大韓機械學會論文集 第8卷 第6號, pp. 599～603, 1984.

<論 文>

비균질체의 역학적 및 열적 거동에 관한 기초해석

박 진 무*

(1984년 10월 4일 접수)

Fundamental Analysis for the Thermomechanical Behavior of Heterogeneous Media

Jin Moo Park

Abstract

Field equations describing the effective behavior of general heterogeneous media are derived from the integral balance relations through the methods of distribution and convolution.

1. 서 론

우리는 많은 공학문제에서 서로 다른 물성을 갖는 구성원(constituent)들이 혼합된 비균질체(heterogeneous body)를 접하게 되며, 기체—액체 및 액체—고체의 혼합체, 고체들의 복합체 등의 예에서 보는바와 같이 방대한 연구결과들이 집적되어 있다. 따라서 연속체이론[1,2]의 체계에서 비균질체 일반의 역학적 및 열적 거동해석을 종합 정리하는 기초연구가 요구된다 하겠다. 비균질체에 관한 공학적 연구의 주제는 국소적 비균질성을 포괄하여 좀 더 큰 척도에 걸쳐 나타나는 유효거동(effective behavior)이며, 이에 관한 기초 연구들은 그 방법에 따라 직접평균법[3], 점근해석법[4~7] 및 혼합연속체(continum mixture)이론[8,9]으로 분류할 수 있다.

이 연구에서는 직접평균법의 공간, 시간 및 ensemble 평균방법들 대신 공간변수에 관한 convolution의 일관된 방법을 사용하며, 점근해석법의 범함수해석보다 기초적인 방법으로, 혼합연속체이론의 등가균질체(equivalent homogeneous body)와 같은 추상적 모델 대신 혼합체의 자연적 모델에서 출발한다[10]. 또 참고문헌(11)의 평균방법인 4중적분의 연산대신 convolution과 체적 distribution을 조합하여 비균질체 일반의 유효장 방정식(effective field equation)들을 도출하고 검토한다.

2. 비균질체의 해석적 묘사

2.1. 기본모델

이 연구에서 비균질체는 $\nu(\geq 2)$개의 서로 다른 균질연속체의 혼합체로 규정된다. 그리하여 혼합체의 일부분이 어떤 영역 R을 차지한다면 그의 구성원들은 각기 R의 부분영역(subregion) $R_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,\nu)$들을 점유하게 된다. 우리는 이들 부분 영역들이 연속체 이론의 적용에 적합할만한 크기와 모양을 갖는다고 가정하며, 그곳에 각 구성원의 역학적 및 열적거동을 표현하는 밀도 ρ, 속도 $\underset{\sim}{v}$, 내부에너지밀도 e, 비엔트로피 η,

*정회원, 고려대학교 공과대학 기계공학과

등의 장(field)들을 부여한다.

구성원들 사이의 경계영역에서는, 물질은 보통 주변의 구성원들과 다른 거동을 보이는데, 이들 경계층 효과를 반영하기 위하여 우리는 이 영역을 기하학적 면 S로 이상화하고 ρ_s, $\underset{\sim}{v}_s$, e_s, η_s 등의 표면장(surface field)들을 부여한다. 일반적으로 구성원들 사이에는 화학 및 물리적 상호작용으로 인한 물질전달이 있으므로 경계면 S는 물질면(material surface)이 아니고 따라서 주변 구성원들과 다른 속도를 갖는다.

2.2. 체적 Distribution

구성원 C_a가 찾이하는 영역 R_a를 해석적으로 명시하기 위하여, 아래와 같이 정의되는 함수 φ_a를 사용한다.

$$\varphi_a(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}1, & \underset{\sim}{x}\in R_a\\ 0, & \underset{\sim}{x}\notin R_a\end{cases} \tag{1}$$

φ_a를 보통함수로 규정하면 $\underset{\sim}{\nabla}\varphi_a$는 ∂R_a에서 정의되지 않으므로, 이를 극복하기 위하여 우리는 φ_a를 distribution으로 확대 정의하고 $\underset{\sim}{\nabla}\varphi_a$를 시험함수(test function)에의 작용으로부터 결정한다[12]. 즉, $\psi(\underset{\sim}{x})$를 시험함수라 하면,

$$\int_E \underset{\sim}{\nabla}\varphi_a\psi dv=-\int_E\varphi_a\underset{\sim}{\nabla}\psi dv=-\int_{R_a}\underset{\sim}{\nabla}\psi dv=-\int_{\partial R_a}\psi\underset{\sim}{n}da \tag{2}$$

그러므로

$$\underset{\sim}{\nabla}\varphi_a=-\delta_{\partial R_a}\underset{\sim}{n}$$

이며, 여기서 E는 3차원 Euclid공간을, δ_S는 S면 위의 Dirac δ-distribution을 각각 표시한다.

체적 distribution은 또한 시간의 함수이며, $\dfrac{\partial\varphi_a}{\partial t}$는 아래와 같이 얻어진다.

$$\int_E\frac{\partial}{\partial t}\varphi_a(x,t)\psi(x)dv=\frac{d}{dt}\int_{R_a}\psi(x)dv$$
$$=\int_{\partial R_a}\psi v\cdot nda=\int_E\delta_{\partial R_a}n\cdot v\psi dv \tag{4}$$

그러므로

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial t}=\delta_{\partial R_a}\underset{\sim}{n}\cdot v=-\underset{\sim}{\nabla}\varphi_a\cdot v \tag{5}$$

2.3. 균형방정식

비균질체의 한 부분이 영역 R을 점유할 때 구성원 C_a의 질량균형은 다음 식으로 표현된다.

$$\frac{d}{dt}\int_R\varphi_a\rho_a dv=\frac{D}{Dt}\int_{R_a}\rho_a dv-\int_{S\cap\partial R_a}\rho_a{}^i(\underset{\sim}{v}_a{}^i-\underset{\sim}{v}_s)\cdot\underset{\sim}{n}da \tag{6}$$

여기서 기호 "$\dfrac{D}{Dt}$"는 물질도함수(material derivative)연산을 표시하며, 상첨자 "i"의 의미는 다음 식으로 규정된다.

$$\psi_a{}^i(\underset{\sim}{x})\equiv\lim_{\substack{\underset{\sim}{x}_a\to\underset{\sim}{x}\in S\\ \underset{\sim}{x}_a\in C_a}}\psi_a(\underset{\sim}{x}_a) \tag{7}$$

질량 보존 원리에 의하여 식 (6)은 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{d}{dt}\int_R\varphi_a\rho_a dv=-\int_{S\cap\partial R_a}\rho_a{}^i(\underset{\sim}{v}_a{}^i-\underset{\sim}{v}_s)\cdot\underset{\sim}{n}da \tag{8}$$

위 식은 C_a질량의 변화율과 구성원 상호간의 질량유동이 균형을 이루는 것을 구체적으로 나타낸다.

같은 방법으로, C_a의 운동량 균형식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d}{dt}\int_R\varphi_a\rho_a\underset{\sim}{v}_a dv=\int_{\partial R}\varphi_a\underset{\sim}{t}_a da+\int_R\varphi_a\rho_a\underset{\sim}{b}dv$$
$$+\int_{S\cap\partial R_a}\underset{\sim}{t}_a{}^i da-\int_{S\cap\partial R_a}\rho_a{}^i\underset{\sim}{v}_a{}^i(\underset{\sim}{v}_a{}^i-\underset{\sim}{v}_s)\cdot nda \tag{9}$$

위 식에서 $\underset{\sim}{t}_a$는 C_a에 작용하는 표면력이고 $\underset{\sim}{b}$는 물체력이며, 마지막 항은 질량유동에 수반된 운동량이다.

임의점 x_0을 기준한 각 운동량의 균형식은

$$\frac{d}{dt}\int_R(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}_0)\times\rho_a\varphi_a\underset{\sim}{v}_a dv=\int_R(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}_0)\times\rho_a\varphi_a\underset{\sim}{b}dv$$
$$+\int_{\partial R}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}_0)\times\varphi_a\underset{\sim}{t}_a da+\int_{S\cap\partial R_a}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}_0)\times\underset{\sim}{t}_a{}^i da$$
$$-\int_{S\cap\partial R_a}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}_0)\times\rho_a{}^i\underset{\sim}{v}_a{}^i(\underset{\sim}{v}_a{}^i-\underset{\sim}{v}_s)\cdot\underset{\sim}{n}da \tag{10}$$

구성원 C_a의 에너지 균형방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}\int_R\varphi_a\rho_a\left(e_a+\frac{1}{2}\underset{\sim}{v}_a\cdot\underset{\sim}{v}_a\right)dv=\int_R\varphi_a\rho_a(r_a+\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{v}_a)$$
$$+\int_{\partial R}\varphi_a(h_a+\underset{\sim}{t}_a\cdot\underset{\sim}{v}_a)da+\int_{S\cap\partial R_a}(h_a{}^i+\underset{\sim}{t}_a{}^i\cdot\underset{\sim}{v}_a{}^i)da$$
$$-\int_{S\cap\partial R_a}\rho_a{}^i\left(e_a{}^i+\frac{1}{2}\underset{\sim}{v}_a{}^i\cdot\underset{\sim}{v}_a{}^i\right)(\underset{\sim}{v}_a{}^i-\underset{\sim}{v}_s)\cdot\underset{\sim}{n}da \tag{11}$$

위 식에서 r_a와 h_a는 각각 C_a에 대한 단위질량당 및 단위 표면적당 열공급을 표시한다.

끝으로 엔트로피 부등식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}\int_R\varphi_a\rho_a\eta_a dv\geq\int_R\rho_a\rho_a\frac{r_a}{\theta_a}dv+\int_{\partial R}\varphi_a\frac{\underset{\sim}{q}_a}{\theta_a}\cdot\underset{\sim}{n}\,da$$
$$+\int_{S\cap\partial R_a}\left[\frac{h_a{}^i}{\theta_a{}^i}-\rho_a{}^i\eta_a{}^i(\underset{\sim}{v}_a{}^i-\underset{\sim}{v}_s)\cdot\underset{\sim}{n}\right]da \tag{12}$$

위 식에서 θ_a는 C_a의 온도를, $\underset{\sim}{q}_a$는 열 플럭스벡타를 표시한다.

3. 비균질체의 유효거동

3.1. Convolution과 평균정리

연속체의 거동에 관한 장 $u(\underset{\sim}{x},t)$의 평균 $\bar{u}(\underset{\sim}{\xi},t)$는 아래와 같이 convolution을 써서 나타낼 수 있다.

$$\bar{u}(\underset{\sim}{\xi},t)=\int_E u(\underset{\sim}{x},t)k(\underset{\sim}{\xi}-\underset{\sim}{x})dv\equiv u*k \tag{13}$$

여기서 kernel k는 국소적 비균질성을 포괄하는 대표체적(representative volume)위의 비중분포에 해당한다. 즉 반경 r인 구형 영역에 균일한 비중을 주어 평균을 취한다면, kernel $k_1{}^r$은 다음과 같다.

$$k_1{}^r(\underset{\sim}{x})=\begin{cases}\dfrac{3}{4\pi r^3}, & \|\underset{\sim}{x}\|\leq r\\ 0, & \|\underset{\sim}{x}\|>r\end{cases} \tag{14}$$

평균하여 얻은 유효장의 충분한 연속성(smoothness)을 확보하기 위하여 다음과 같이 다시 convolution을 취한다.

$$u^*=\bar{u}*k_2{}^\varepsilon=u*k_1{}^r*k_2{}^\varepsilon \tag{15}$$

여기서

$$k_2{}^\varepsilon=\begin{cases}a_\varepsilon\exp\left[\dfrac{\varepsilon^2}{\|\underset{\sim}{x}\|-\varepsilon^2}\right], & \|\underset{\sim}{x}\|\leq\varepsilon\\ 0, & \|\underset{\sim}{x}\|>\varepsilon\end{cases} \tag{16}$$

이며, ε은 작은 상수, a_ε은 표준화 조건

$$\int_E k_2{}^\varepsilon(\underset{\sim}{x})dv=1 \tag{17}$$

로부터 결정되는 상수이다. 그러므로 충분히 연속적인 유효장 u^*는 원래의 장 u로 부터 다음과 같이 얻어진다.

$$u^*(\underset{\sim}{\xi},t)=\int_E u(\underset{\sim}{x},t)k(\underset{\sim}{\xi}-\underset{\sim}{x})dv=u*k \tag{18}$$

단

$$k(\underset{\sim}{\xi})=\int_E k_1{}^r(\underset{\sim}{x})k_2{}^\varepsilon(\underset{\sim}{\xi}-\underset{\sim}{x})dv=k_1{}^r*k_2{}^\varepsilon \tag{19}$$

참고문헌 (11)에서는 유효장이 시간 및 공간변수에 관한 2 차도함수를 갖도록 하기 위하여 4중적분을 취한다. 즉

$$u^*(\underset{\sim}{\bar{x}},\bar{t})=\iiiint u(\underset{\sim}{x},t)dv_1dv_2dt_1dt_2$$

이와같은 평균연산은 식 (18)의 convolution과 비교하면 불필요하게 복잡한 것으로서 유효장 방정식의 유도를 어렵게 하고 있음이 분명하다. 또 distribution과 convolution의 방법을 사용하면 평균과 미분의 순서를 교환할 수 있으므로[13], 참고문헌 (3)등에서 물리적 의미에 의존하여 묘사되고 있는 평균정리는 다음에 밝히는 바와 같이 획일적 kernel k를 사용한 간단한 연산의 결과가 된다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\xi}}\langle u_a\rangle&\equiv\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{\xi}}\left[\frac{1}{V(R)}\int_E\varphi_a(\underset{\sim}{x},t)u_a(\underset{\sim}{x},t)k(\underset{\sim}{\xi}-\underset{\sim}{x})dv\right.\\&=\frac{1}{V(R)}\int_{\partial R_a}u_a\underset{\sim}{n}da-\frac{1}{V(R)}\int_{S\cap\partial R_a}u_a\underset{\sim}{n}\,da\\&=\left\langle\frac{\partial u_a}{\partial\underset{\sim}{x}}\right\rangle-\frac{1}{V(R)}\int_{S\cap\partial R_a}u_a\,\underset{\sim}{n}\,da\end{aligned} \tag{20}$$

여기서 "< >"는 평균을 표시하며 $V(R)$은 영역 R의 체적이다. 같은 방법으로,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u_a\rangle=\left\langle\frac{\partial u_a}{\partial t}\right\rangle+\frac{1}{V(R)}\int_{S\cap\partial R_a}u_a\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n}\,da \tag{21}$$

3.2. 유효장(Effective Field)

Convolution 변환은 선형연산이므로

$$(au+bv)*k=a(u*k)+b(v*k) \tag{22}$$

(단, a,b는 상수임)

그러나 일반적으로,

$$(uv)*k\neq(u*k)(v*k) \tag{23}$$

그러므로 관련 장들을 어떻게 조합하여 convolution을 취할 것인가 하는 문제가 제기된다. 이 연구에서는 체적, 질량, 운동량, 에너지 및 엔트로피 등의 기본량들의 보존을 기준하여 다음과 같이 유효장들을 정의한다.

체적 distribution의 평균 $\varphi_a{}^*$는 다음과 같이 정의된다.

$$\varphi_a{}^*=\varphi_a*k \tag{24}$$

평균밀도 $\bar{\rho}_a$의 정의는 다음과 같다.

$$\varphi_a{}^*\rho_a=(\varphi_a\rho_a)*k \tag{25}$$

평균속도 $\underset{\sim}{\bar{v}}_a$는

$$\varphi_a{}^*\bar{\rho}_a\underset{\sim}{\bar{v}}_a=(\varphi_a\rho_a\underset{\sim}{v}_a)*k \tag{26}$$

로 정의된다.

평균응력 tensor 및 벡터 $\underset{\sim}{\bar{\sigma}}_a$, $\underset{\sim}{\bar{t}}_a$는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\varphi_a{}^*\underset{\sim}{\bar{\sigma}}_a=(\varphi_a\underset{\sim}{\sigma}_a)*k\\&\underset{\sim}{\bar{t}}_a(\underset{\sim}{n})=\underset{\sim}{\bar{\sigma}}_a\cdot\underset{\sim}{n}\end{aligned} \tag{27}$$

같은 방법으로 내부에너지밀도, 비엔트로피, 열플럭스 벡터(flux vector), 단위질량당 열공급, 및 온도등의 유효장은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}&\varphi_a{}^*\bar{\rho}_a\bar{e}_a=(\varphi_a\rho_ae_a)*k\\&\varphi_a{}^*\bar{\rho}_a\bar{\eta}_a=(\varphi_a\rho_a\eta_a)*k\\&\varphi_a{}^*\underset{\sim}{\bar{\rho}}_a=(\varphi_a\underset{\sim}{q}_a)*k\\&\varphi_a{}^*\bar{\rho}_a\bar{r}_a=(\varphi_a\rho_ar_a)*k\\&\varphi_a{}^*\bar{\rho}_a\bar{\theta}_a=(\varphi_a\rho_a\theta_a)*k\end{aligned} \tag{28}$$

3.3. 유효장방정식

앞절에 정의된 유효장들의 관계를 밝히는 유효장 방정식의 유도에 있어서, 이 연구에서는 식 (16)의 $k_2{}^\varepsilon$과 같은 smoothing kernel을 무시하고 대표 체적 전체에 균일한 비중을 둠으로서 유효장 방정식의 일차적 정립을 시도한다.

질량 균형을 표현하는 식 (8)의 좌변은 식 (24), (25)로부터 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{d}{dt}\int_E \varphi_\alpha(x,t)\rho_\alpha(x,t)k(\xi-x)dv =\int_E\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_\alpha\rho_\alpha)(x,t)k(\xi-x)+\varphi_\alpha(x,t)\rho_\alpha(x,t)\frac{\partial}{\partial \xi}k(\xi-x)\cdot v_\alpha\right\}dv=\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_\alpha\bar{\rho}_\alpha)+\nabla\cdot(\varphi_\alpha{}^*\bar{\rho}_\alpha\bar{v}_\alpha) \tag{29}$$

한편 식 (8)의 우변은 아래와 같이 C_α 구성원으로의 평균 질량공급량 $y_\alpha(\rho_\alpha)$에 해당하게 된다.

$$y_\alpha(\rho_\alpha)\equiv-\int_E \delta_s\rho_\alpha{}^i(v_\alpha{}^i-v_s)\cdot n k(\xi-x)dv =-[\delta_s\rho_\alpha{}^i(v_\alpha{}^i-v_s)\cdot n]*k \tag{30}$$

그러므로 질량 균형에 관한 유효장 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_\alpha{}^*\bar{\rho}_\alpha)+\nabla\cdot(\varphi_\alpha{}^*\bar{\rho}_\alpha\bar{v}_\alpha)=y_\alpha(\rho_\alpha) \tag{31}$$

운동량의 균형식 (9)에서, 표면력 효과는 다음과 같다.

$$\int_{\partial R}\varphi_\alpha t_\alpha da=\int_E\varphi_\alpha(x,t)\sigma_\alpha(x,t)\frac{\partial}{\partial\xi}k(\xi-x)dv =\nabla\cdot(\varphi_\alpha{}^*\bar{\sigma}_\alpha) \tag{32}$$

불연속면 S를 통하여 작용하는 표면력 효과는 다음과 같이 물체력 형식의 F_α로 표시된다.

$$\int_E\delta_s t_\alpha{}^i(x,t)k(\xi-x)dv=(\delta_s t_\alpha{}^i)*k\equiv F_\alpha \tag{33}$$

S면을 통과하는 운동량 플럭스는 다음과 같이 정리된다.

$$[\delta_s\rho_\alpha{}^i v_\alpha{}^i(v_\alpha{}^i-v_s)\cdot n]*k=y_\alpha(\rho_\alpha v_\alpha)+\bar{v}_\alpha y_\alpha(\rho_\alpha) \tag{34}$$

위 식에서 질량 플럭스에 수반되는 운동량 공급의 평균치인 $y_\alpha(\rho_\alpha v_\alpha)$는 다음 식으로 정의된다.

$$y_\alpha(\rho_\alpha v_\alpha)\equiv-[\delta_s\rho_\alpha{}^i(v_\alpha{}^i-\bar{v}_\alpha)(v_\alpha{}^i-v_s)\cdot n]*k \tag{35}$$

식 (9)의 좌변으로부터,

$$\frac{d}{dt}[(\varphi\rho_\alpha v_\alpha)*k]=\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_\alpha{}^*\bar{\rho}_\alpha\bar{v}_\alpha)+\nabla\cdot(\varphi_\alpha{}^*\bar{\rho}_\alpha\bar{v}_\alpha)\bar{v}_\alpha +\varphi_\alpha{}^*\rho_\alpha\nabla\bar{v}_\alpha\cdot\bar{v}_\alpha+\nabla\cdot[\varphi_\alpha{}^*I_\alpha(\rho_\alpha v_\alpha)] \tag{36}$$

위에서 tensor I_α는 평균속도와 실제속도의 차이로 인한 확산운동량 플럭스에 해당하는 것으로서 아래와 같이 정의된다.

$$\varphi_\alpha{}^*I_\alpha(\rho_\alpha v_\alpha)\equiv[\varphi_\alpha\rho_\alpha(v_\alpha-\bar{v}_\alpha)\otimes(v_\alpha-\bar{v}_\alpha)]*k \tag{37}$$

식 (31)~(37)을 종합하면, 운동량 균형의 유효장 방정식은 다음과 같다.

$$\varphi_\alpha{}^*\bar{\rho}_\alpha\left\{\frac{\partial\bar{v}_\alpha}{\partial t}+\nabla\bar{v}_\alpha\cdot\bar{v}_\alpha\right\}=\varphi_\alpha{}^*\bar{\rho}_\alpha b+\nabla\cdot(\varphi_\alpha{}^*\bar{\sigma}_\alpha) +F_\alpha-\nabla\cdot[\varphi_\alpha{}^*I_\alpha(\rho_\alpha v_\alpha)]+y_\alpha(\rho_\alpha v_\alpha) \tag{38}$$

같은 방법으로 각 운동량균형의 유효장 방정식은 임의점 ξ_0에 관하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dt}[(\xi-\xi_0)\times\varphi_\alpha{}^*\bar{\rho}_\alpha\bar{v}_\alpha]=(\xi-\xi_0)\times\varphi_\alpha{}^*\bar{\rho}_\alpha b +\nabla\cdot[(\xi-\xi_0)\times\varphi_\alpha{}^*\bar{\sigma}_\alpha]+(\xi-\xi_0)\times F_\alpha -\nabla\cdot\{(\xi-\xi_0)\times[\varphi_\alpha{}^*I_\alpha(\rho_\alpha v_\alpha)]\} +(\xi-\xi_0)\times[y_\alpha(\rho_\alpha v_\alpha)+\bar{v}_\alpha y_\alpha(\rho_\alpha)] \tag{39}$$

에너지균형식 (11)의 우변을 정리하면 제 1 항은,

$$\{\delta_{\partial R}\varphi_\alpha[h_\alpha(n)+t_\alpha(n)\cdot v_\alpha]\}*k =\nabla\cdot(\varphi_\alpha{}^*\bar{q}_\alpha)+\nabla\cdot(\varphi_\alpha{}^*\bar{\sigma}_\alpha\cdot\bar{v}_\alpha)+\nabla\cdot(\varphi_\alpha{}^*\omega_\alpha) \tag{40}$$

위에서 마지막 항은 확산응력일에 해당하는 것으로 아래와 같다.

$$\nabla\cdot(\varphi_\alpha{}^*\omega_\alpha)\equiv\nabla\cdot\{[\varphi_\alpha\sigma_\alpha(v_\alpha-\bar{v}_\alpha)]*k\} \tag{41}$$

또, 식 (11) 우변의 제 3 항은,

$$\{\delta_s[h_\alpha{}^i(n)+t_\alpha{}^i(n)\cdot v_\alpha{}^i]\}*k=E_\alpha+F_\alpha\cdot\bar{v}_\alpha \tag{42}$$

위에서,

$$E_\alpha\equiv\{\delta_s[h_\alpha{}^i(n)+t_\alpha{}^i(n)\cdot(v_\alpha{}^i-\bar{v}_\alpha)]\}*k \tag{43}$$

는 불연속면 S를 통과하는 에너지 공급에 해당한다.
식 (11)우변의 마지막 항은

$$\left\{\delta_s\left[\rho_\alpha{}^i\left(e_\alpha{}^i+\frac{1}{2}v_\alpha{}^i\cdot v_\alpha{}^i\right)(v_\alpha{}^i-v_s)\cdot n\right]\right\}*k=-y_\alpha\left[\rho_\alpha\left(e_\alpha +\frac{1}{2}v_\alpha\cdot v_\alpha\right)\right]-\bar{v}_\alpha\cdot y_\alpha(\rho_\alpha v_\alpha)-\frac{1}{2}\bar{v}_\alpha\cdot\bar{v}_\alpha y_\alpha(\rho_\alpha) \tag{44}$$

식 (11)의 좌변을 정리하면

$$\frac{d}{dt}\left\{\left[\varphi_\alpha\rho_\alpha\left(e_\alpha+\frac{1}{2}v_\alpha\cdot v_\alpha\right)\right]*k\right\} =\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_\alpha{}^*\bar{\rho}_\alpha\bar{e}_\alpha)+\nabla\cdot(\varphi_\alpha{}^*\bar{\rho}_\alpha\bar{e}_\alpha) +\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\varphi_\alpha{}^*\bar{\rho}_\alpha\bar{v}_\alpha\cdot\bar{v}_\alpha\right\}+\varphi_\alpha{}^*\mathrm{tr}[I_\alpha(\rho_\alpha v_\alpha)] \tag{45}$$

식 (40)~(45)를 종합하고 질량 및 운동량의 유효균형식들 (31) 및 (38)을 적용하면 에너지 균형의 유효장방정식은 아래와 같다.

$$\bar{\rho}_\alpha\varphi_\alpha{}^*\left\{\frac{\partial}{\partial t}e_\alpha+\bar{v}_\alpha\cdot\nabla e_\alpha\right\}+y_\alpha(\rho_\alpha)e_\alpha=\varphi_\alpha{}^*\bar{\rho}_\alpha\bar{r}_\alpha +\nabla\cdot\{\varphi_\alpha{}^*(\bar{q}_\alpha+\omega_\alpha)\}+\varphi_\alpha{}^*\sigma_\alpha:\nabla\bar{v}_\alpha -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_\alpha{}^*\mathrm{tr}I_\alpha(\varphi_\alpha v_\alpha)+\nabla\cdot[\varphi_\alpha{}^*\mathrm{tr}I_\alpha(\rho_\alpha v_\alpha)\bar{v}_\alpha]\right\} -\varphi_\alpha{}^*I(\rho_\alpha v_\alpha):\nabla\bar{v}_\alpha+E_\alpha-\nabla\cdot\left\{\varphi^*I_{\alpha\alpha}\left[\rho_\alpha\left(e_\alpha +\frac{1}{2}v_\alpha\cdot v_\alpha\right)\right]\right\}+y_\alpha\left[\rho_\alpha\left(e_\alpha+\frac{1}{2}v_\alpha\cdot v_\alpha\right)\right] \tag{46}$$

위에서 ":"는 trace 연산자이며, 평균 확산 에너지 플럭스 $I_\alpha\left[\rho_\alpha\left(e_\alpha+\frac{1}{2}v_\alpha\cdot v_\alpha\right)\right]$는 아래와 같다.

$$\varphi_\alpha{}^*I_\alpha\left[\rho_\alpha\left(e_\alpha+\frac{1}{2}v_\alpha\cdot v_\alpha\right)\right]\equiv\left\{\varphi_\alpha\rho_\alpha\left[e_\alpha +\frac{1}{2}(v_\alpha-\bar{v}_\alpha)\cdot(v_\alpha-\bar{v}_\alpha)\right](v_\alpha-\bar{v}_\alpha)\right\}*k \tag{47}$$

위에서 유도된 유효장 방정식들을 혼합연속체이론의 결과[(6)]와 비교하면 상호 대응항들을 식별할 수 있다. 예를 들면 후자에서 "가정"된 에너지의 단위체적당 공

급은 위 식 (46)에 의하면 아래의 5개항으로 세분되어 "유도"되었다.

$$\psi_\alpha \equiv \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\omega}_\alpha + [\delta_s \underset{\sim}{t}_\alpha{}^i(\underset{\sim}{n}) \cdot (\underset{\sim}{v}_\alpha{}^i - \bar{\underset{\sim}{v}}_\alpha)] * k - \mathrm{tr}[\varphi_\alpha{}^* \underset{\sim}{I}_\alpha(\rho_\alpha \underset{\sim}{v}_\alpha) \underset{\sim}{\nabla} \bar{\underset{\sim}{v}}_\alpha]$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_\alpha{}^* \mathrm{tr} I_\alpha(\rho_\alpha \underset{\sim}{v}_\alpha) + \underset{\sim}{\nabla} \cdot [\varphi_\alpha{}^* \underset{\sim}{I}_\alpha(\rho_\alpha \underset{\sim}{v}_\alpha) \underset{\sim}{v}_\alpha]\right\}$$
$$-\underset{\sim}{\nabla} \cdot \left\{\varphi_\alpha{}^* \underset{\sim}{I}_\alpha\left[\rho_\alpha\left(e_\alpha + \frac{1}{2} \underset{\sim}{v}_\alpha \cdot \underset{\sim}{v}_\alpha\right)\right]\right\}$$

따라서 혼합연속체이론의 구성방정식 결정과정에 있어서, 이 연구의 결과가 매우 도움이 될 것이 예상된다.

엔트로피 부등식 (12)를 정리하면 다음과 같다.

$$\varphi_\alpha{}^* \bar{\rho}_\alpha \left[\frac{\partial \bar{\eta}_\alpha}{\partial t} + \bar{\underset{\sim}{v}}_\alpha \cdot \nabla \bar{\eta}_\alpha\right] + y_\alpha(\rho_\alpha) \bar{\eta}_\alpha \geq \underset{\sim}{\nabla} \cdot \left(\varphi_\alpha{}^* \frac{\bar{\underset{\sim}{q}}_\alpha}{\bar{\theta}_\alpha}\right)$$
$$+ \varphi_\alpha{}^* \bar{\rho}_\alpha \frac{\bar{r}_\alpha}{\bar{\theta}_\alpha} + D_\alpha - \underset{\sim}{\nabla} \cdot [\varphi_\alpha{}^* \underset{\sim}{I}_\alpha(\rho_\alpha \eta_\alpha)] + y_\alpha(\rho_\alpha \eta_\alpha) \quad (48)$$

위 식에서

$$D_\alpha \equiv \left[\delta_s \frac{h_\alpha{}^i}{\theta_\alpha{}^i}\right] * k$$
$$y_\alpha(\rho_\alpha \eta_\alpha) \equiv -[\delta_s \rho_\alpha{}^i \eta_\alpha{}^i (\underset{\sim}{v}_\alpha{}^i - \underset{\sim}{v}_s) \cdot \underset{\sim}{n}] * k$$
$$\underset{\sim}{I}_\alpha(\rho_\alpha \eta_\alpha) \equiv \frac{1}{\varphi_\alpha{}^*}[\varphi_\alpha \rho_\alpha \eta (\underset{\sim}{v}_\alpha - \underset{\sim}{v}_\alpha)] * k \quad (49)$$

는 각각 경계면에서의 열전달에 수반되는 엔트로피 공급, 질량유동에 따르는 엔트로피 공급 및 확산 엔트로피 플럭스이다.

4. 검 토

일반적으로 비균질체는 그 구성원들의 상호작용으로 그 국소적 거동이 매우 복잡할뿐 아니라, 그 대표체적에 걸쳐 나타나는 유효거동의 해석에도 그 다양성이 반영된다.

이 연구에서는 구성원 상호간에 에너지 및 질량교환이 일어나는 일반적 모델을 설정하고 전체적 균형원리로부터 유효장 방정식들을 유도하였다. 그 과정에서 체적 distribution을 주요변수로 채택하고 convolution을 취함으로서 직접적으로 유효거동을 추출하였다.

유효장 방정식들을 구체적 문제에 응용하기 위해서는 비균질체의 구성방정식을 정립해야 하는바, 이것은 각 구성원의 특성과 기하학적 구성상태가 관건이 될 것임으로 체적 distribution은 이 단계에서 다시 주요변수가 될 것이 예상된다.

후 기

이 연구는 1983년도 문교부 학술연구 조성비의 지원을 받았으며, 이에 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

(1) C. Truesdell and R.A. Toupin, The Classical Field Theories, Handbuch der Physik, Ⅲ/1, Springer-Verlag, Berlin, 1960

(2) C. Truesdell and W. Noll, The Non-linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik, Ⅲ/3, Springer-Verlag, Berlin, 1965

(3) J.C. Slattery, Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua, McGraw-Hill, New York, 1972

(4) J.B. Keller, Darcy's Law for Flow in Porous Media and the Two-space Method, Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering and Applied Sciences, ed., R.L. Sternberg, Dekker, New York, 1980

(5) R. Burridge and J.B. Keller, Poroelasticity Equations Derived from Microstructure, J. Acoust. Soc. Am. 70(4), pp. 1140～1146, 1981

(6) A. Bensoussan, J.L. Lions, and G.C. Papanicolau, Asymtotic Analysis for Periodic Structures, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 5, North-Holland, Amsterdam, 1978

(7) E. Sanchez-Palencia, Non-homogeneous Media and Vibration Theory, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, New York, 1980

(8) R.J. Atkin and R.E. Craine, Continuum Theories of Mixtures; Basic Theory and Historical Development, Q. Jl. Mech. Appl. Math., Vol. 29, p. 209, 1976

(9) R.J. Atkin and R.E. Craine, Continuum Theories of Mixtures; Applications, J. Inst. Maths. Applics. Vol. 17, p. 205, 1976

(10) D.A. Drew, Averaged Field Equations for Two-phase Media, Studies in Appl. Math., Vol. 50, p. 205, 1971

(11) J.M. Park, A Continuum Theory of Heterogeneous Media, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1983

(12) Y. Choquet-Bruhat, Analysis, Manifolds and Physics, North-Holland, Amsterdam, 1982

(13) S.L. Sobolev, Applications of Functional Analysis, AMS., 1963