論 文
33～12～5

일반화된 상태모델로 주어진 시스템의 최적 제어문제 해석

The Analysis of the Optimal Control Problem for the System with the Generalized State Space Model

李 夬 熙
(Kwae-Hi Lee)

Abstract

The optimal control and filtering problems for the systems with the generalized state space model are considered and the generalized Riccati equation is derived. Also the algorithm for the solution of the generalized algebraic Riccati equation is developed and it is shown that the algorithm can be applied to the case where the matrix R is singular or near singular.

1. 서 론

지금까지 상태방정식으로 주어진 시스템의 최적제어/최적필터문제들에 대한 연구는 수없이 많았다.[1)~4)] 그러나 대부분의 경우 주어진 시스템이 표준형의 상태방정식으로 가정했다. 본 논문에서는 다음과 같은 일반화된 상태방정식으로 (generalized state space differential equation) 주어진 시스템의 최적제어/최적필터문제를 해석하고자 한다.

$$E\,\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \quad x(o) = x_0 \tag{1}$$

여기서 $x(\cdot)$ R^n 은 상태벡터
$u(\cdot)$ R^m 은 입력벡터이고
$A \in R^{n\times n}$, $E \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ 인 행열이다.

만약 E 행열이 논싱귤라 (nonsingular) 인 경우 (1)식은 다음과 같은 표준형의 상태방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \hat{A}\,x(t) + \hat{B}\,u(t) \tag{2}$$

여기서 $\hat{A} = E^{-1}A$, $\hat{B} = E^{-1}B$ 이다.

그러나 표준형의 상태방정식으로 해석하는 것보다 일반화된 상태방정식을 직접 이용하여 해석해야 하는 경우가 많이 있다.[5),6)] 예를 들면 대규모 시스템을 해석하거나 perturbation 방정식을 다룰 경우 E 행열이 singular 가 되어 E^{-1}가 존재하지 않게 되는 경우가 있게 된다. 또 E 행열이 nonsingular 인 경우라 할지라도 near singular 가 되면 실제로 컴퓨터를 이용하여 E^{-1} 를 구하게 되면 불필요한 계산상의 오차를 유발하게 된다. 또한 행열 E 와 A 가 Sparse 인 경우 일반적으로 $E^{-1}A$ 는 Sparse 행열이 아니므로 일반화된 상태방정식으로 해석하는 것이 시간상으로 유리하게 된다. 본 논문에서는 우선 행열 E가 nonsingular 인 경우만을 취급하고자 한다.

2. 최적제어 문제

이번 장에서는 일반화된 상태방정식으로 주어진 시스템의 최적제어문제를 다루고 그 중에서도 특히 일반화된 Riccati 방정식 (generalized Riccati equation) 을 유도해 본다.

다음과 같은 최적제어문제를 생각하자. 시불변 선형시스템 (linear time - invariant system) 은

$$E\,\dot{x} = A\,x + B\,u \;;\; x(o) = x_0 \tag{3}$$

으로 주어지고 입력벡터 u* 를 구해서 다음과 같은 cost functional 을 최소화시키고자 한다.

$$J(u) = \frac{1}{2}x^T(T)\,\Gamma^T x(T) + \frac{1}{2}\int_0^T (\,x^T Q x$$

正 會 員 : 西江大 理工大 電子工學科 助敎授 · 工博
接受日字 : 1984年 10月 8日

$$+\ 2x^T Su + u^T Ru)\,dt \quad (4)$$

여기서 $x(\cdot)\in \boldsymbol{R}^n$, $u(\cdot)\in \boldsymbol{R}^m$, $S\in \boldsymbol{R}$

$Q\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$이고 $Q=Q^T \geqq 0$

$R\in \boldsymbol{R}^{m\times m}$이고 $R=R^T \geqq 0$ 이다.

또 $\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}$ 은 nonnegative definite 이다.

우리는 앞에서 언급한 바와 같이 행열 E가 non-singular 로 가정하지만 $E^{-1}A$, $E^{-1}B$ 등으로 고쳐서 표준형을 만드는 것은 좋지가 않다. 즉 E^{-1}가 조건이 나쁠 수도 있고 (ill-conditioned) 또는 sparsity를 잃을 수도 있기 때문이다. 또 주어진 시스템은 안정화할 수 있고 (stabilizable) 검출화할 수 있다고 (detectable) 가정한다. 즉 모든 $A-\lambda E$ 행열의 불안정한 일반화된 고유치 (unstable generalized eigenvalues) 에 대해서

rank$[A-\lambda E]=n=$ rank$[A^T-\lambda E^T, C^T]$이다. 여기서 $C^TC=Q$, rank$[C]=$ rank$[C]=$rank$[Q]$ 이다.

다음과 같은 스칼라 Hamiltonian $\boldsymbol{H}$를 정의하자.

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}(x^TQx+2x^TSu+u^TRu) + p^T(Ax+Bu-E\dot{x}) \quad (5)$$

여기서 $p(\cdot)\in \boldsymbol{R}^n$ 은 adjoint 백터이다. Hamilton-Jacoby 이론[4] 을 적용하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \dot{p}}\right)=0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \dot{x}}\right)=0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial u}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \dot{u}}\right)=0 \quad (8)$$

(5), (6), (7)식으로 부터

$$E\dot{x}=Ax+Bu \quad (9)$$

$$E^T\dot{p}=-Qx-A^Tp-Su \quad (10)$$

$$0=S^Tx+Ru+B^Tp \quad (11)$$

을 얻게 된다. 행열로 표시하면 다음과 같게 된다.

$$\begin{pmatrix} E & O & O \\ O & E^T & O \\ O & O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \\ \dot{u} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O & B \\ -Q & -A^T & -S \\ S^T & B^T & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ p \\ u \end{pmatrix} \quad (12)$$

여기서 당분간 R이 nonsingular 라고 가정한다. singular (or nearsingular)인 경우는 후에 다시 생각한다.

(11)식으로 부터

$$u=-R^{-1}S^Tx-R^{-1}B^Tp \quad (13)$$

(13)식을 (9)식과 (10)식에 대입하면

$$Ex=(A-BR^{-1}S^T)x-BR^{-1}B^Tp \quad (14)$$

$$E^T\dot{p}=-(Q-SR^{-1}S^T)x-(A-BR^{-1}S^T)p \quad (15)$$

또는

$$\begin{pmatrix} E & O \\ O & E^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-BR^{-1}S^T & -BR^{-1}B^T \\ -(Q-SR^{-1}S^T) & -(A-BR^{-1}S^T)^T \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$p(t)=\Pi(t)\,Ex(t)\text{로 정의하면} \quad (17)$$

$$\dot{p}=\dot{\Pi}Ex+\Pi E\dot{x} \quad (18)$$

(18)식을 (15)식에 대입하면

$$[-E^T\dot{\Pi}E-E^T\Pi(A-BR^{-1}S^T) + E^T\Pi BR^{-1}B^T\Pi E+(SR^{-1}S^T-Q) - (A-BR^{-1}S)^T\Pi E]\,x=0 \quad (19)$$

을 얻는다. (19) 식은 모든 x에 대해 만족해야 하므로 우리는 다음과 같은 일반화된 Riccati 방정식을 얻게 된다.

$$-E^T\dot{\Pi}E=-E^T\Pi BR^{-1}B^T\Pi E+E^T\Pi(A-BR^{-1}S^T)+(A-BR^{-1}S^T)^T\Pi E + (Q-SR^{-1}S^T) \quad (20)$$

편의상 $F:=A-BR^{-1}S^T$, $G:=-BR^{-1}B^T$, $H:=Q-SR^{-1}S^T$ 로 두면 (20) 식은

$$-E^T\dot{\Pi}E=E^T\Pi E+E^T\Pi F+F^T\Pi E+H\cdots \quad (21)$$

가 된다. 행열 E가 nonsingular 인 경우 우리는 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

정리 1 : 식(21)로 주어진 일반화된 Riccati해는 다음과 같은 일반적인 시스템 (ordinary system)의 Riccati 해와 같다.

$$\begin{pmatrix}\dot{\hat{x}}\\ \dot{\hat{p}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & O\\ O & E^T\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}F & G\\ -H & -F^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & O\\ O & I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{p}\end{pmatrix} \tag{22}$$

증명 : (22)식으로 부터 우리는

$$\dot{\hat{x}} = FE^{-1}\hat{x} + G\hat{p} \tag{23}$$

$$\dot{\hat{p}} = -E^{-T}HE^{-1}x - E^{-T}F^T\hat{p} \tag{24}$$

$\hat{F}=FE^{-1}$, $\hat{G}=G$, $\hat{H}=E^{-T}E^{-1}$를 다음과 같은 Riccati 방정식에 대입하면 된다.

$$-\dot{\Pi} = \Pi\hat{G}\Pi + \Pi F + \hat{F}^T\Pi + \hat{H}$$

그러므로 일반화된 Riccati 해 Π는 우리가 알고 있는 모든 특성을 만족시킨다.

여기서 $E^T p(T) = \Gamma_T\, x(T)$ (25)

따라서 $E^T\, \Pi(T)E = \Gamma_T$ (26)

(21)식과 (26)식은 backward 초기치 문제가 된다.

3. 최적 필터문제

다음과 같은 시스템을 생각한다.

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \tag{27}$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \tag{28}$$

여기서 E, $A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $B\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$, $D\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$ $C\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$이고 $u(\cdot)\in\boldsymbol{R}^m$은 입력벡터, $y(\cdot)\in\boldsymbol{R}^r$은 출력벡터, $x(\cdot)\in\boldsymbol{R}^n$은 상태벡터이다. 또 $v(\cdot)\in\boldsymbol{R}^r$, $w(\cdot)\in\boldsymbol{R}^m$은 기대치가 0인 Gaussian white noise 이고

$$\boldsymbol{E}\left\{\begin{bmatrix}w(t)\\ v(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w(\tau)\\ v(\tau)\end{bmatrix}^T\right\}=\begin{bmatrix}Q & S\\ S^T & R\end{bmatrix}\delta(t-\tau) \tag{29}$$

$\boldsymbol{E}[x(o)]=\bar{x}_o$, $\boldsymbol{E}[x(o)x^T(o)]=\bar{\Pi}(o)$, 또 $x(o)$는 $v(t)$, $w(t)$ 와는 서로 독립(independent)인 Gaussian 이라 가정한다. E가 nonsingular 인 경우 (27)로부터

$$x(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) + E^{-1}D\ (t) \tag{30}$$

을 얻는다. (29), (30) 으로 부터 우리는 다음과 같은 최적필터해 $\hat{x}$를 얻을 수 있다.[11)]

$$E\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t)\,[\,y(t) - C\hat{x}(t)\,] \tag{31}$$

여기서

$$K(t) = E\,[\,\Pi(t)C^T + E^{-1}DS\,]\,R^{-1} \tag{32}$$

$$\dot{\Pi} = [\,E^{-1}A - E^{-1}DSR^{-1}C\,]\Pi + \Pi[\,E^{-1}A - E^{-1}DSR^{-1}C\,]^T - \Pi C^TR^{-1}C\Pi + E^{-1}D\,[\,Q - SR^{-1}S^T\,]\,D^TE^{-T} \tag{33}$$

$$\text{또}\quad \Pi(o) = \bar{\Pi}(o) \tag{34}$$

(33) 식의 양변에 E를 앞에 곱하고 E^T를 뒤에 곱하면 우리는 다음과 같은 일반화된 Riccati 방정식을 얻게 된다.

$$E\Pi E^T = [\,A - DSR^{-1}C\,]\Pi E^T + E\Pi\,[\,A - DSR^{-1}C\,]^T - E\Pi C^TR^{-1}C\Pi E^T + D[\,Q - SR^{-1}S^T\,]\,D^T \tag{35}$$

(35)식과 (20)식을 비교하면 우리는 다음과 같은 쌍대성을 얻을 수 있다.

정리 2 : 최적제어문제의 여러가지 행열(E, B, Q, S, R)과 최적필터문제의 행열(E^T, C^T, DQD^T, DS, R)이 같을 경우 일반화된 Riccati 해는 다음과 같다.
최적제어문제의 해 $\Pi_1(T-t)$
=최적필터문제의 해 $\Pi_2(t)$

따라서 우리는 최적필터문제를 최적제어문제로 전환할 수 있고 정리 2에 결과를 이용하여 해를 구할 수 있다.

(12) 식으로 부터 우리는 다음과 같은 쌍대적인 최적제어문제를 얻게 된다.

$$\begin{pmatrix}E & O & O\\ O & E & O\\ O & O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{t}_1\\ \dot{t}_2\\ \dot{t}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^T & O & C^T\\ -DQD^T & -A & -DS\\ S^TD^T & C & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\\ t_3\end{pmatrix} \tag{36}$$

여기서 $t_1\in\boldsymbol{R}^n$, $t_2\in\boldsymbol{R}^n$, $t_3\in\boldsymbol{R}^r$ 이다.

4. Schur방법을 이용한 Riccati 방정식의 해

이번 장에서는 최적제어의 레귤레이터나 최적필터의 정상상태에서 나타나는 문제를 해석한다. 즉 이 경우에는 Riccati 방정식의 해가 결국 Riccati 대수 방정식(algebraic Riccati equation)의 해와 같게 된다. 본론에 앞서 우리는 몇가지 정의와 정리를 알아본 후에 진행하기로 한다.

정리 3 : 만약 A가 $n\times n$ 행열이라면 항상 orthogonal 한 $n\times n$ 행열 U 가 존재해서 $U^{T}AU$ 가 준상삼각행열 (quasi - upper - triangular) 이 된다. 즉 대각선상에 1×1 블록과 2×2 블록으로 표현되는 상삼각행열이 된다。또한 2×2 블록과 1×1 블록은 임의로 조정할 수 있다.

증명 : 참고문헌 8), 9)

정의 1 : $A\in \boldsymbol{R}^{2n\times2n}$ 이 만약 $J^{-1}A^{T}J=-A$를 만족한다면 A를 Hamiltonian 행열 A이라 한다.

정리 4 : 만약 λ가 Hamiltonian 행열 A의 고유치라면 $-\lambda$도 역시 같은 차수를 가진 고유치가 된다.

증명 : 참고문헌 10)

이제 다음과 같은 Riccati 대수방정식을 생각해 보자.

$$\Pi G\Pi+F^{T}\Pi+\Pi F+H=0 \tag{37}$$

여기서 G와 H가 nonnegative definite 하고 $(F,\bar{G})$는 안정화할 수 있고 $(\bar{H},F)$는 검출화할 수 있다고 가정하자. (단 $\bar{G}\bar{G}^{T}=G$, $\mathrm{rank}(\bar{G})=\mathrm{rank}(G)$, $\bar{H}^{T}\bar{H}=H$, $\mathrm{rank}(\bar{H})=\mathrm{rank}(H)$). 이러한 가정하에서 (37)식은 항상 유일한 nonnegative 해를 갖게 된다.[3] Schur 방법은 다음과 같은 Hamiltonian 행열로 부터 해를 구하게 된다.

$$M=\begin{pmatrix}F & G\\ -H & -F^{T}\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^{2n\times2n} \tag{38}$$

정리 3과 정리 4로 부터 orthogonal 한 행열 U가 존재해서 M행열을 소위 RSF (real Schur Form)으로 변환하게 된다。

$$U^{T}MU=\Phi=\begin{pmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ 0 & \Phi_{22}\end{pmatrix},\ \Phi_{ij}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}\ ;i,j=1,2$$

여기서 Φ_{11}는 안정한 고유치를 갖는 준상삼각행열이고 Φ_{22}는 불안정한 고유치를 갖는 준상삼각행열이다. 이때 행열 U를 다음과 같이 네개의 $n\times n$ 블록으로 나누면 아래의 정리를 얻게 된다.

$$U=\begin{bmatrix}U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{bmatrix} \tag{39}$$

정리 5 : 앞에서 가정한 조건에서 U_{11}은 nonsingular 가 되고 $\Pi=U_{21}U_{11}^{-1}$는 유일한 nonnegative definite 한 해가 된다.

증명 : 참고문헌 10), 11)

이제 다음과 같은 Riccati 대수방정식을 생각해 보자

$$E^{T}\Pi G\Pi E+E^{T}\Pi F+F^{T}\Pi E+H=0 \tag{40}$$

$M=\begin{bmatrix}F & G\\ -H & -F^{T}\end{bmatrix}$, $\hat{M}=\begin{bmatrix}E & O\\ O & E^{T}\end{bmatrix}^{-1}$ 라 두면 $\hat{M}$은 Hamiltonian 행열이 된다。$\hat{M}$의 앞에 $\begin{bmatrix}E & O\\ O & I\end{bmatrix}^{-1}$를 곱하고 뒤에 $\begin{bmatrix}E & O\\ O & I\end{bmatrix}$를 곱하면 $\begin{bmatrix}E & O\\ O & I\end{bmatrix}^{-1}\hat{M}$

$$\begin{bmatrix}E & O\\ O & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E^{-1} & O\\ O & E^{-T}\end{bmatrix}M \tag{41}$$

으로 된다. (41)식에서 우리는 $\hat{M}$와 $\begin{bmatrix}E^{-1} & O\\ O & E^{-T}\end{bmatrix}M$이 같은 고유치를 갖는 것을 알 수 있다.

M은 Hamiltonian 이므로 정리 3과 정리 4로 부터 orthogonal 한 행열 W를 구해서 $\begin{bmatrix}E & O\\ O & E^{T}\end{bmatrix}^{-1}M=W\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ O & \Phi_{22}\end{bmatrix}W^{T}$로 만들 수 있다.

여기서 Φ_{11}은 안정한 고유치를 갖는 행열이고 Φ_{22}는 불안정한 고유치를 갖는 행열이다.

다음에 $V=\begin{bmatrix}E & O\\ O & I\end{bmatrix}W$로 두면 우리는 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$M=\begin{bmatrix}I & O\\ O & E^{-T}\end{bmatrix}M\begin{bmatrix}E^{-1} & O\\ O & I\end{bmatrix}=V\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ O & \Phi_{22}\end{bmatrix}V^{-1} \tag{42}$$

M이 Hamiltonian 이므로 만약 $V=\begin{bmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix}$로 분해했을 때 $\Pi=V_{21}V_{11}^{-1}$는 정리 1과 정리 5로부터 (40) 식의 해가 된다. 또한 최적제어 입력 u^{*}는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}u^{*}&=-R^{-1}S^{T}x-R^{-1}B^{T}p=-R^{-1}[S^{T}+B^{T}\Pi E]\\ x&=-R^{-1}[S^{T}+B^{T}V_{21}V_{11}^{-1}E]x=-R^{-1}\\ &[S^{T}+B^{T}W_{21}W_{11}^{-1}]x\end{aligned} \tag{43}$$

위의 결과로 부터 우리는 일반화된 Riccati 대수방정식의 해를 다음과 같이 풀 수 있다.

정리 6 : Orthgonal 한 행열 Q, $Z\in\boldsymbol{R}^{2n\times2n}$를 구해서 $Q\begin{bmatrix}E & O\\ O & E^{T}\end{bmatrix}Z$와 $Q\begin{bmatrix}F & G\\ -H & -F^{T}\end{bmatrix}Z$를 각각 상삼각행열과 준상삼각행열로 만들었을 때 좌상의 $n\times n$ 블록이 안정한 일반화된 고유치를 갖는다

면 일반화된 Riccati 대수방정식의 해 $\Pi = Z_{21} Z_{11}^{-1} E^{-1} = V_{21} V_{11}^{-1}$가 된다. 여기서

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} E & O \\ O & I \end{bmatrix} \quad Z \text{ 이다.}$$

실제로 컴퓨터를 이용해서 정리 6에서 언급한 Q, Z를 구할 경우에는 Moler－stewart －Ward Combination－Shift QZ 알고니즘[12),13)] 을 이용해서 상삼각행열과 준상삼각행열로 만든 후에 VanDooren's ordering [14)] 을 이용하면 된다. 그러나 VanDooren의 알고리즘은 이산시스템의 경우만 적용될 수 있으나 약간의 수정만으로 본 논문의 경우에도 적용할 수 있다. 이 부분에 관해서는 다른 논문을 통해 발표할 예정이다.

지금까지는 R^{-1}가 존재하는 경우만을 취급했는데 만약 R이 singular 거나 nearsigular 인 경우에는 다음과 같은 방법을 사용할 수 있다.

우선 orthogonal 한 행열 $U \in \boldsymbol{R}^{(2n+m)\times(2n+m)}$ 을 구해서

$$U \begin{bmatrix} B \\ -S \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \\ \hat{R} \end{bmatrix}$$

이 되도록 한다. 여기서 $\hat{R}$은 full row rank 를 갖게 된다.

(12)식의 양변에 U를 앞에 곱하면

$$U \begin{bmatrix} E & O & O \\ O & E^T & O \\ O & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} A & O & B \\ -P & -A^T & -S \\ S^T & B^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \\ u \end{bmatrix} \tag{44}$$

으로 된다. 단 중복을 피하기 위해 (12)식의 Q를 P로 두었다. $U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}$ 로 분해하면 (44)식은 다음과 같이 된다. 여기서 $U_1 \in \boldsymbol{R}^{2n\times 2n}$, $U_2 \in \boldsymbol{R}^{2n\times m}$, $U_3 \in \boldsymbol{R}^{m\times 2n}$, $U_4 \in \boldsymbol{R}^{m\times m}$ 이다.

$$U_1 \begin{bmatrix} E & O \\ O & E^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \left\{ U_1 \begin{bmatrix} A & O \\ -P & -A^T \end{bmatrix} + U_2 \left[S^T \quad B^T \right] \right\} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \tag{45}$$

(12) 식과 (45) 식을 비교해 보면 결국 일반화된 고유치 중에서 무한대의 고유치는 없어지고 $2n \times 2n$ pencil 에 대해서만 고려하면 되는 알 수 있다. 따라서 (45) 식으로 부터 orthogonal 한 행열 Q, $Z \in \boldsymbol{R}^{2n\times 2n}$ 을 구해

$$QU_1 \begin{bmatrix} E & O \\ O & E^T \end{bmatrix} Z \text{ 와 } Q\left\{ U_1 \begin{bmatrix} A & O \\ -P & -A^T \end{bmatrix} + U_2 \left[S^T \quad B^T \right] \right\} Z$$

가 각각 상삼각행열과 준상삼각행열이 되도록 하면 $\Pi = Z_{21} Z_{11}^{-1} E^{-1} = V_{21} V_{11}^{-1}$가 된다. 여기서 상삼각행열과 준상삼각행열의 좌상 $n \times n$ 블록은 안정한 일반화된 고유치를 갖으며

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} E & O \\ O & I \end{bmatrix} \quad Z \text{ 이다.}$$

5. 결 론

우리는 지금까지 일반화된 상태방정식으로 주어진 시스템의 최적제어／최적필터 문제를 알아 보았다. 결국 일반화된 상태방정식으로 주어진 시스템에서도 쌍대성이 성립되는 것을 알 수 있었고 따라서 두가지문제는 결국 동일한 방법으로 해석이 가능한 것을 알 수 있었다. 또 정상상태에서 일반화된 Riccati 대수방정식을 구하는 알고리즘을 제시하였고 이 방법에 의해 직접 E^{-1}를 구하지 않고도 문제를해석할 수 있는 것을 보였고 또한 R 행열이 singular인 경우나 near singular 인 경우에도 적용할 수 있는 것을 보였다. 앞으로 E 행열이 완전singular 인 시스템에 대한 일반화된 Riccati 미분(대수)방정식을 구하고 시스템을 해석하는 연구를 계속하여야 한다고 생각한다. 이 경우에는 우선 Riccati 방정식의 해의 존재여부, uniqueness 를 알아보고 해를 구하는 알고리즘을 개발해야 되리라 생각된다.

끝으로 본 연구는 1983년도 문교부 학술연구조성비에 의해 수행되었음을 밝히며, 당국에 사의를 표하는 바입니다.

참 고 문 헌

1) B.D.O. Anderson and J.B. Moore ;"Linear Optimal Control", Prentice－Hall, Englewood Cliffs, 1971
2) M. Athans and P.L. Falb ; "Optimal Control", McGraw Hill, New York, 1966
3) H. Kwakernaak and R. Sivan ; " Linear Optimal Control Systems", Wiley, New York, 1972
4) A. P. Sage ; " Optimal System Control",

Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1977

5) D. G. Luenberger ;" Dynamic Equations in Descriptor Form", IEEE Trans., Automat. Contr., Vol. AC－22, pp. 312－321, 1977

6) R. F. Sincovec, et al.; " Analysis of Descriptor Systems Using Numerical Algorithms", IEEE Trans., Automat. Contr., Vol. AC－26, pp. 139－147, 1981

7) J. S. Meditch ; "Stochastic Optimal Linear Estimation and Control", McGraw－Hill, New York, 1969

8) G. W. Stewart ;" Introduction to Matrix Computation", Academic－Press, New York, 1973

9) G. H. Golub and J. H. Wilkinson ;" Ill－Conditioned Eigen Systems and the Computation of the Jordan Canonical Form", SIAM Rev., Vol. 18, pp. 578－619, 1976

10) A. J. Laub ; " A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations", IEEE Trans., Automat. Contr., Vol. AC－23, pp. 913－921, 1978

11) T. Pappas, et al. ;" On the Numerical Solution of the Discrete Time Algebraic Riccati Equation", IEEE Trans., Automat. Contr., Vol. AC－25, pp. 631－641, 1980

12) C. B. Moler and G. W. Stewart ;"An Algorithm for Generalized Matrix Eigen Value Problems", SIAM Journal, Numerical Analysis, Vol. 10, pp. 241－256, 1973

13) R. C. Ward ; " The Combinational Shift QZ Algorithm", SIAM Journal, Numerical Analysis, Vol 12, pp. 835～853, 1975

14) P. Van Dooren ;"A Generalized Eigenvalue Approach for Solving Riccati Equations", Dept. of Computer Science, Report No.NA－80－02, Stanford University, 1980