

<論 文>

# 경로적분법을 이용한 V-노치 평판의 응력확대계수 계산†

김진우\* · 김선덕\*\* · 홍창선\*\*

(1984년 1월 6일 접수)

## On Computation of the Stress Intensity Factors in the V-Notched Plates using a Contour Integral Method

J. W. Kim, S. D. Kim and C. S. Hong

### Abstract

The plane elastostatic boundary value problem with the sharp V-notched singularity is formulated by a contour integral method for determining numerically the stress intensity factors. The integral formula is based on Somigliana type of reciprocal work in terms of displacement and traction vectors on the plate boundary. The characteristic singular solutions can be identified on the basis of traction free boundary conditions of two radial notch edges. Two numerical examples are treated in detail; a symmetric mode-I type of notched plate with various interior angles and a mixed mode type of cantilever subjected to end shear.

### 1. 서 론

2 차원 탄성정역학 경계치문제에서 노치나 크랙끝과 같은 평판 경계의 기하학적 불연속 점에서 탄성응력은 무한대로 커지며 그점 끝에서 응력 특이성의 크기로 정의되는 응력확대계수(stress intensity factor)의 결정은 크랙확대의 기준으로 사용되는 임계치(fracture toughness) 범위 예측에 중요 요소가 된다. 이러한 무한대의 특이응력(singular stress)의 응력확대 계수를 위한 효율적인 수치해법으로는 기본적으로 특이점 인접을 둘러싼 임의경로에서 탄성변형일과 관련된 에너지 보존의 원리에서 유도된

$$J = \int_C F(\underline{u}, \underline{\nabla} \underline{u}, \underline{\sigma}) ds = 0$$

형태의 경로적분식이 이용되었다. 특히 Eshelby-Rice의  $J$ -적분<sup>(1,2)</sup>은 선형과피역학에 널리 이용되는 대표적

† 1982년도 대한기계학회추계학술대회(11.20)에서 발표

\* 정희원, 육군사관학교 기계공학과

\*\* 정희원, 한국과학기술원 기계공학과

인 크랙끝 응력확대계수 계산법으로 특이점 부근의 특별취급없이 일반 경계치문제의 수치해로부터 얻어지는 자료만을 포함하기에 설계 기준의 2차원 유한요소법과 결합할 수 있는 장점이 있다. 그러나 이 적분식은 크랙확대와 연관된 Irwin의 변형에너지 방출률<sup>(3)</sup>(strain energy release rate) 전체 계산은 가능한 반면크랙전파 모우드, 즉 모우드-I과 모우드-II에 따른 응력확대계수를 구분할 수 없기에 혼합모우드 문제 취급에 단점으로 지적되었다.

이들 모우드-I과 모우드-II의 응력확대계수를 독립적으로 해석할 수 있는 다른 적분식으로 Stern<sup>(4)</sup>의 Somigliana 형태의 경로독립 적분식을 들 수 있다. 특이점에서 멀리 떨어진 외곽에서 탄성변위와 응력장은 특이 응력장의 영향을 받지 않는다는 특성을 적용하여 특이점 부근의 탄성변형일과 외곽 임의선택 경로에서의 일을 등가시킨 방정식으로 대칭 및 비대칭 크랙 경계치문제<sup>(5,6,7)</sup>에 이용되었다. 이 적분식은 특이점 부근의 탄성실체제와 보조계의 향으로 표시된 가역상반일(reciprocal work)을 특이점 인접경로에서 직접 적분한 후 이용될 수 있는 반 이론수치해법으로 특이점

에 따른 특성해와 대응되는 보조해의 규정을 필수로 하고 있다.

본 논문에서는 Stern이 제시한 경로적분식을 기본방정식으로 하여 예리한 임의 노치내각을 가진(크랙의 경우  $0^\circ$ ), 즉  $r^\lambda$  형태의 특이점을 포함한 모우드-I 및 II 응력확대계수를 위한 특성해 및 보조해를 규정하고 선택모형문제로 예리한 노치내각을 달린 대칭 하중의 인장문제와 끝단 전단력하중하의 일단 고정정보의 비대칭문제의 응력확대계수를 기존의 재래식 유한요소법과 결합하여 계산하였다. 또한 각각의 경우 적분경로 및 요소분할을 달리하여 수치해의 안정성 및 경로 독립성을 검토하였다.

2. 경로적분 방정식

Stern<sup>(4)</sup>의 경로적분공식(contour integral representation)을 간단히 요약하면 다음과 같다.

평형상태에 있는 두 개의 상이한 탄성상태, 즉 주어진 경계치 문제에 해당되는 실제체와 또 다른 임의문제의 보조계를 고려할 때 평면탄성정역학 문제에서 물체력을 무시하면 Betti의 가역상반일의 정리는 다음과 같다.

$$\int_{\partial R^*} (\underline{T} \cdot \underline{u}^c - \underline{T}^c \cdot \underline{u}) ds = 0 \tag{1}$$

여기서  $(\underline{u}, \underline{T})$ 는 평면의 경계  $\partial R^*$ 에서 정의되는 변위와 트래션(traction) 벡터이고  $(\underline{u}^c, \underline{T}^c)$ 는 보조탄성상태를 뜻한다. 트래션 벡터와 응력텐서,  $\sigma$  성분과의 관계는

$$\underline{T} = \underline{\sigma} \underline{n} \quad (T_i = \sigma_{ij} n_j) \tag{2}$$

가 되고  $\underline{n}$ 는 경계에서 단위 수직 벡터이다. 경계적분식 (1)을 특이점을 포함하는 탄성평판 문제에 적용하기 위하여 Fig. 1에서 보는 바와 같이 특이점으로부터 반경  $\varepsilon$  안에 있는 부분을 제거시킨다.

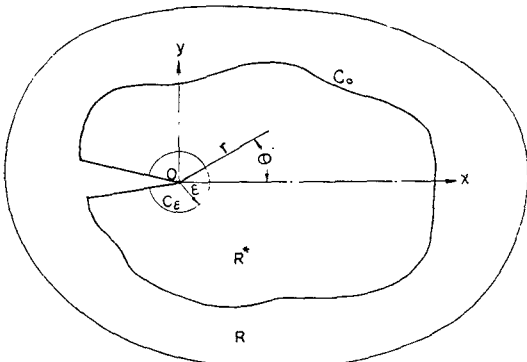


Fig. 1 Deleted region for singularity

$\partial R^*$ 가 특이점이 제거된 정의역  $R^*$ 의 경계라면 특이점으로부터 멀리 떨어진 외곽경계  $C_0$ , 특이점을 에워싸는 반경  $\varepsilon$ 의 내곽경계  $C_\varepsilon$ 과 노치면의 경계의 합으로 볼 수 있다. 노치면의 하중이 없다면 총 경계  $\partial R^*$ 에서의 가역상반일은 영이 된다. 그러므로 식 (1)을 내, 외곽경계로 나누어 적분하면 다음과 같다.

$$\int_{C_\varepsilon} (\underline{T} \cdot \underline{u}^c - \underline{T}^c \cdot \underline{u}) ds + \int_{C_0} (\underline{T} \cdot \underline{u}^c - \underline{T}^c \cdot \underline{u}) ds = 0 \tag{3}$$

일반적으로 특이점이 있는 문제에서 변위벡터와 응력텐서는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\underline{u} = \underline{u}' + \underline{u}^* + \underline{u}_0 \tag{4}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}' + \underline{\sigma}^*$$

$(\underline{u}', \underline{\sigma}')$ 는 특이점을 지배하는 탄성상태를 뜻하고  $(\underline{u}^*, \underline{\sigma}^*)$ 는 나머지 부분에서 탄성장을 주도하면서  $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ 가 주어진 경계조건을 만족하도록 된 함수이다. 또한  $\underline{u}_0$ 는 주어진 특이점에서의 값이다.

특이점 근처의 응력과 변위장은 다음 치수 관계식으로 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} |\underline{u} - \underline{u}_0| &= Q(r^\lambda) \\ r \|\underline{\sigma}\| &= Q(r^\lambda) \end{aligned} \tag{5}$$

여기서  $\lambda (0 < \lambda < 1)$ 는 특이점의 형태(크랙, 노치, reentrant corner)에 좌우되는 특이점의 강도로 크랙의 경우 잘 알려진  $\lambda = \frac{1}{2}$ 의 값을 갖는다<sup>(8,9)</sup>. 또한 식 (5)로부터 다음의 차수관계식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} |\underline{u}'| &= Q(r^\lambda), \quad r \|\underline{\sigma}'\| = Q(r^\lambda) \\ |\underline{u}^*| &= 0(r^\lambda), \quad r \|\underline{\sigma}^*\| = 0(r^\lambda) \end{aligned} \tag{6}$$

보조계함수  $(\underline{u}^c, \underline{\sigma}^c)$ 는 특이점에서 반경  $\varepsilon$ 의 경계  $C_\varepsilon$ 에서 유한한 상반일이 되어야 한다는 조건에서

$$|\underline{u}^c| = Q(r^{-\lambda}), \quad r \|\underline{\sigma}^c\| = Q(r^{-\lambda}) \tag{7}$$

이 된다.

식 (2)와 (4)를 이용하고 차수관계식 (5), (6)을 적분식 (3)에 대입하면 그 극한값은 다음의 경로적분식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} (\sigma_{ij} n_j u_i^c - \sigma_{ij}^c n_j u_i) ds \\ = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_0} (\sigma_{ij} n_j u_i^c - \sigma_{ij}^c n_j u_i) ds \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 외곽경로  $C_0$ 는 특이점에서 멀리 떨어진 임의 선택 경계이므로 식 (8)은 경로에 독립인 선적분방정식이다.

이제 식 (8)에서 적분함수로 정의된 특이탄성계  $(\underline{u}', \sigma_{ij}')$ 와 보조계  $(\underline{u}^c, \sigma_{ij}^c)$ 의 특성함수들을 규정 하도록 하자.

3. 특이탄성함수와 보조함수

3.1. 특이탄성함수

2차원 탄성정역학에서 균질, 등방성 탄성평판에 대한 변위, 응력의 일반해는 Green과 Zerna<sup>(10)</sup>의 복소수함수  $Q(z)$ ,  $\omega(z)$ 로부터 구할 수 있다.

$$u_r + iu_\theta = \frac{e^{-i\theta}}{2\mu} [\kappa Q(z) - zQ(\bar{z}) - \bar{\omega}(\bar{z})]$$

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = Q'(z) - \bar{z}Q''(\bar{z}) - \bar{z}z^{-1}\omega'(\bar{z}) + Q'(\bar{z})$$

$$\sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta} = Q'(z) + \bar{z}Q''(\bar{z}) + \bar{z}z^{-1}\omega'(\bar{z}) \quad (9)$$

$\mu$ 는 전단탄성계수이고  $\kappa$ 는 평면변형을 상태일 때  $3-4\nu$ , 평면응력 상태일 때  $3-\nu/1+\nu$ 의 값을 갖는다.  $\nu$ 는 Poisson의 비이다.

특이점문제 적용을 위한 복소수함수  $Q(z)$ ,  $\omega(z)$ 의 구체적 표현으로 England<sup>(11)</sup>는 다음과 같이 제시하였다.

$$Q(z) = Az^\lambda, \quad \omega(z) = Bz^\lambda \quad (10)$$

이때  $A, B$ 는 임의의 복소수 상수이다. 식 (10)의 복소수함수를 식 (9)에 대입하면 특이변위와 응력분포는

$$u_r + iu_\theta = \frac{r^\lambda}{2\mu} e^{-i(1+\lambda)\theta} \{ \kappa A e^{i2\lambda\theta} - \lambda \bar{A} e^{i2\theta} - \bar{B} \}$$

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \lambda r^{\lambda-1} e^{-i(1+\lambda)\theta} \{ A e^{i2\lambda\theta} + (2-\lambda) \bar{A} e^{i2\theta} - \bar{B} \}$$

$$\sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta} = \lambda r^{\lambda-2} e^{-i(1+\lambda)\theta} \{ A e^{i2\lambda\theta} + \lambda \bar{A} e^{i2\theta} + \bar{B} \} \quad (11)$$

이 되고  $\theta = \pm\alpha$ 인 노치양단에서 traction free의 경계 조건

$$\sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta} \Big|_{\theta=\pm\alpha} = 0 \quad (12)$$

식 (12)에 대입하여 non-trivial 해가 얻어진다는 조건으로부터 고유치 관계식을 얻을 수 있다(Appendix A). 고유치관계식의 결과를 요약하면 대칭하중의 경우

$$\sin 2\lambda_n \alpha = -\lambda_n \sin 2\alpha \quad (12-1)$$

가 되고 비대칭(antisymmetric) 하중일 때

$$\sin 2\zeta_n \alpha = \zeta_n \sin 2\alpha \quad (12-2)$$

가 된다. 이 결과는 물론 Lin과 Tong<sup>(12)</sup>의 식과 일치한다. 이 고유치 관계식을 만족하는 특성치  $\lambda_n$ 과  $\zeta_n$ 근의 수는 무수히 많지만 차수관계식 (6)의 특이응력 특성치가 되기 위해  $0 < \lambda_n, \zeta_n < 1$ 의 값을 선택해야 된다. Table 1은 반노치각  $\gamma$ 에 대한  $\lambda_n$ 와  $\zeta_n$ 의 계산 값을 나타내며 크랙인 경우 0.5가 됨을 알 수 있다.

복소수상수  $A$ 를 임의실수  $a$ 와  $a'$ 의 항으로 다음과 같이 놓으면

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (a + ia') \quad (13)$$

Table 1 The singular eigenvalues for various half notch angles

$\gamma$ (deg)	$\lambda_1$	$\zeta_1$
0	0.500	0.500
5	0.500	0.529
15	0.501	0.598
30	0.512	0.731
45	0.545	0.959

특이점 탄성상태를 지배하는 변위 및 응력분포는 다음과 같다.

$$u_r = \frac{r^{\lambda_1}}{2\mu\sqrt{2\pi}} [a\{(\kappa - \lambda_1)\cos(1 - \lambda_1)\theta + \cos(2\lambda_1\alpha - (1 + \lambda_1)\theta) + \lambda_1 \cos(2\alpha - (1 + \lambda_1)\theta)\}]$$

$$+ \frac{r^{\zeta_1}}{2\mu\sqrt{2\pi}} [a'\{(\kappa - \zeta_1)\sin(1 - \zeta_1)\theta - \sin(2\zeta_1\alpha - (1 + \zeta_1)\theta) + \zeta_1 \sin(2\alpha - (1 + \zeta_1)\theta)\}]$$

$$u_\theta = \frac{r^{\lambda_1}}{2\mu\sqrt{2\pi}} [a\{-(\kappa + \lambda_1)\sin(1 - \lambda_1)\theta + \sin(2\lambda_1\alpha - (1 + \lambda_1)\theta) + \lambda_1 \sin(2\alpha - (1 + \lambda_1)\theta)\}]$$

$$+ \frac{r^{\zeta_1}}{2\mu\sqrt{2\pi}} [a'\{(\kappa + \zeta_1)\theta + \cos(2\zeta_1\alpha - (1 + \zeta_1)\theta) - \zeta_1 \cos(2\alpha - (1 + \zeta_1)\theta)\}] \quad (14)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\lambda_1 r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi}} [a\{(3 - \lambda_1)\cos(1 - \lambda_1)\theta + \cos(2\lambda_1\alpha - (1 + \lambda_1)\theta) + \lambda_1 \cos(2\alpha - (1 + \lambda_1)\theta)\}]$$

$$+ \frac{\zeta_1 r^{\zeta_1-1}}{\sqrt{2\pi}} [a'\{(3 - \zeta_1)\sin(1 - \zeta_1)\theta + \zeta_1 \sin(2\alpha - (1 + \zeta_1)\theta) - \sin(2\zeta_1\alpha - (1 + \zeta_1)\theta)\}]$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\lambda_1 r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi}} [a\{(1 - \lambda_1)\sin(1 - \lambda_1)\theta + \lambda_1 \sin(2\alpha - (2\alpha - (1 + \lambda_1)\theta) + \sin(2\lambda_1\alpha - (1 + \lambda_1)\theta)\}]$$

$$+ \frac{\zeta_1 r^{\zeta_1-1}}{\sqrt{2\pi}} [-a'\{(1 - \zeta_1)\cos(1 - \zeta_1)\theta + \zeta_1 \cos(2\alpha - (1 + \zeta_1)\theta) - \cos(2\zeta_1\alpha - (1 + \zeta_1)\theta)\}]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\lambda_1 r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi}} [a\{(1 + \lambda_1)\cos(1 - \lambda_1)\theta - \lambda_1 \cos(2\alpha - (1 + \lambda_1)\theta) - (1 + \lambda_1)\theta - \cos(2\lambda_1\alpha - (1 + \lambda_1)\theta)\}]$$

$$+ \frac{\zeta_1 r^{\zeta_1-1}}{\sqrt{2\pi}} [-a'\{-(1 + \zeta_1)\sin(1 - \zeta_1)\theta + \zeta_1 \sin(2\alpha - (1 + \zeta_1)\theta) - \sin(2\zeta_1\alpha - (1 + \zeta_1)\theta)\}]$$

3.2. 보조함수

식 (14)의 특이탄성해에 대응되는 보조함수( $u^c, \sigma^c$ )를 구하기 위해 다음과 같은 복소수함수를 사용한다.

$$Q(z) = Cz^{-\lambda}, \quad \omega(z) = Dz^{-\lambda} \quad (15)$$

$\lambda$ 는 특이함수의 고유치이고  $C, D$ 는 임의의 복소수 상수이다. 전절 특이함수를 계산하는 방법과 유사하게 식 (15) 복소수 함수를 일반해 식 (9)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_{r^c} + iu_{\theta^c} &= \frac{r^{-\lambda}}{2\mu} e^{-i(1-\lambda)\theta} \{ \kappa \bar{C} e^{-i2\lambda\theta} + \lambda \bar{C} e^{i2\theta} - \bar{D} \} \\ \sigma_{rr^c} + i\sigma_{r\theta^c} &= (-\lambda) r^{-(1+\lambda)} e^{-i(1-\lambda)\theta} \{ C e^{-2i\lambda\theta} \\ &\quad + (2+\lambda) C e^{i2\theta} - \bar{D} \} \\ \sigma_{\theta\theta^c} - i\sigma_{r\theta^c} &= (-\lambda) r^{-(1+\lambda)} e^{-i(1-\lambda)\theta} \{ C e^{-i2\lambda\theta} - \lambda \bar{C} e^{i2\theta} + \bar{D} \} \end{aligned} \quad (16)$$

특이함수와 같은 노치양단에서 traction free 경계조건식

$$\sigma_{\theta\theta^c} - i\sigma_{r\theta^c} \Big|_{\theta=\pm\alpha} = 0 \quad (17)$$

을 적용하면

$$D = (\lambda \bar{C} e^{i2\theta} - C e^{-i2\lambda\theta}) \quad (18)$$

식이 얻어지고 이때 복소수상수  $C$ 를 실수  $c$ 와  $c'$ 의 합으로 다음과 같이 정의하면

$$C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu (c + ic') / (1 + K) \quad (19)$$

Appendix B에서와 같은 보조계의 탄성상태를 얻을 수 있다.

### 3.3. 노치선단 응력확대계수

전절에서 구한 특이탄성해 ( $u_r^c, \sigma_r^c$ )와 보조해 ( $u_r^e, \sigma_r^e$ )를 이용하여 경로적분방정식 (8)의 좌변을 적분하기 위해  $C_e$  상의 적분함수를 극좌표로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_{rr^e} n_r + \sigma_{r\theta^e} n_\theta - \sigma_{r\theta^e} n_r + \sigma_{rr^e} n_\theta) \\ &\quad - \sigma_{r\theta^e} n_\theta u_\theta^e) \epsilon d\theta \end{aligned} \quad (20)$$

특이해 식 (14)과 보조해 Appendix B를 식 (20)에 대입하고 적분을 하면 복잡한 삼각함수들의 적분 계산과정을 통해 두쌍의 임의의 상수  $a, c$ 와  $a', c'$ 의 합으로 다음의 유한의 값으로 나타난다.

$$I = \frac{\lambda_1 a c}{8(1+\kappa)\pi} B_1 + \frac{\zeta_1 a' c'}{2(1+\kappa)\pi} B_2 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= 16\kappa \sin 2\alpha + \left( \frac{8\kappa}{\lambda_1} - 8\lambda_1 - \frac{4}{\lambda_1} \right) \sin 2\lambda_1 \alpha \\ &\quad + 16(1+\kappa)\alpha \cos 2\lambda_1 \alpha + \frac{4 \sin 6\lambda_1 \alpha}{\lambda_1} \\ &\quad + 8 \{ \sin 2\alpha (2\lambda_1 + 1) - \sin 2\alpha (2\lambda_1 - 1) \} \\ &\quad + 4\lambda_1 \{ \sin 2\alpha (2 + \lambda_1) - \sin 2\alpha (2 - \lambda_1) \} \\ B_2 &= \frac{2\kappa - 2\zeta_1^2 - 1}{\zeta_1} \sin 2\zeta_1 \alpha - 4\kappa \sin 2\alpha \\ &\quad + 2\zeta_1 \sin 2\alpha (2 + \zeta_1) + 4(\kappa + 1) \cdot \\ &\quad \alpha \cos 2\zeta_1 \alpha - 2 \sin 2\alpha (1 + 2\zeta_1) + 2 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$(2\zeta_1 - 1) + \zeta_1 \sin 2\alpha (\zeta_1 - 2) + \frac{\sin 6\zeta_1 \alpha}{\zeta_1}$$

특이함수의 상수  $a$ 와  $a'$ 은 모우드-I과 II 형태의 응력확대계수  $K_I$  및  $K_{II}$ 에 대응되는 실수로 응력확대계수 정의에 의해서 다음의 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} r^{1-\lambda_1} \sigma_{\theta\theta^e} \Big|_{\theta=0} = \lambda_1 (1 + \lambda_1 - \lambda_1 \cos 2\alpha \\ &\quad - \cos 2\lambda_1 \alpha) a \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} r^{1-\zeta_1} \sigma_{r\theta^e} \Big|_{\theta=0} = (-\zeta_1) (1 - \zeta_1 \\ &\quad + \zeta_1 \cos 2\alpha - \cos 2\zeta_1 \alpha) a' \end{aligned} \quad (22)$$

## 4. 수치계산 및 분석

### 4.1. 수치적분

노치선단 응력확대계수  $K_I$ 과  $K_{II}$ 를 수치적으로 계산하기 위한 적분식은 식 (8)과 이 좌변을 적분한 식 (21)의 결과로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} I &= \frac{\lambda_1 a c}{8(1+\kappa)\pi} B_1 + \frac{\zeta_1 a' c'}{2(1+\kappa)\pi} B_2 \\ &= - \int_{C_0} (\sigma_{rr} n_r + \sigma_{r\theta} n_\theta + \sigma_{r\theta} n_r - \sigma_{rr} n_\theta \\ &\quad - \sigma_{r\theta} n_\theta u_\theta) ds \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)의 우변은 노치선단에서 멀리 떨어진 임의경로  $C_0$ 에서의 선적분을 나타내고 있다. 수치적분을 위해  $C_0$  상의 보조함수 ( $u_r^e, u_\theta^e, \sigma_{rr}^e, \sigma_{r\theta}^e$ )는 Appendix B의 것을 직접 사용하고 미지의 탄성변위, 응력 ( $u_r, u_\theta, \sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}$ )은 유한요소법의 수치해를 이용한다. 기존의 평면응력 해석을 위한 유한요소법은 어느 것이나 사용될 수 있고 본 연구에서는 가장 간단한 4-절점 4-각형 요소를 포함한 CHILES<sup>12)</sup>에 수치적분 프로그램을 첨가시켰다. CHILES는 변위법을 이용한 프로그램으로 원래 2차원선형 크랙문제를 위한 것이다. 크랙선단 근처에서  $r^{-0.5}$  형태의 특이응력에 해당되는 특수 변위 형상함수가 포함되었다. 이 특이요소는 제거되고 재래식 유한요소 프로그램에 보조함수 ( $u_r^e, u_\theta^e, \sigma_{rr}^e, \sigma_{r\theta}^e$ )를 첨가해서 임의 선결경로를 따라서 수치적분하였다. 적분경로가 편의상 요소의 경계를 따라 선택되었기 때문에 유한요소의 해, 변위는 절점변위 값을 그대로 이용할 수 있지만 응력은 Fig. 2에서 보는 바와 같이 절점을 인접한 각 요소들의 도심적 산출평균치를 해당 절점에서의 응력값으로 대체시켰다. 각 절점에서 변위와 응력이 결정된 후 적분경로를 따라 절점간 선형보간(linear interpolation)시키고 선수치적분점(integration points)의 값을 구하였다. 수치적분은 2-point Gaussian Quadrature Rule을 사용하였으며 각 요소에

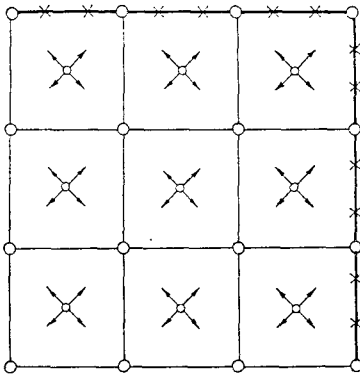


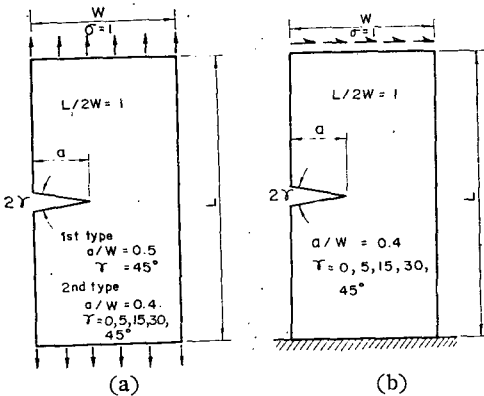
Fig. 2 The method to obtain the node stress

대한 적분치는 선택경로  $C_0$ 에 따라 누적합하여져서 식 (23) 좌변의 응력확대 계수가 계산되었다.

4.2. 모형문제의 응력확대계수 계산

첫번째 예제는 대칭의 인장하중하에 있는 V-노치 평판의 문제이고 두번째는 끝단에서 전단력을 받는 혼합모우드 형태의 외팔보의 문제로 Fig. 3(a), (b)에 각각 도시되어 있다. 재료상수는 두 문제 공히  $E=1.0$  psi,  $\nu=0.3$ 의 값을 사용하였다.

인장하중의 첫번째 예제는 노치각( $2\gamma$ )과 노치깊이/폭( $a/W$ )의 비를 달리한 두가지 형태의 문제로 나누어 해석하였다.  $\gamma=45^\circ$ 와  $a/W=0.5$ 인 경우 Fig. 4(a), (b), (c), (d)에 도시한 것과 같이 4가지 다른 유한요소분할을 고려하였고 각각 모형의 경우 A, B, C의 세가지 외곽적분경로를 선택하였다. Fig. 4(a), (b)의 유한요소모형은 요소수가 각각 94와 130개로 요소분



(a) A symmetric mode type of plate extension  
(b) A mixed mode type of cantilever with end shear

Fig. 3 Numerical example problems

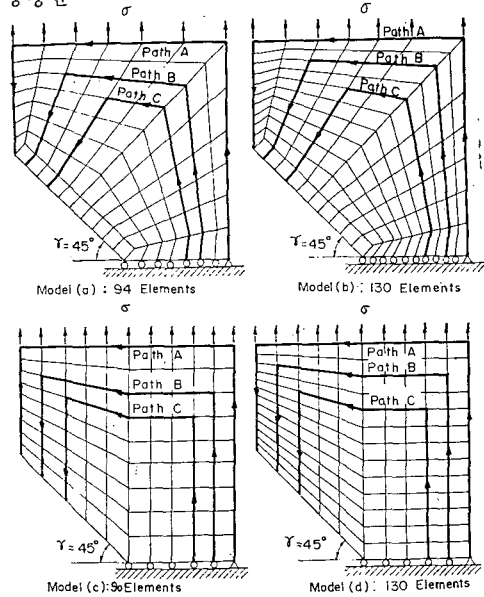


Fig. 4 Element division for the 1st type of example problem(a)

할 방법에 있어서 노치면에 직각인 요소 10개로 등분할한 것이고 Fig. 4(c), (d)는 요소수가 각각 90, 130개로 노치면의 요소를 경사지게 5개로 분할한 것이다. Table 2에 각각 네모형에 대한 무차원화한  $K_I$ 의 계산결과가 Lin의 FEM 결과<sup>(12)</sup>와 비교되어 나타나 있다. 우선 각 모형의 경우 최외곽경로 A로 접근함에 따라 FEM의 해에 수렴함을 알 수 있다. 특히 모형 (b), (d)에서 경로 A와의 차이는 3.5%미만을 경로 C에 대해서는 5.8% 미만을 나타내어 노치선단에서 멀어질수록 특이변위, 응력장의 영향이 줄어든다는 이론적 근거를 설명하고 있다. 또한 요소수의 영향에서는 모형 (b), (d)(130개)가 모형 (a), (c)(94, 90개)의 계산결과보다 정확한 값을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

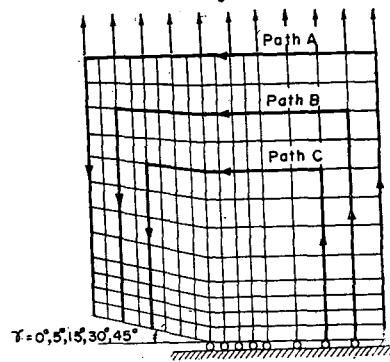


Fig. 5 Element division for the 2nd type of example problem (a)

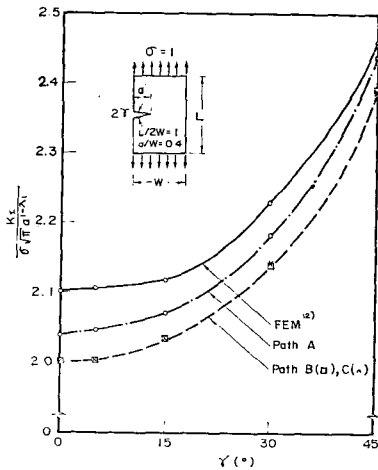
**Table 2** The non-dimensionalized stress intensity factors of the 1st type of problem(a)

Model	Path	$K_I / \sigma \sqrt{\pi a^{1-\lambda_1}}$	$K_I^{(12)} / \sqrt{\pi a^{1-\lambda_1}}$
a	A	3.195	3.318
	B	3.132	
	C	3.125	
b	A	3.202	
	B	3.148	
	C	3.147	
c	A	3.177	
	B	3.098	
	C	3.098	
d	A	3.206	
	B	3.125	
	C	3.126	

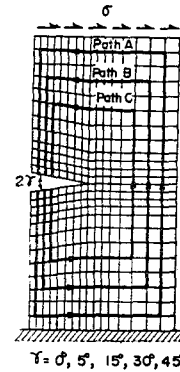
즉 요소수가 증가하면 좀더 정확한 유한요소 근사해를 얻을 수 있고 Quadrature 사용시 오차를 줄일 수 있기 때문이다.

첫번째 예제의  $\gamma=0, 5, 15, 30, 45^\circ$  와  $a/W=0.4$  의 경우 Fig. 5에 도시한 바와 같이 192 요소수의 모형을 노치각을 달리하여 분할한 후 역시 세외곽경로 A, B, C에 대해서 계산하였다. Fig. 6에 나타난 경로 A에 대한 결과와 FEM의 해<sup>(12)</sup>를 비교하면  $\gamma=0, 15, 45^\circ$ 에 대해서 각각 3, 2, 0.97%, 차이가 나타나 응력의 특이성이 높을수록 오차가 증가함을 알 수 있었다.

혼합모우드 형태의 두번째 예제는 Fig. 7에서와 같



**Fig. 6** Convergence of the non-dimensionalized stress intensity factors for various integral contour



**Fig. 7** Element division for the example problem (b)

**Table 3** The non-dimensionalized stress intensity factors of the 2nd type of problem (a)

$\gamma$ (deg)	Path	$K_I / \sigma \sqrt{\pi a^{1-\lambda_1}}$	$K_I^{(12)} / \sigma \sqrt{\pi a^{1-\lambda_1}}$
45	A	2.439	2.463
	B	2.395	
	C	2.389	
30	A	2.183	2.229
	B	2.144	
	C	2.147	
15	A	2.073	2.117
	B	2.034	
	C	2.034	
5	A	2.046	2.106
	B	2.008	
	C	2.007	
0	A	2.040	2.104
	B	2.002	
	C	2.001	

이 비대칭성을 고려하여 요소 384개로 전평판을 분할하였다. 세경로 A, B, C에 대한 응력확대계수,  $K_I$  과  $K_{II}$ 의 계산결과가 Table 3에 나타나 있고 Fig. 8에는 경로 A에 대한 결과가 도시되었다. 노치각 변화에 따른 결과와 비교할 기준의 해는 없으나  $\gamma=0^\circ$ 인 크랙의 경우 CHILES<sup>(13)</sup>의 해와 경로 A에 대한 계산치와 비교하면  $K_I$ 의 경우 3%미만이고  $K_{II}$ 에 대해서 13%의 오차가 나타남을 알 수 있다. 경로적분법의 우변을 Quadrature Rule 사용시 적분합수가 FEM의 변위, 응력 근사해 사용에 다른 오차와 비대칭 전

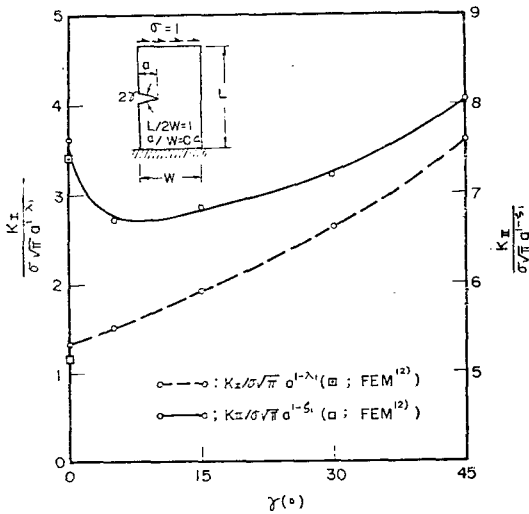


Fig. 8 The non-dimensionalized stress intensity factors of mixed mode

평판수치 선적분에서 누적된 오차의 결과로 간주된다.

### 5. 결 론

경로적분법이 응용을 위한 2차원탄성 특이해와 보조해를 규정하였으며 이들 특성해를 재래식 유한요소법과 결합하여 크랙을 포함한 예리한 입의 노치내각을 가진  $\gamma$  형태의 탄성특이 응력장의 응력확대계수  $K_I$  과  $K_{II}$  를 계산하였다. 경로적분식 구성특성에 나타나듯이 특이 점으로부터 멀리 떨어진 외곽경로를 선택함에 따라서 수치해의 결과가 기존의 해에 1%미만(45°노치각, 최외곽경로)으로 수렴함을 알 수 있었다. 응력의 특이성의 증가 즉, 노치각 감소에 따른 오차 증가의 현상은 특이탄성장의 영향이 유한의 평판에 지배적으로 나타나기 때문이다. 혼합 모우드의 경우 다른 수치해법과 달리 독립적으로  $K_I$  과  $K_{II}$  를 계산할 수 있어서 모우드에 해당하는 응력확대 계수를 구분할 수 있었다. 수치해의 오차는 수치적분 수행상의 오차와 적분함수에 포함되는 FEM 근사해, 특히 절점응력을 보물절점 범위에서 산술평균치의 값 이용에 따른 오차의 누적임을 알 수 있었다. 끝으로 본 연구의 연속으로 원통형 구조물의 기저, 90° 고정-자유단의 reentrant corner 특이점의 탄성응력해석과 섬유강화 복합재를 모형화한 비등방성 탄성응력 해석의 문제를 제시할 수 있다.

### 참 고 문 헌

- (1) Rice, J.R., "A Path-Independent Integral and Approximate Analysis of Strain Concentrations by Notches and Cracks", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 35, pp. 379~386, 1968
- (2) Rice, J.R., "Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture", Fracture Vol. II, ed., Liebowitz, H., Academic Press, New York, pp. 191~311, 1968
- (3) Irwin, G.R., Fracture, In Handbuch der Physik, Springer-Verlag, Berlin, Vol. 6, pp. 551, 1958
- (4) Stern, M., "A Boundary Integral Representation for Stress Intensity Factors", Recent Advances in Engineering Science Part II of Proc., of 10th Anniversary Meeting of SES, Raleigh, N.C., Vol. 9, pp. 125~132, 1975
- (5) Stern, M., Becker, E.B., and Dunham, R.S., "A Contour Integral Computation of Mixed-Mode Stress Intensity Factors", Int. Journal of Fracture, Vol. 12, No. 3, pp. 359~368, 1976
- (6) Hong, C.C., and Stern, M., "The Computation of Stress Intensity Factors in Dissimilar Materials", Journal of Elasticity, Vol. 8, No. 1, pp. 21~34, 1978
- (7) Soni, M.L., and Stern, M., "On the Computation of Stress Intensity Factors in Fiber Composite Media using a Contour Integral Method", Int. Journal of Fracture, Vol. 12, pp. 331~344, 1976
- (8) Paris, P.C., and Sih, G.C., "Stress Analysis of Cracks", In Fracture Toughness Testing and its Applications, ASTM, Spec. Tech. Publ. 381, pp. 30, 1965
- (9) Sih, G.C., and Liebowitz, H., Mathematical Theories of Brittle Fracture, ed. Libowitz, H., Academic Press, Vol. 2, Chapter 2, 1968
- (10) Green, A.E., and Zerna, W., Theoretical Elasticity, 2nd ed. Oxford University Press, pp. 254, 1968
- (11) England, A.H., "On Stress Singularities in Linear Elasticity", Int. Journal of Engineering Science, Vol. 9, pp. 571~585, 1971
- (12) Lin, K.Y., and Tong, P., "Singular Finite

Elements for the Fracture Analysis of V-notched Plate", Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, pp.1343~1354, 1980

(13) Benzley, S.E., CHILES, A Finite Element Program by Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico, 1973

Appendix A

In terms of the complex variable  $z=x+iy=re^{i\theta}$ , the basic equations of plane elasticity for equilibrium configurations in the absence of body force have solutions with the following representation in terms of complex potentials  $\omega(z)$  and  $\Omega(z)$

$$u_r + iu_\theta = \frac{e^{-i\theta}}{2\mu} [\kappa\Omega(z) - z\Omega'(\bar{z}) - \bar{\omega}(\bar{z})]$$

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \Omega'(z) + \Omega'(\bar{z}) - \bar{z}\Omega''(\bar{z}) - \frac{\bar{z}}{z}\bar{\omega}'(\bar{z}) \quad (A1)$$

$$\sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta} = \Omega'(z) + \Omega'(z) + \bar{z}\Omega''(\bar{z}) + \frac{\bar{z}}{z}\bar{\omega}'(\bar{z})$$

We seek nontrivial potentials of the form

$$\Omega(z) = Az^\lambda \quad \omega(z) = Bz^\lambda \quad (A2)$$

Writing  $z$  in polar coordinate form and substituting (A2) into (A1) yields the formulas

$$u_r + iu_\theta = \frac{r^\lambda}{2\mu} e^{-i(1+\lambda)\theta} \{ \kappa A e^{i2\lambda\theta} - \lambda \bar{A} e^{i2\theta} - \bar{B} \}$$

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \lambda r^{\lambda-1} e^{-i(1+\lambda)\theta} \{ \kappa A e^{i2\lambda\theta} + (2-\lambda) \bar{A} e^{i2\theta} - \bar{B} \}$$

$$\sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta} = \lambda r^{\lambda-1} e^{-i(1+\lambda)\theta} \{ A e^{i2\lambda\theta} + \bar{B} \} \quad (A3)$$

At the notch faces, the traction is free

$$\sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta} |_{\theta=\pm\alpha} = 0 \quad (A4)$$

By substitution of (A3) into (A4), the following relation is obtained.

$$A e^{i2\lambda\alpha} + \lambda \bar{A} e^{i2\alpha} + \bar{B} = 0$$

$$A e^{-i2\lambda\alpha} + \lambda A \bar{a}^{-i2\alpha} + \bar{B} = 0 \quad (A5)$$

We set

$$A = Re(A) + i Im(A)$$

$$B = Re(B) + i Im(B) \quad (A6)$$

The following relation results from (A5) and (A6)

$$(\cos 2\lambda\alpha + \lambda \cos 2\alpha) Re(A) + (\lambda \sin 2\lambda\alpha) Im(A) + Re(B) = 0$$

$$(\sin 2\lambda\alpha + \lambda \sin 2\alpha) Re(A) + (\cos 2\lambda\alpha - \lambda \cos 2\alpha) Im(A) - Im(B) = 0$$

$$(\cos 2\lambda\alpha + \lambda \cos 2\alpha) Re(A) + (\sin 2\lambda\alpha - \lambda \sin 2\alpha) Im(A) + Re(B) = 0$$

$$-(\sin 2\lambda\alpha + \lambda \sin 2\alpha) Re(A) + (\cos 2\lambda\alpha - \lambda \cos 2\alpha)$$

$$Im(B) = 0 \quad (A7)$$

We transform Eq (A7) into matrix form.

$$\begin{bmatrix} (\cos 2\lambda\alpha + \lambda \cos 2\alpha)(\lambda \sin 2\alpha - \sin 2\lambda\alpha) & 1 & 0 \\ (\sin 2\lambda\alpha + \lambda \sin 2\alpha)(\cos 2\lambda\alpha - \lambda \cos 2\alpha) & 0 & -1 \\ (\cos 2\lambda\alpha + \lambda \cos 2\alpha)(\sin 2\lambda\alpha - \lambda \sin 2\alpha) & 1 & 0 \\ -(\sin 2\lambda\alpha + \lambda \sin 2\alpha)(\cos 2\lambda\alpha - \lambda \cos 2\alpha) & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Re A \\ Im A \\ Re B \\ Im B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A 8)$$

If the nontrivial solution exists, the determinant of matrix is zero

$$\begin{vmatrix} (\cos 2\lambda\alpha + \lambda \cos 2\alpha)(\lambda \sin 2\alpha - \sin 2\lambda\alpha) & 1 & 0 \\ (\sin 2\lambda\alpha + \lambda \sin 2\alpha)(\cos 2\lambda\alpha - \lambda \cos 2\alpha) & 0 & -1 \\ (\cos 2\lambda\alpha + \lambda \cos 2\alpha)(\sin 2\lambda\alpha - \lambda \sin 2\alpha) & 1 & 0 \\ -(\sin 2\lambda\alpha + \lambda \sin 2\alpha)(\cos 2\lambda\alpha - \lambda \cos 2\alpha) & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

After manipulating the above equation, we will get the following characteristic equation.

$$(\sin 2\lambda\alpha + \lambda \sin 2\alpha)(\sin 2\lambda\alpha - \lambda \sin 2\alpha) = 0$$

Therefore

$$\sin 2\lambda\alpha = -\lambda \sin 2\alpha \text{ for symmetric loading}$$

$$\sin 2\lambda\alpha = \lambda \sin 2\alpha \text{ for antisymmetric loading}$$

Appendix B

The corresponding complementary solutions are as follows:

$$u_r^c = \frac{r^{-\lambda_1}}{\sqrt{2\pi}} [c \{ (\kappa + \lambda_1) \cos(1 + \lambda_1)\theta + \cos(2\lambda_1 \alpha + (1 - \lambda_1)\theta) - \lambda_1 \cos(2\alpha - (1 - \lambda_1)\theta) \}]$$

$$+ \frac{r^{\zeta_1}}{\sqrt{2\pi}} [c' \{ (\kappa - \zeta_1) \sin(1 + \zeta_1)\theta + \sin(2\zeta_1 \alpha + (1 - \zeta_1)\theta) - \zeta_1 \sin(2\alpha - (1 - \zeta_1)\theta) \}]$$

$$u_\theta^c = \frac{r^{-\lambda_1}}{\sqrt{2\pi}} [c \{ -\kappa - \lambda_1 \} \sin(1 + \lambda_1)\theta - \sin(2\lambda_1 \alpha + (1 - \lambda_1)\theta) - \lambda_1 \sin(2\alpha - (1 - \lambda_1)\theta) \}]$$

$$+ \frac{r^{\zeta_1}}{\sqrt{2\pi}} [c' \{ (\kappa - \zeta_1) \cos(1 + \zeta_1)\theta + \cos(2\zeta_1 \alpha + (1 - \zeta_1)\theta) + (1 - \zeta_1)\theta + \zeta_1 \cos(2\alpha - (1 - \zeta_1)\theta) \}]$$

$$\sigma_{rr}^c = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu}{1 + \kappa} (-\lambda_1) r^{-(1+\lambda_1)} [c \{ (3 + \lambda_1) \cos(1 + \lambda_1)\theta + \cos(2\lambda_1 \alpha + (1 - \lambda_1)\theta) - \lambda_1 \cos(2\alpha - (1 - \lambda_1)\theta) \}]$$

$$+ \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu}{1 + \kappa} (-\zeta_1) r^{-(1+\zeta_1)} [c' \{ (3 + \zeta_1) \sin(1 + \zeta_1)\theta$$



$$\begin{aligned} & -\zeta_1 \sin(2\alpha - (1 - \zeta_1)\theta) + \sin(2\zeta_1 \alpha + (1 - \zeta_1)\theta)] \\ \sigma_{r\theta}^c = & \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}\mu}}{1+\kappa} (-\lambda_1) r^{-(1+\lambda_1)} [c \{(1 - \lambda_1) \sin(1 + \lambda_1)\theta} \\ & - \lambda_1 \sin(2\alpha - (1 - \lambda_1)\theta) - \sin(2\lambda_1 \alpha + (1 - \lambda_1)\theta)] \\ & + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}\mu}}{1+\kappa} (-\zeta_1) r^{-(1+\zeta_1)} [-c' \{(1 + \zeta_1) \cos(1 + \zeta_1)\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\zeta_1 \cos(2\alpha - (1 - \zeta_1)\theta) - \cos(2\zeta_1 \alpha + (1 - \zeta_1)\theta)] \\ \sigma_{\theta\theta}^c = & \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}\mu}}{1+\kappa} (-\lambda_1) r^{-(1+\lambda_1)} [c \{(1 - \lambda_1) \cos(1 + \lambda_1)\theta} \\ & + \lambda_1 \cos(2\alpha - (1 - \lambda_1)\theta) - \cos(2\lambda_1 \alpha + (1 - \lambda_1)\theta)] \\ & + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}\mu}}{1+\kappa} (-\zeta_1) r^{-(1+\zeta_1)} [-c' \{-(1 - \zeta_1) \sin(1 + \zeta_1)\theta} \\ & - \zeta_1 \sin(\alpha - (1 - \zeta_1)\theta) + \sin(2\zeta_1 \alpha + (1 - \zeta_1)\theta)] \end{aligned}$$