위치를 각각 x_1 과 x_2 의 상태에 있다고 가정하고 추계학적 제어문제를 고려하여 보자. 모든 상태 변수들은 직접 이용할 수 없으며 관측치들은 잡음에 의하여 혼신되어 있다. 이 경우에 측정된 데이터를 분석하고 미사일이 표적을 추적하여 파괴하기 위해서는 최적제어이론을 도입하여야만 한다. 일반적으로 추계학적 다이내믹 시스템의 최적이론은 Fleming [32, 33, 34], Kushner [35], Wonham[36], Balakrishnan [37], Elliott [38], Benes [39], Rishel [40], Bismut [41], Kolodziej [20], Mohler [19], Lee [42, 43], Bensoussan [44], Davis [45]들에 의하여 연구되었다.

Fleming 은 1969년도 이 분야에 관한 조사논문뿐만 아니라[33], 그의 책에서도 완전히 관측가능한 확산프로세스의 제어문제를 잘 취급해 주고 있다[34]. 부분적으로 관측된 데이터를 가진 경우 가장 우수한 연구결과는 Wonham의 "Separation 원리"이다 [36]. 그는 관측할 수 없는 상태변수들을 Kalman 필터를 이용하여 최적추정 (Optimal Estimation) 하고, Bellman의 Dynamic Programming 기법을 추계학적으로 치환하여 최적제어를 구하였다. Dynamic Programming 기법은 추계학적제어에 있어

서 아주 유용한 접근법이다.

앞의 예에서 Kalman 필터를 이용하여 \hat{x}_1 과 \hat{x}_2 구하며, 이경우에 최적제어를 수행하는데 있어 실제 상태 x_1 과 x_2 대신에 \hat{x}_1 과 \hat{x}_2 을 사용하여 최적 Controller 를 설계하는 것이 Separation 원리이다. 그림 8은 이 Separation 원리를 보여 주는 것이다.

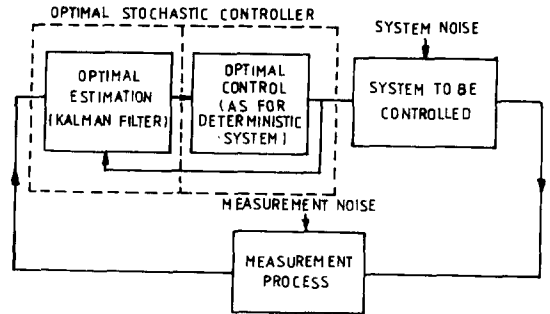


그림. 8 Separation 정리

5 결론

C³I의 여러 분야에 응용되고 있는 최근의 제어이론을 소개하기 위하여 먼저 C³I에 대하여 간략히 검토하여 보았다. 초대형의 컴퓨터의 등장에 따라 시뮬레이션이란 기법을 통하여 모의전쟁의 연습이 가능하여졌고 이를 바탕으로 C³I의 각 구성요소들에 대해 최적인 상태로 그 관리와 유지가 가능하여졌다. 소프트웨어의 개발이 C³I의 효율적 운용을 위하여 필수적으로 많은 연구가 병행되어야 하고, 인간과 기계사이의 interface 역시 중요한 문제로 대두되고 있음을 알 수 있다.

국부적인 측면에서 C³I 들의 각 구성요소들은 고

도로 개발된 병기들로 이루어져 있는데 이들 모두는 최신의 제어이론을 수용하여 설계 제작되어 실전에 운용되고 있다. 일반적으로 표적의 동특성은 비선형 다이나믹 방정식으로 기술되며, 주위의 환경에 따라 여러가지 잡음에 의하여 영향을 받고 있는데, 고전적인 제어이론에서는 이 잡음영향에 대한 해석의 어려움이 있었으나 확장된 Kalman 필터, 조건부 Gaussian 필터, 추계학적 이론등으로 실제 시스템의 특성에 아주 가깝게 최적인 추정을 행할 수 있음을 알 수 있게 됐다.

C³I와 추계학적 제어이론의 연구에 따라 부수적으로 얻을 수 있는 것은 컴퓨터의 통신망 설계, 소프트웨어 개발, 기업체의 업무 및 제조관리, 경제 사회문제의 해석, 수요공급의 예측, 기상예측, 어군탐색, 해저석유탐사, 로봇트등 다양한 분야에 까지 응용될 수 있을 것이다. 우리나라에서도 이와 같은 연구를 함으로서 지역적 특성에 적합한 C³I를 개발하여 북극의 도발과 음모에 대처해 나갈 수 있어야 하리라 사료된다.

참 고 문 헌

- 1) M. Athans, W. B. Davenport, Jr., E. R. Ducot, and R. R. Tenney; Surveillance and Target Tracking, Proceeding of the 4th MIT/ONR Workshop on Command Control-Communication (C³) Problems, October 1981.
- 2) H. Titus; Advances in Passive Target Tracking, the Conference on Advances in Passive Target Tracking, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, June 1977.
- 3) "United States Air Force Computer, Technology Forecast and Weapon Systems Impact Study", (COM - TEC 2000), HQ AFSC • TR 78-03 (3 Volumes), December 1978.
- 4) S. J. Andriole, and G. W. Hopple; "They're Only Human: Decision-Makers in Command and Control", Signal, March 1982, pp. 45-59.
- 5) J. J. Marciniak, "Technology Needed for C³I Evolution", Astronautics & Aeronautics, Vol. 20, July 1982, pp. 57-59.
- 6) "Special Issue on Application of Kalman Filtering", IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-28, No. 3, March 1983.
- 7) R. E. Kalman; "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", ASME Trans., Part D (J. of Basic Engr.), 1960 pp. 35-45.
- 8) A. H. Jazwinski; Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, New York 1970.
- 9) S. I. Chou; "Projected Surface Ship Anti-Submarine Warfare Target Analysis", NUC TN-1717, Undersea Dept., July 1976.
- 10) R. R. Mohler; "Nonlinear Filtering and Tracking", Oregon State University, Corvallis, OR, Annual Report of Office of Naval Research (ONR), Contract No. N00014-81-K-0814., January 1983.
- 11) L. Schwartz, and E. B. Stear; "A Computational Comparison of Several contr. Nonlinear Filters", IEEE Trans. Auto, February 1968, pp. 83-86.
- 12) T. U. Halawani; "An Optimal Approximation for a Certain Class of Nonlinear Filtering Problems", Ph. D. Dissertation, Oregon State University, Corvallis, OR March 1983.
- 13) A. O. Cohen, and G. W. Johnson; "A New Approach to Bearing Only Ranging", IR&D Report, 76-0205-M19, IBM Federal System Division, Manassas, VA, December 1976.
- 14) K. Ito, and H. McKean; Diffusion Processes and Their Sample Path, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- 15) R. L. Stratonovich, Condition Markov Processes and Their Application to the Theory of Optimal Control, Elsevier. New York, 1965.
- 16) V. J. Aidala, and S. E. Hammel; "Utilization of Modified for Polar Coordinates for Bearing Only Tracking", IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-28, No. 3, March 1983, pp. 283-294.
- 17) R. S. Liptser, and A. N. Shirayev; Statis-

- tics of Random Processes I: General Theory, Springer-Verlag, New York, 1977
- 18) R.S. Liptser, and A.N. Shiriyayev; Statistics of Random Processes II: Application, Springer-Verlag, New York, 1978
 - 19) R. R. Mohler, and W. J. Kolodziej; "Optimal Control of a Class of Nonlinear Stochastic Systems", IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-26, No. 5 1981, pp. 1048 - 1054.
 - 20) W. J. Kolodziej, "Conditional Gaussian Process in Stochastic Control Theory", Ph. D. Dissertation, Oregon State University OR, June 1980.
 - 21) M.H. Lee, W. J. Kolodziej, and R. R. Mohler, "On Nonlinear Filtering Tracking", Oregon State University, Corvallis, OR Report of ONR Contract No. NOOO14-81-K-0814, December 1982.
 - 22) M.H. Lee, W. J. Kolodziej, and R.R. Mohler "On Optimal Nonlinear Filtering and Control with Longitudinal Aircraft Application", Oregon State University, Corvallis, OR, Report of ONR, Contract No. NOOO14-81-K-0814, to appear ASME J. Dynamic Syst., Meas., and Contr.
 - 23) J.S. Thorp, "Optimal Tracking of Maneuvering Targets", IEEE Trans. Aerosp. Electron Syst., 1979, pp. 512 - 519.
 - 24) R.L. Moose, H.F. Vanlandingham, and D.H. McCabe, "Modeling and Estimation for Tracking Maneuvering Targets", IEEE Trans. Aerosp. Electron Syst., 1979, pp. 448 - 456.
 - 25) D. D. Sworder, "Bayes Controller with Memory for a Linear System with Jump Parameters". IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-18, 1973, pp. 355 - 360.
 - 26) B. Friedland, "Notes on Separate - Bias Estimation", IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-23, 1978, pp. 735 - 738.
 - 27) R. K. Mehara, and J. Peschon, "An Innovations Approach to Fault Detection and Diagnosis in Dynamic Systems", Automatica, Vol. 7, 1971, pp. 637 - 640.
 - 28) A. S. Wilkty, "A Survey of Design Methods for Failure Detection in Dynamic Systems", Automatica, Vol. 12, 1976 pp. 601 - 611.
 - 29) Y. T. Chan, J. B. Plant, and J. R. T. Boddington, "A Kalman Tracker with Simple Input Estimator", IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., Vol. AES - 18, 1980, pp. 235 - 240.
 - 30) D. T. Magill, "Optimal Adaptive Estimation of Sampled Stochastic Processes", IEEE Trans. Auto. Contr. Vol. AC-10, 1965, pp. 434 - 439.
 - 31) M. Athans, R. Ku, and S. B. Gershwin, "The Uncertainty Threshold Principle: Some Fundamental Limitations of Optimal Decision Making under Dynamic Uncertainty", IEEE Trans. Auto. Contr. Vol. AC -22, 1977, pp. 491 - 495.
 - 32) W. H. Fleming. "Optimal Control of Partially Observable Diffusions", SIAM J. Control. 6, 1968, pp. 194 - 213
 - 33) W. H. Fleming, "Optimal Continuous-Parameter Stochastic Control", SIAM Review 11, 1969, pp. 470 - 509
 - 34) W.H. Fleming, and R. W. Rishel, Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag, New York, 1975
 - 35) H. J. Kushner, Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations, Academic Press, New York, 1977.
 - 36) W. M. Wonham, "On the Separation of Stochastic Control", SIAM. J. Control 6, 1968, pp. 312 - 326.
 - 37) A. V. Balakrishnan, Stochastic Differential System I Springer-Verlag, Berlin, 1973.
 - 38) R.J. Elliott, "The Optimal Control of Stochastic Control Systems", SIAM J. Control and Optimization 15, 1977, pp. 756 - 778.
 - 39) V. E. Benes, "Existence of Optimal Stochastic Control Laws", SIAM J. Control 9, 1972, pp. 446 - 472.
 - 40) R. W. Rishel, "Optimality of Controls for System with Jump Markov Disturbances", SIAM J. Control 13, 1975, pp. 338 - 371.
 - 41) J.M. Bismut, "Linear Quadratic Optimal

- Stochastic Equations with Random Coefficients", SIAM J. Control and Optimization 14, 1976, pp. 419-444.
- 42) M. H. Lee, "Optimization of Stochastic Dynamic System with Random Coefficients", Ph. D. Dissertation, Oregon State University, Corvallis, OR, February 1983, Report of ONR, Contract No. N00014-81-K-0814.
- 43) M.H. Lee, W. J. Kolodziej, and R.R. Mohler, "Suboptimal Control of a Stochastic System with Random Partially Observable Parameters", Proceeding of 1983 American Control Conf., San Francisco, CA, June 1983, pp. 1200-1204
- 44) A. Bensoussan, Stochastic Control by Functional Analysis Methods, North-Holland Publishing Co., 1982
- 45) M. H. A. Davis, Linear Estimation and Stochastic Control, Chapman and Hall, London, 1977.