

# 목적함수를 사용한 적응제어의 확장

論 文
33~2~2

## Extention of Model Reference Adaptive Control With Objective Function

崔 宗 鎬\*  
(Chong-Ho Choi)

### Abstract

The problem of model reference adaptive control for the discrete time system is considered and the global stability of the overall system is shown. It extends the results of Choi's<sup>6)</sup> to the plants and models whose transfer functions have arbitrary gains and the method presented here makes the output error and the controller parameter error converge to zero. The scheme presented in this paper is simulated and gives good results.

### 1. 서 론

미지의 선형 플랜트를 주어진 기준모델을 따라가도록 하는 적응제어 방법을 Model Reference Adaptive Control (MRAC) 이라고 한다. 적응제어시스템의 구조면에서 보면 상태변수 필터를 사용하여 이로부터 보조신호를 만들어 적응제어를 하는 형태가 Monopoly 및 Narendra<sup>1)~6)</sup> 등에 의하여 사용되었다. 또한 보조신호를 만들지 않고서도 적응제어를 하는 구조등에는 Landau<sup>7),8)</sup> 등이 사용하는 방법이 대표적이다. 적응제어 algorithm 및 안정도 증명에는 여러가지 방법이 있다. 최<sup>6)</sup>는 전자와 같은 적응제어 구조를 가지며 적절한 목적함수를 잡아 여기에 가중최소자승법을 사용하여 미지의 플랜트의 출력이 기준모델의 출력을 따라가는 방법을 제시하였다. 최<sup>6)</sup>에서는 플랜트의 전달함수의 분모 다항식 및 분자 다항식이 각각 monic 다항식이라는 제약이 있었으며 monic 다항식이 아닌 경우에 대해서는 앞으로의 연구 과제로 남겨 놓았는데 본 논문에서는 분자 다항식이 monic 다항식이 아닌 일반적인 경우에 대하여 생각한다. 본 논문은 최<sup>6)</sup>가 사용한 방법을 따라 적절한 목적함수를 잡아 이를 기초로 하여 적응 algorithm 을 제시하고 전체 시스템의 안정도를 증명하며

나중에 시뮬레이션의 예를 보였다.

### 2. 문제의 제시

제어하려는 미지의 플랜트가 단일 입출력을 가진 시불변 선형 시스템으로, 그 상태방정식은 다음 다하자.

$$\begin{aligned} x_p(k+1) &= A_p x_p(k) + b_p u_p(k) \\ y_p(k) &= C_p^T x_p(k) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 플랜트의 상태변수  $x_p(k)$  와  $b_p$  및  $C_p$  는  $n \times 1$ ,  $A_p$  는  $n \times n$  이고  $u_p(k)$  와  $y_p(k)$  는 플랜트의 입출력으로 스칼라 (scalar) 이다. 플랜트의 전달함수는

$$C_p^T (zI - A_p)^{-1} b_p = K_p \frac{N_p(z)}{D_p(z)}, \quad K_p \neq 0 \quad (2)$$

이고,  $N_p(z)$  와  $D_p(z)$  는 차수가 각각  $l$  과  $n (> l)$  인 다항식으로서 서로 공통인수가 없고  $N_p(z)$  는 근이 모두 단위원안에 있는 Hurwitz 다항식이며  $N_p(z)$  와  $D_p(z)$  는 제일 높은 차수항의 계수가 1인 monic 다항식이다. 또한 기준이 되는 모델의 상태방정식은

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + b_m u_r(k) \\ y_m(k) &= C_m^T x_m(k) \end{aligned} \quad (3)$$

으로서 모델의 상태변수  $x_m(k)$ ,  $b_m$ ,  $C_m$ ,  $A_m$ , 모델의 입출력  $u_r(k)$  와  $y_m(k)$  는 각각 (1)에서 나온 기호와 대응되는 차원을 갖는다.

\*正 會 員 : 서울대 工大 制御計測工學科 助教授 · 工博  
接受日字 : 1983年 8月30日

모델의 전달함수는  

$$C_m^T (zI - A_m)^{-1} b_m = K_m \frac{N(z)}{M(z)}, K_m \neq 0 \quad (4)$$

로서  $N(z)$  와  $M(z)$  는 monic 다항식이고 차수는 각각  $l$  과  $n$  이라하며  $M(z)$  는 Hurwitz 다항식이다.

최<sup>6)</sup>가 다른 문제에서는  $K_p$  및  $K_m$  이 1인 경우만 취급하였는데  $K_p = K_m = 1$  이라는 조건은 적응제어로 취급할 수 있는 플랜트와 모델의 범위를 크게 제한한다. 본 논문에서는  $K_p$  와  $K_m$  이 0이 아닌 임의의 값을 갖는 경우를 취급하여 보다 일반적인 플랜트와 모델에 대해서도 적용할 수 있는 적응제어 방식에 대하여 생각하겠다. 모델의 입력  $u_r(k)$  는 모든  $k$  에 대하여 평등하게 유한 (uniformly bounded) 하다고 하자. 플랜트의 출력이 모델의 출력을 따라가도록 하기 위하여 Narendra 와 Valavani<sup>2)</sup>가 사용한 적응제어 시스템의 구조를 사용하면 전체적인 구조는 그림 1과 같으며 플랜트의 입력  $u_p(k)$  는 다음과 같은 보조신호  $v_1(k), v_2(k)$  를 이용하여 구한다.

$$v_1(k+1) = Fv_1(k) + gu_p(k) \quad (5)$$

$$v_2(k+1) = Fv_2(k) + gu_p(k) \quad (6)$$

$$u_p(k) = \theta_0(k)u_r(k) + [\theta_1^T(k) \ 2\theta_2^T(k)] \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} \\ = \theta_0(k)u_r(k) + \theta^T(k)v(k) \quad (7)$$

$$\theta(k) = \begin{bmatrix} \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \end{bmatrix}, v(k) = \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix}$$

여기서  $\theta_0(k)$  는 scalar,  $v_1(k), v_2(k), \theta_1(k), \theta_2(k)$  및  $g$  는  $n \times 1$  인 벡터이고  $F$  는  $n \times n$  인 안정한 행렬로서  $\det(zI - F)$  가  $N(z)$  를 인수로써 포함하도록 잡으며  $(F, g)$  는 controllable pair가 되도록 잡는다.

그림 1과 같은 적응제어 형태를 사용하여 Narendra 와 Valavani<sup>2)</sup>가 한 것과 같은 유사한 과정을 거쳐서 모델의 전달함수와 플랜트의 전달함수를 비교하면 적절한  $\theta^*$ 가 존재하여  $\theta(k) = \theta^*$  이면 입력  $u_r(k)$  에 대한 모델과 플랜트의 전달함수가 같아지는 것을 알 수 있다. 본 논문에서는 가중 최소자승법을 사용하여  $\theta(k)$  가  $\theta^*$  에 수렴하도록 하며 모델과 플랜트간의 출력의 차이가 없도록하고 수렴하는 과정에 있어서 플랜트의 상태변수나 입출력이 유한하도록 하게하는 방법에 대하여 살펴보겠다.

이상의 결과를 정리하여  $\xi^T(k) \triangleq [x_p^T(k), v^T(k)], \phi_0(k) \triangleq \theta_0(k) - \theta_0^{*T}$  와  $\phi^T(k) \triangleq [\phi_1^T(k), \phi_2^T(k)] \triangleq [\theta_1^T(k) - \theta_1^{*T}, \theta_2^T(k) - \theta_2^{*T}]$  로 정의하면  $\xi(k)$  의 상태방정식은 다음과 같이 된다.

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} x_p(k+1) \\ v_1(k+1) \\ v_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & b_p \theta_1^{*T} & b_p \theta_2^{*T} \\ g C_p^T & F & O \\ O & g \theta_1^{*T} & F + g \theta_2^{*T} \end{bmatrix} \xi(k)$$

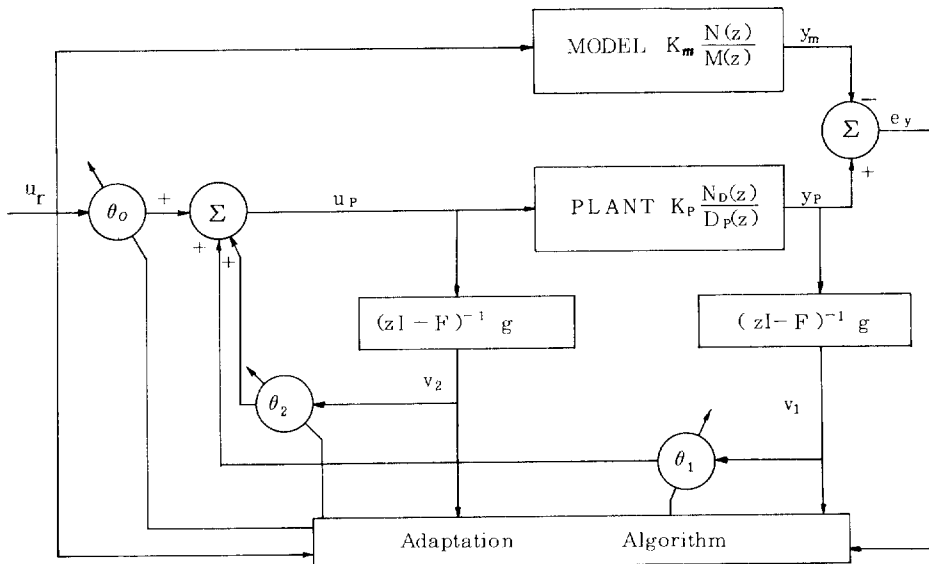


그림 1. 적응제어 시스템의 구조

Fig. 1. Structure of adaptive control system

$$\begin{bmatrix} x_p(k) \\ v_1(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_p \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \theta_0^* u_r(k) + \begin{bmatrix} b_p \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \theta_0(k) u_r(k) + \begin{bmatrix} b_p \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \theta^T(k) v(k) \quad (8)$$

위의 식으로부터  $\bar{A}$ 와  $\bar{b}$ 를 적절히 정의하면

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \bar{A} \xi(k) + \bar{b} \theta_0^* u_r(k) + \bar{b} \phi_0^T(k) v(k) \\ &= \bar{A} \xi(k) + \bar{b} \phi^T(k) v(k) + \bar{b} \theta_0^* u_r(k) \\ y_p(k) &= \bar{C}^T \xi(k) \end{aligned} \quad (9)$$

이 되며 여기서  $\phi^T(k) \triangleq [\theta_0(k), \phi^T(k)]$ ,  $v^T(k) \triangleq [u_r(k), v^T(k)]$ ,  $c^T \triangleq [c_p^T, 0_{1 \times n}, 0_{1 \times n}]$ 이다.

적응제어의 구조로부터  $\bar{A}$ 는 안정한 행렬이고  $C^T(zI - \bar{A})^{-1} \bar{b} \theta_0^* = K_m N(z)/M(z)$ 임을 알 수 있으며  $\phi_0(k) u_r(k) \rightarrow 0$ 이고  $\hat{\phi}^T(k) \hat{v}(k) \rightarrow 0$ 이면 이것은 바로 플랜트의 출력이 기준 모델의 출력을 따라가는 경우가 되겠다. 따라서  $k$ 가 커짐에 따라  $\phi^T(k) v(k) \rightarrow 0$ 이 되며 여기서  $\xi(k)$ 가 평등하게 유한하도록 하는 방법에 대하여 생각하자.

### 3. 적응방법

앞에서 언급한 바와 같이 만약  $\phi(\xi) = 0$ 이면 상태방정식 (9)는 모델의 상태방정식의 nonminimal representation이다. 이 경우 상태벡터를  $\xi^*(k)$ 로 표시하면 (9)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi^*(k+1) &= A \xi^*(k) + b \theta_0^* u_r(k) \\ y_p^*(k) &= C^T \xi^*(k) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $\xi^*(k)$ 의 초기조건은  $\xi(k)$ 의 초기조건과 같다고 하면  $e(k) \triangleq \xi(k) - \xi^*(k)$ 는 적응제어를 하는데 있어서 제어기의 매개변수, 즉  $\theta_0(k)$ 와  $\theta(k)$ 의 오차때문에 나타나는 상태오차이며 이에 따른 출력오차를  $e_1(k)$ 라 하면

$$\begin{aligned} e(k+1) &= \bar{A} e(k) + \bar{b} \phi^T(k) v(k) \\ e_1(k) &= y_p(k) - y_p^*(k) = \bar{C}^T e(k) \end{aligned} \quad (11)$$

이 된다.  $e_1(k)$ 를 전달함수를 사용하여 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} e_1(k) &= (\varepsilon_0(k) + \varepsilon(k)) / \theta_0^* \\ \varepsilon_0(k) &= K_m \frac{N(z)}{M(z)} \phi_0(k) u_r(k) \\ \varepsilon(k) &= K_m \frac{N(z)}{M(z)} \phi^T(k) v(k) \end{aligned} \quad (12)$$

만약 모델과 플랜트의 초기 상태가 같다면 모델의 상태벡터  $\xi_m(k)$ 는  $\xi^*(k)$ 와 같으나 초기 상태가  $\Delta \xi(0)$ 만큼 다를때  $\bar{A}$ 가 안정한 행렬이므로  $\xi^*(k) - \xi_m(k)$ 는 기하급수적으로 감소하며

$$\begin{aligned} e_y(k) &\triangleq y_p(k) - y_m(k) \\ &= \bar{C}^T e(k) + \bar{C}^T A^* \Delta \xi(0) \\ &= e_1(k) + \delta_1(k) \end{aligned} \quad (13)$$

가 된다. 여기서  $\delta_1(k)$ 는 기하급수적으로 감소한다. (앞으로  $\delta_i(k)$ ,  $i=1, 2, \dots$ 는 모두 기하급수적으로 감소하는 급수를 나타낸다)

다음과 같은 보조신호  $\psi_0(k)$ 와  $\psi(k)$ 를 만들자.

$$\begin{aligned} \psi_0(k) &= K_m \frac{N(z)}{M(z)} \theta_0(k) u_r(k) \\ \psi(k) &= K_m \frac{N(z)}{M(z)} \theta^T(k) v(k) \end{aligned} \quad (14)$$

그러면 (12)와 (14)로부터

$$\psi_0(k) - \varepsilon_0(k) = K_m \frac{N(z)}{M(z)} \theta_0^* u_r(k) = K_m \frac{N(z)}{M(z)} u_r(k) \theta_0^*$$

$$\begin{aligned} \psi(k) - \varepsilon(k) &= K_m \frac{N(z)}{M(z)} \theta^{*T} v(k) \\ &= K_m \frac{N(z)}{M(z)} v^T(k) \theta^* \end{aligned} \quad (15)$$

가 된다. 또한

$$\omega_0(k) \triangleq K_m \frac{N(z)}{M(z)} u_r(k) \text{ 와 } \omega(k) = K_m \frac{N(z)}{M(z)} v(k)$$

로 하면 (15)에서

$$\omega_0(k) \theta_0^* + \omega^T(k) \theta^* = \psi_0(k) + \psi(k) - \theta_0^* e_1(k) \quad (16)$$

가 된다. 이러한 관계식이 그림 2에 나타나 있다.

(16)을 이용하여  $\omega_0(j) \theta_0(k) + \omega^T(j) \theta(k) - \psi_0(j) + \theta_0^* e_1(j)$ 를  $0 \leq j \leq k$ 에서 작계하는  $\theta_0(k)$ 와  $\theta(k)$ 를 찾도록 하자. 그런데  $e_1(k)$ 는  $\phi_0(k)$ 와  $\phi(k)$ 를 모르기 때문에 구할 수 없어서  $e_1(k)$ 대신에  $e_y(k)$ 를 대신 사용하는데 그 차이는  $\delta_1(k)$ 이므로 시간에 따라 기하급수적으로 작아진다.

다음과 같은 목적함수  $E(\theta_0, \theta, k)$ 를 생각하자.

$$\begin{aligned} E(\theta_0, \theta, k) &= \sum_{j=0}^k \lambda^{(k-j)} [\omega_0(j) \theta_0 + \omega^T(j) \theta - \psi_0(j) - \psi(j) + \theta_0 e_1(j)]^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\approx \sum_{j=0}^k \lambda^{(k-j)} [\omega_0(j) \theta_0 + \omega^T(j) \theta - \psi_0(j) - \psi(j) + \theta_0 e_y(j)], \quad 0 < \lambda < 1. \quad (18)$$

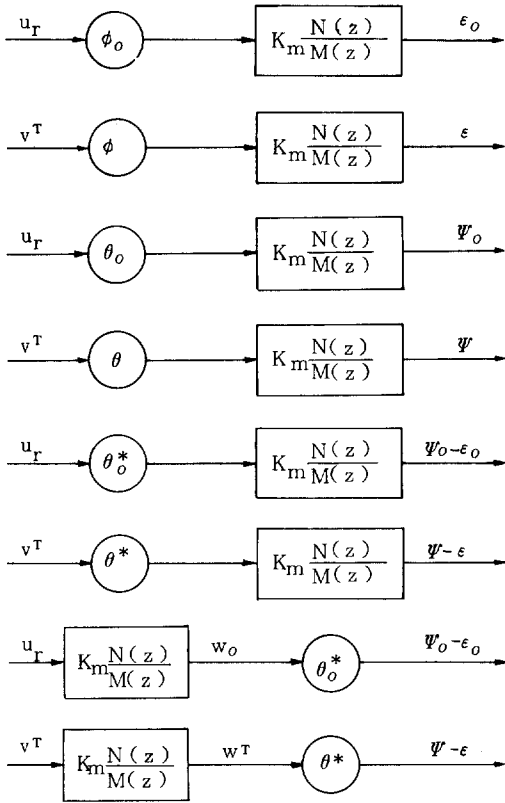


그림 2. 보조신호에 의하여 생기는 출력들  
Fig. 2. Output generated by auxiliary signals

$e_1(k)$ 와  $e_y(k)$ 의 차이  $\delta_1(k)$ 는  $k$ 에 따라 기하급수적으로 감소하며 충분히 큰  $k$ 에 대하여 (17) (18)이 거의 같게 되므로 (18)을 사용하여  $E(\theta_0, \theta, k)$ 를 최소화 하는  $\theta_0(k)$ 와  $\theta(k)$ 를 구하자. (18)에서 표기를 쉽게 하기 위하여

$$\omega(j) = \begin{bmatrix} \omega_0(j) + e_y(j) \\ \omega(j) \end{bmatrix}$$

$$\psi(j) = \psi_0(j) + \psi(j)$$

$$\theta(j) = \begin{bmatrix} \theta_0(j) \\ \theta(j) \end{bmatrix}$$

라고 정의하고  $\frac{\partial E(\theta, k)}{\partial \theta} = 0$  으로부터

$$R(k)\theta(k) = r(k) \tag{19}$$

$$R(k+1) = \lambda R(k) + \omega(k+1)\omega^T(k+1) \tag{20}$$

$$r = (k+1) = \lambda r(k) + \omega(k+1)\psi(k+1) \\ r(0) = 0 \tag{21}$$

을 얻는데  $R(k)$ 는  $(2n+1) \times (2n+1)$  이고  $r(k)$ 는  $(2n+1) \times 1$  이다.  $R(k)$ 의 역행렬이 존재할 때 이를  $P(k) = R^{-1}(k)$ 로 나타내면 (19)으로부터

$$\theta(k) = P(k)r(k) \tag{22}$$

이고 이에 대한 반복식은 다음과 같다.

$$\theta(k+1) = \theta(k) + K(k+1) [\psi(k+1) - \omega^T(k+1)\theta(k)] \tag{23}$$

$$K(k+1) = \frac{P(k)\omega(k+1)}{\lambda + \omega^T(k+1)P(k)\omega(k+1)} \tag{24}$$

$$P(k+1) = \frac{1}{\lambda} \left\{ I - \frac{P(k)\omega(k+1)\omega^T(k+1)}{\lambda + \omega^T(k+1)P(k)\omega(k+1)} \right\} P(k) \tag{25}$$

(7)과 (23)으로 주어지는 적응 시스템의 수렴에 대하여 논의하자.

미지의 시스템 (1)이 적응법칙 (7)과 (23)을 사용하여 제어될 때  $R^{-1}(k)$ 가 존재하고 기준입력  $u_r(k)$ 가 평등하게 유한하면  $k$ 가 증가함에 따라  $\theta(k) \rightarrow \theta^*$ ,  $e_y(k) \rightarrow 0$ 이고 시스템의 상태 벡터  $\xi(k)$ 는 평등하게 유한함을 증명할 수 있다. 이는 최<sup>6)</sup>에서 한 것과 같은 방법으로  $\theta_0(k) \rightarrow \theta_0^*$  및  $\theta(k) \rightarrow \theta^*$ 가 되는 것을 보일 수 있다. 다음에는  $\xi(k)$ 가 평등하게 유한하다는 것을 보이자.

$Q$ 가 Positive definite 한 행렬이며

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & & \\ \vdots & Q & \\ \vdots & & \end{bmatrix}, \quad \hat{\xi}(k) = \begin{bmatrix} u_r(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix}$$

라 하자.  $u_r(k)$ 는 평등하게 유한하므로  $\xi(k)$ 가 평등하게 유한하다는 것은  $\xi(k)$ 가 평등하게 유한하다는 것과 마찬가지로  $\xi(k)$ 가 평등하게 유한하다는 것을 보이자.

$U(k) = \xi^T(k)Q\xi(k)$ 라 하면 최<sup>6)</sup>에서와 유사한 과정을 통하여

$$\Delta U(k) < -\xi^T(k) \{ L - c_1 \|v^T(k)\phi(k)\| \| \xi(k) \| - c_2 \|v^T(k)\phi(k)\|^2 \| \xi(k) \|^2 \} \xi(k) + c_3 \xi(k) + c_4$$

를 얻는데 여기서  $L$ 은 positive definite 한 행렬이고  $c_i, i = 1, 2, 3, 4$ 는 양의 상수이다. 따라서 최<sup>6)</sup>

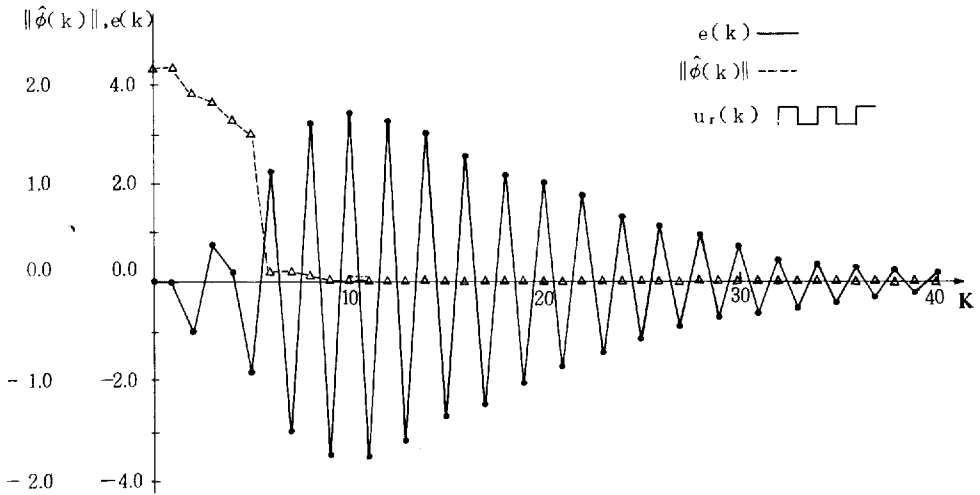


그림 3. 출력 및 제어기 매개변수 오차

Fig. 3. Output and controller parameter errors

에서와 같은 과정을 통하여  $\xi(k)$ 는 평등하게 유한하다는 것을 보낼 수 있다.

목적함수  $E(\theta_0, \theta, k)$ 를  $\omega(k)$ 에서와 같이  $\alpha + \omega^T(k)\omega(k)$  ( $\alpha$ 는 임의의 양의 상수)로 나눈 새로운 목적함수  $E'(\theta_0, \theta, k)$ 를 생각할 수 있는데 이것은 출력오차나 매개변수의 수렴속도에나 영향을 미치지 안정도 증명에는 아무런 영향을 미치지 않는다. 따라서 적절한  $\alpha$ 를 선정하여  $E'(\theta_0, \theta, \xi)$ 를 가지고 적응제어를 할 수도 있다.

#### 4. 시뮬레이션 및 토의

위에서 제시한 적응제어 방법을 불안정한 플랜트에 대하여 적용하였다. 시스템들의 전달함수는 다음과 같다.

$$\text{모델: } \frac{N(z)}{M(z)} = \frac{2(z + 0.2)}{(z + 0.8)(z + 0.9)}$$

$$\text{불안정한 플랜트: } \frac{N_P(z)}{D_P(z)} = \frac{(z + 0.5)}{(z + 0.7)(z + 2.0)}$$

이 경우  $k_m = 2$ 이고  $k_P = 1$ 이다.  $\theta_0(0) = 1$  및  $p(0) = 10,000$ 으로 하고 그외의 모든 초기 조건은 0으로 하였으며 적응과정에 있어서,  $\lambda = 0.8$ 로 주었다. 모델의 입력이

$$u_r(k) = \begin{cases} 1 & 20n \leq k \leq 20n + 9 \\ -1 & 20n + 10 \leq k \leq 20n + 19 \end{cases}$$

인 경우에 대한 시스템의 출력오차  $e_1(k)$  및 제어기

매개변수 오차의 norm  $\|\hat{\phi}(k)\|$ 가 그림 3에 나타나 있다. 여기서 플랜트의 출력이 모델의 출력을 잘 따라가며 제어기의 매개변수 오차가 참값에 잘 수렴하는 것을 볼 수 있다.

#### 5. 결론

$\hat{\theta}$ 가 제시한 적응방법을 모델이나 플랜트의 전달함수의 분자가 monic 나항식이 아닌 경우에 대하여 확장하였다. 이 방법으로 계산기 시뮬레이션을 하여 보았는데 빠른 수렴속도를 보였다. 이 방법과 다른 기존 적응제어 방법을 해석적 방법이나 시뮬레이션을 통하여 비교 검토하여 장단점을 살펴보는 것과 잡음이 들어간 경우에 대한 적응 시스템의 해석이 앞으로의 연구하여야 할 분야이다.

#### 참고 문헌

- 1) R.V. Monopoly; "Model reference adaptive control with an augmented error signal", IEEE Trans., Automat. Contr., vol. AC-19, pp. 474-484, Oct. 1974
- 2) K.S. Narendra and L.S. Valavani; "Stable adaptive controller design - direct control," IEEE Trans., Automat. Contr., vol. AC-23, pp. 570~582, Aug. 1978
- 3) K.S. Narendra, Y.H. Lin, and L.S. Vala-

- vani; "Stable adaptive controller design, part II : Proof of Stability," IEEE Trans., Automat. Contr., vol. AC-25, pp. 440 ~ 448, June 1980
- 4) K. S. Narendra and Y. H. Lin; "Stable discrete adaptive control," IEEE Trans., Automat. Contr., vol. AC-25, pp. 456 ~ 461, June 1980
- 5) G. Kreisselmeier and D. Joos; "Rate of convergence in model reference adaptive control," IEEE Trans., Automat. Contr., vol. AC-27, pp. 710 ~ 713, June 1982
- 6) 최종호; "목적함수를 사용한 적응제어," 전기학회지, 제 36권, pp. 219 ~ 224, 1983년 6월
- 7) G. C. Goodwin, P. J. Ramadge and P. E. Caines; "Discrete time multivariable adaptive control," IEEE Trans., Automat. Contr., vol. AC-25, pp. 449 ~ 456, June 1980
- 8) I. D. Landau and R. Lozano; "Unification of discrete time explicit reference adaptive control design," Automatica, vol. 17, pp. 593 ~ 611, July 1981