

<論 文>

極座標系 有限解析法에 의한 2次元 부채꼴  
캐비티의 層流流動 解析†

裴 柱 贊\* · 姜 信 榮\*\*

(1984年 2月 17日 接授)

Numerical Analysis of Laminar Flows in the Two Dimensional Sector  
Cavity by Finite Analytic Method in Polar Coordinate System

Ju-Chan Bae and Shin-Hyoung Kang

Abstract

The finite analytic method is extended to solve the steady two dimensional Navier-Stokes equation of stream function and vorticity in polar coordinate system. The method is applied to calculate laminar flows in a sector cavity where the motion is induced by the rotation of the outer wall. Numerical solutions are obtained in the range of Reynolds number 0 to 5000 and aspect ratios 0.50, 1.20, 1.60 and 1.92.

The finite analytic method is verified to be accurate and fast convergent at high Reynolds numbers. It is promising as a numerical method of viscous flows and heat transfer. Flows in sector cavities show different flow structures and formation of secondary vortex with aspect ratios and Reynolds numbers in comparison with rectangular cavities.

記 號 說 明

$A$  : 變數( $=\frac{Re\bar{v}}{2}$ )

$A_r$  : 形狀比( $=\frac{2(R_2-R_1)}{\theta_{max}(R_2+R_1)}$ )

$b$  : 半徑比( $=\frac{R_2}{R_1}$ )

$B$  : 變數( $=\frac{Re\bar{v}}{2}$ )

$C_i$  : 식 (10)에서 정의된 係數

$D_i, \bar{D}_i$  : 식 (10)에서 정의된 係數

$E_i, \bar{E}_i$  : 식 (10)에서 정의된 係數

$f$  : 變數, 식 (6)에서 정의

$F_i, \bar{F}_i$  : 식 (10)에서 정의된 係數

$k, h$  : 格子의 크기를 나타내는 變數

$L$  : 特性 길이

$M, N$  :  $r, \theta$  方向의 절점수

$p$  : 靜壓力

$P$  : 全壓力

$(r, \theta)$  : 極座標係

$Re$  : Reynolds 數( $=\frac{2UL}{\nu}$ )

$R_1$  : 內半徑

$R_2$  : 外半徑

$u, v$  : 擬似速度, 식 (2)에서 정의

$u_r, u_\theta$  :  $r, \theta$  方向의 速度成分

$\bar{u}, \bar{v}$  : 格子內의 平均速度

$U$  : 特性速度

$(x, y)$  : 변환된 직교좌표계

$\alpha$  : 壁渦度계산의 이완계수

† 1983년도 大韓機械學會秋季學術大會(11.5)에서 發表

\* 서울大學校 大學院

\*\* 正會員, 서울大學校 機械工學科

- $\beta_\phi, \beta_\zeta$  :  $\phi$  및  $\zeta$  계산의 이완계수
- $\gamma_\phi, \gamma_\zeta$  :  $\phi$  및  $\zeta$  계산의 이완계수
- $\zeta$  : 渦度
- $\theta_{max}$  : 부채꼴 캐비티의 각도
- $\nu$  : 動粘性 係數
- $(\xi, \eta)$  : 格子에서 변화된 좌표계
- $\rho$  : 밀도
- $\psi$  : 流動函數
- $\omega$  : 캐비티 벽의 回轉角速度

1. 序 論

Navier-Stokes 방정식 및 에너지 방정식과 관련된 工學問題를 일반적으로 사용하고 있는 有限差分法(finite difference method)이나 有限要素法(finite element method)으로 數值解析할 때 발생하는 높은 Reynolds 數 및 Peclet 數에서의 數值計算의 不安定性和 不正確性を 改善하기 위하여 여러가지 技法이 개발되고 있다<sup>(1-3)</sup>.

有限解析法(finite analytic method)\*은 이런 目的으로 Chen 을 중심으로 Naseri-Neshat 와<sup>(4)</sup>, Obashih<sup>(5)</sup>, Chang<sup>(6)</sup> 등이 研究開發하고 있는 것으로서 問題領域을 작은 有限解析要素로 나누고 이 要素에 대해 (非線形式은 線形化하여) 局所적으로 解析的 解를 구하여 全體 問題領域으로 확장하는 數值計算方法이며 그 安定性和 正確성은 높은 것으로 알려져 있다<sup>(5,6)</sup>. 그러나 아직까지는 그 展開 技法上 境界形狀이 規則的이고 有限解析要素가 均一하게 분포되며 座標系도 2次元 直角座標系와 軸對稱 圓筒座標系 등의 한정된 경우에 대해서만 적용되고 있다<sup>(5,6)</sup>.

本 研究은 2次元 定常 層流 流動을 지배하는 極座標系로 표시된 Navier-Stokes 방정식을 有限解析法으로 展開하여 極座標系에서의 그 數值計算의 性質을 檢討하고 有限解析法の 適用 座標系 범위를 확장하는 한편, 2次元 부채꼴 캐비티 流動에 응용하여 工學的 解析道具로서의 그 可能性을 確認하고 아직 연구가 불충분한 부채꼴 캐비티 流動을 考察하는데 그 目的이 있다.

2. 極座標系 有限解析法の 展開

2.1. Navier-Stokes 方程式의 變形 및 線形化  
비압축성 Newton 流體의 2次元 定常 層流 流動에

\* "finite analytic method"라는 用語는 Chen 等에 의해 사용되고 있는 것으로서 아직 正立된 用語는 아님.

대한 Navier-Stokes 방정식을 기준길이  $L$  및 기준속도  $U$  로써 無次元化 시키고 無次元 流動函數  $\psi$  와 無次元 渦度  $\zeta$  를 도입하여  $(r, \theta)$ 의 極座標系로 표시한 다음,

$$x = \ln r / \pi, \quad y = \theta / \pi \tag{1}$$

의  $(x, y)$  座標系로 變換시키고, 無次元 半徑方向 速度  $u_r$  및 圓周方向 速度  $u_\theta$  를 각각

$$u = \pi r u_r / 2, \quad v = \pi r u_\theta / 2 \tag{2}$$

와 같이 置換시킨다. 여기서  $u$  와  $v$  를  $r$ -方向 및  $\theta$ -方向의 '擬似速度'라 부르기로 한다. 그리고 Fig. 1 과 같이  $r-\theta$  平面의  $A'B'C'D'$ 에 對應하는  $x-y$  平面의 有限解析要素  $ABCD$  를 생각하고 그 中心點  $P(x_p, y_p)$  를 原點으로 하는 또 하나의  $(\xi, \eta)$  座標系를 設定하여, Navier-Stokes 방정식을 임의의 有限解析要素에 대한  $(\xi, \eta)$  座標系로 표시하면 다음과 같이 된다.

$$u \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + v \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} \right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -\pi^2 e^{2\pi(x_p + i\eta)} \zeta \tag{4}$$

$$u = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v = -\frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \tag{5}$$

여기서  $Re = U(2L)/\nu$  이고 한 有限解析要素에 대해  $-h \leq \xi \leq h, -k \leq \eta \leq k$  이다.

變形된 식 (3)~(5)의 有限解析要素 內에서의 解析的 解를 구하기 위하여 우선 식 (3)을 線形化 시킨다. 식 (3)은 直角座標系에 대한 식과 同一한 형태이므로 그 線形化 과정을 참고문헌 [4~6]의 것과 같다. 그 과정을 요약하면 다음과 같다. 卽 하나의 有限解析要素에

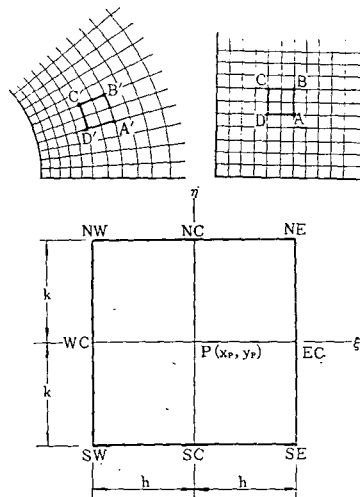


Fig. 1 Coordinate transformation and finite analytic element

대한 擬似速度의 積分平均값  $\bar{u} = \int u ds / ds$ ,  $\bar{v} = \int v ds / ds$  를 도입하여,  $u' = u - \bar{u}$ ,  $v' = v - \bar{v}$  라 하고

$$A = Re\bar{u}/2, B = Re\bar{v}/2,$$

$$f = -Re \left( u' \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + v' \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \quad (6)$$

와 같이  $A, B, f$  를 정의하면 식 (3)을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$2 \left( A \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + B \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} + f \quad (7)$$

여기서  $A$  와  $B$  는 하나의 有限解析要素內에서 一定한 값이며, 만일 要素의 크기가 충분히 작다고 하면  $u'$  와  $v'$  의 값이 작아져서 非線形項  $f$  를 그 要素內에서 無視하거나 또는 일정한 값으로 가정할 수 있게 된다. 非線形形式 (3)을 하나의 작은 有限解析要素內에서 식 (7)과 같이 近似的으로 線形化시키는데, 本 研究에서는  $f$  項을 무시하여 展開한다.

### 2.2. 有限解析要素內에서의 境界條件과 解

有限解析要素에 대한 境界條件을 節點  $NW, NC, NE, WC, EC, SW, SE$  (Fig. 1)에서의  $\phi$  와  $\zeta$  를 사용하여 2次式으로 近似시킨다<sup>(4-6)</sup>. 예를 들면 境界面  $AB$ (Fig. 1)에 대하여

$$\zeta_B(\eta) = \zeta(h, \eta) = a_B + b_B \eta + c_B \eta^2 \quad (8)$$

여기서  $a_B = \zeta_{EC}$ ,  $b_B = (\zeta_{NE} - \zeta_{SE})/2h$ ,  $c_B = (\zeta_{NE} - 2\zeta_{EC} + \zeta_{SE})/2h^2$ 이다. 境界條件을 가정하는 또 하나의 방법으로서 식 (4)로부터  $\phi$  가  $\xi$  의 함수로 표시되는 境界面  $BC$  와  $DA$ , 即  $\phi_S(\xi)$  와  $\phi_N(\xi)$  에 대하여 指數函數를 포함시켜 近似시키는 것을 생각할 수 있다. 即

$$\phi_N(\xi) = \phi(\xi, k) = e^{2\pi i} (a_N' + b_N' \xi + c_N' \xi^2) \quad (9)$$

와 같이 가정하고, 여기서  $a_N' = \phi_{NC}$ ,  $b_N' = (e^{-2\pi h} \phi_{NE} - e^{2\pi h} \phi_{NW})/2h$ ,  $c_N' = (e^{-2\pi h} \phi_{NE} - 2\phi_{NC} + e^{2\pi h} \phi_{NW})/2h^2$  이며,  $\phi_S(\xi)$  에 대해서도 같은 방법으로 표시할 수 있다.

식 (7) 및 (4)의 有限解析要素內에서의 解析的 解는 식 (8) 또는 식 (9)의 境界條件을 사용하여 變數分離法으로 구할 수 있다. 그 구해진 解를 點  $P$ , 即  $\xi = \eta = 0$  에 대하여 展開하면 다음과 같은 形態의 有限解析式이 얻어진다.

$$\zeta_p = \sum_{(i \neq p)}^{(8)} C_i \zeta_i, \quad \phi_p = \sum_{(i \neq p)}^{(8)} D_i \phi_i + \sum_{(i \neq p)}^{(9)} \bar{D}_i \bar{\zeta}_i$$

$$u_p = \sum_{(i \neq p)}^{(8)} E_i \phi_i + \sum_{(i \neq p)}^{(9)} \bar{E}_i \bar{\zeta}_i, \quad v_p = \sum_{(i \neq p)}^{(8)} F_i \phi_i + \sum_{(i \neq p)}^{(9)} \bar{F}_i \bar{\zeta}_i \quad (10)$$

여기서  $i = NW, NC, \dots, P$  의 各 節點을 나타내고,  $C_i, D_i, \dots, \bar{F}_i$  등은 eigenvalue,  $h, k, A, B$  의 함수의 數列의 總으로 표시되는 係數들로서 참고문헌 [7]에 자세히 표시되어 있다.

식 (10)은 한 有限解析要素에서 서로 連綿된 方程式들이다. 또한  $\zeta_p, \phi_p, u_p, v_p$  는  $p$  點 주위의 8개의 節點에서의 名名의 값으로 표시되며 이것을 全體 解析領域에 분포된  $M \times N$  개의 節點에 확장하면 各各  $(M-1) \times (N-1)$  개의 聯立方程式 群이 形成된다.

### 2.3. 有限解析式的 基本檢討

有限解析法的 數值計算의 安定性: Table 1은 식(10)의 係數  $[C_i]$ 를 그 위치대로 표시한 것이다. 여기서  $Ah$  및  $Bk$  의 값은 일정한  $h$  와  $k$  의 값에서의 擴散項에 대한 對流項의 상대적인 크기를 나타낸다. Table 1의 (a)와 (b)에서  $[C_i]$ 가  $SW-NE$  의 대각선에 대해 對稱인 것은 對流項의 영향이  $SW$ 에서  $NE$ 로 進展됨에 기인하고,  $Ah$  및  $Bk$  의 값이 증가함에 따라  $SW$

Table 1 Examples of coefficient ( $C_i$ );  $h=k=0.1$

$Ah=5.0$	$-.4316 \times 10^{-1}$	$.1475 \times 10^{-4}$	$-.3920 \times 10^{-5}$
	$.3249 \times 10^0$		$.1475 \times 10^{-4}$
	$.4365 \times 10^0$	$.3249 \times 10^0$	$-.4316 \times 10^{-1}$

(a)  $Bk=5.0$

$Ah=50.$	$-.3044 \times 10^{-1}$	$.5215 \times 10^{-44}$	$-.2265 \times 10^{-44}$
	$.1042 \times 10^0$		$.5215 \times 10^{-44}$
	$.7807 \times 10^0$	$.1402 \times 10^0$	$-.3044 \times 10^{-1}$

(b)  $Bk=50.$

$Ah=5.0$	$.8144 \times 10^{-1}$	$.1856 \times 10^{-1}$	$-.2656 \times 10^{-2}$
	$.8053 \times 10^0$		$.3656 \times 10^{-4}$
	$.8144 \times 10^{-1}$	$.1856 \times 10^{-1}$	$-.2656 \times 10^{-2}$

(c)  $Bk=10^{-1}$

$Ah=50$	$.1000 \times 10^{-1}$	$.1270 \times 10^{-10}$	$-.2974 \times 10^{-11}$
	$.9867 \times 10^0$		$.3646 \times 10^{-43}$
	$.1000 \times 10^{-1}$	$.1270 \times 10^{-10}$	$-.2974 \times 10^{-11}$

(d)  $Bk=0$

Table 2 Comparison of relative errors by FAM and FDM

Analytic solution	FAM	FDM	Node point
.095005	.095945799 (0.043%)	.095385758 (0.40%)	$r=4.81$ $\Delta r=1.30-1.78$ $\Delta\theta=18^\circ$
2.64131	2.642252098 (0.036%)	2.650119032 (0.033%)	$r=23.1$ $\Delta r=6.24-8.54$ $\Delta\theta=18^\circ$

節點의 節點 P에 대한 寄與度가 높아짐을 볼 수 있다. 또한 (c)와 (d)의  $Bk=0$ 인 경우  $Ah$ 의 값이 클수록, 即 西쪽에서의 對流項의 영향이 증가할수록 WC 節點의 節點 P에 대한 寄與度가 높아짐도 볼 수 있다. 이러한 現象으로 부터 有限解析法에 의한 數值解가 upwind 效果를 자동적으로 맞추어 나가고 傾斜對流 (skew convection)의 效果를 正確하게 처리하는 대단히 安正되고 正確한 數值計算方法임을 알 수 있다.

有限解析式의 正確性: Table 2는  $\psi=a[(e^{2\pi x}-1)/2-\pi x]/(a^2-1)$ ,  $\zeta=-2a(a^2-1)$ 로 주어지는 同心圓筒 사이의 Couette 流動에 대하여  $a=100$ 일 때  $h=k=0.1$ 인 경우를 有限解析法과 有限差分法으로 계산하여 그 正確度를 비교한 것이다. 이때 두 方法의 正確度만을 비교하기 위해서 點  $p$ 를 제외한 주변의 節點에 대한  $\phi$  값과 모든  $\zeta$ 의 값은 참값으로 대입하여  $\phi_p$ 를 계산하였다. 有限解析法에 대해서는 식 (10)을 사용하였고

有限差分法에 대해서는 다음의 2次中央差分式<sup>(3)</sup>을 사용하였다.

$$\phi_p = \frac{1}{4}(\phi_{nc} + \phi_{sc} + \phi_{pc} + \phi_{wc} + h^2\pi^2 e^{2\pi x_p} \zeta_p)$$

Table 2의 計算值로 부터 有限解析法이 有限解析要素가 비교적 큰 경우에도 상당히 正確한 解를 나타내고 有限差分法에 비해서도 그 正確度가 높음을 알 수 있다.

有限解析要素에 대한 境界條件의 영향: Fig. 2는 有限解析要素에서의 境界條件 식 (8)과 식 (9)를 사용하였을 때의 計算結果를 비교 표시한 것이다. 계산 모델은 半徑比가 10이고 Reynolds 數가 10인 同心圓筒 사이의 Couette 流動이며  $\theta_{max}=90^\circ$ 로 하여 半徑方向과 圓周方向의 節點數를  $16 \times 11$ 로 하였다. 그리고 이들 境界條件에 직접 영향을 받는 것은 流動函數  $\phi$ 이므로 두 圓筒의 表面에서의 渦度의 값은 참값으로 대입하여 계산하였다. Fig. 2의 그래프는  $\theta=45^\circ$ 에서의  $\phi$  계산값의 참값에 대한 相對誤差를 百分率로 나타낸 것으로서 (a)는 同一 角速度로 회전할 때, (b)는 바깥 원통이 정지하고 있을 때, (c)는 同一한 速度의 크기로 反對方向으로 회전할 때에 대한 것이다. Fig. 2에서 實線은 식 (8)의 2次式으로 近似시킨 경우에 대한 것이고 點線은 식 (9)의 指數函數를 포함한 식으로 近似시킨 경우에 대한 것으로서, 식 (9)로 近似시킨 것이 일반적으로 다소 精確한 計算結果를 나타내나 그 差異는 流動形態에 따라 僅少할 수도 있음을 볼 수 있다. 실제로 有限解析要素의 크기가 비교적 작으면 이 두 식에 의한 差異는 僅少함을 확인할 수 있었다.

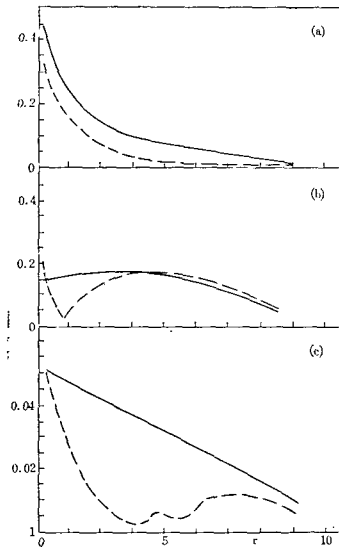


Fig. 2 Effects of imposed boundary conditions on stream function;—eq.8, .....eq. 9.

### 3. 부채꼴 캐비티의 流動解析

#### 3.1. 캐비티 流動의 背景

캐비티(cavity) 流動은 剝離流動의 범주에 속하는 것으로서 圓筒 周圍의 定常剝離流動과 더불어  $Re \rightarrow \infty$ 에서의 剝離流動에 대한 Batchelor(1956)의 理論的 모델<sup>(8,9)</sup>과 Helmholtz-Kirchhoff의 自由流線 理論을 바

탕으로 한 Squire(1934) 및 Kawaguti(1953)의 理論的 모델<sup>(8,9)</sup>의 타당성을 검토하는데 사용되는 대표적인 試驗모델이다. 또한 그 形狀이 단순하여 여러 工學的 모델로서 그 流動 特性을 연구하는데 이용되고 있으며, 粘性의 영향과 非線形 要因인 對流의 效果가 全體 流動 領域에 파급되고, 높은 Reynolds 數에서도 安定된 層流流動을 유지하기 때문에 새로운 數值計算方法의 試驗모델로서도 많이 사용되고 있다.

캐비티 流動에 대해 최초로 體系의인 研究를 시도한 사람은 Burggraf<sup>(10)</sup>인데, 그는 正方形 캐비티의 流動을 有限差分法으로 Reynolds 數 400 까지 계산한 결과 세 개의 渦流(vortex), 即, 하나의 主渦流와 두개의 2次 渦流가 존재함을 발견하였다. Pan 과 Acrivos<sup>(11)</sup>는  $Re = 2,700$  까지의 長方形 캐비티의 流動을 實驗的으로 解析하였고, Nallasamy 와 Prasad<sup>(12)</sup>는 그들이 考案한 數值計算技法을 도입하여 Reynolds 數 30,000 까지의 正方形 캐비티의 流動을 계산한 결과  $Re=30,000$  에서 均一한 渦度를 갖는 단 하나의 渦流가 形成됨을 발견하였다.

또한 부채꼴 形狀의 캐비티 流動에 대해서도 Rotem<sup>(13)</sup>, Sanders<sup>(14)</sup>, O'Brien<sup>(15)</sup> 등이 자기 다른 流動 條件으로 Stokes 流動을 해석하였다. 그러나 Fig. 3과 같은 부채꼴 캐비티(sector cavity)의 流動을 터어빈 및 펌프의 깃 사이의 流動과 핀(fin)붙은 표면 위의 流動과 같이 有限한 再循環流動이 수반되는 工學問題의 모델로서 重要하게 취급될 수 있음에도 이에 대한 연구가 미흡한 실정이며, 유일하게 Ghia 와 Goyal<sup>(16)</sup>의 研究가 있으나 그들은  $Re=800$  까지 有限差分法으로 계산하여 개략적인 流動 傾向을 보였을 뿐이다.

本 研究에서는 앞서 展開한 有限解析法을 부채꼴 캐비티의 流動에 적용하고 일반적인 有限差分法의 計算 限度인 Reynolds 數 500~1,000 이상의 범위까지 계산하여 工學的 解析道具로서의 그 可能性을 검토하고, 아울러 부채꼴 캐비티의 流動特性을 正方形 및 長方形 캐비티의 流動과 比較 考察하였다.

### 3.2. 基本方程式과 境界條件

Fig. 3 (a)의 윗면 AB가 일정한 角速度  $\omega$ 로 회전하는 부채꼴 캐비티를 안쪽 半徑  $R_1$ 으로 無次元化시켜 식 (1)의  $x-y$  平面으로 寫象하면 Fig. 3 (b)와 같이 된다. 여기서  $b=R_2/R_1$ 이다. 이 流動을 지배하는 방정식은 식 (3)~(5)와 같이 變形되고 이때 無次元化에 사용한 기준길이 및 速度는 각각  $R_1$  및  $R_2\omega$ 이다.

Fig. 3 (b)의 境界面에서의 境界條件은 다음과 같다.

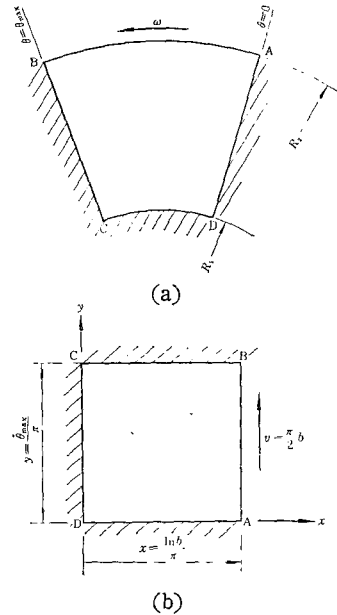


Fig. 3 Sector cavity and coordinate transformation

$$\begin{aligned} \text{境界面 } AB : \phi &= 0, \quad u = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \\ v &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\pi b}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{기타 境界} : \phi = u = v = 0$$

壓력을 계산하기 위하여 無次元化 한  $(r, \theta)$ 座標系의 Navier-Stokes 方程式을 壓力項에 대해 전개하고 식 (1), (2) 및 連續方程式을 이용하여 정리하면 다음의 壓力計算式이 유도된다<sup>(7)</sup>.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2}{Re} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + 2v\zeta, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{2}{Re} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - 2u\zeta \quad (12)$$

여기서  $P$ 는 全壓으로서  $P = p + (u^2 + v^2)/2$ 이고  $p$ 는  $\rho U^2$ 으로 無次元化한 靜壓이다.

### 3.3. 數值計算 方法

실제 계산은 Chen 등의 순서<sup>(5,6)</sup>와 같이 하였다. Gauss-Seidal 方法으로 반복계산하였고, 이완계수(relaxation factor)는 Table 3과 같이  $\phi$ ,  $\zeta$  및  $\zeta_\omega$ 에 대해, 그리고 內部 및 外部 반복계산, 수렴정도 등에 따라 자기 다른 값을 사용하였다. 일반적으로 計算值가 수렴조건에 가까워 질수록 그 값을 조금씩 증가시키고, Reynold 數의 증가에 따라 감소시키며, 內部 반복계산에 대한 값은 外部 반복계산에 대한 값보다 다소 크게 선정하였다.

有限解析要素는  $x-y$  平面에서 均一하게 나누었으며

Table 3 Relaxation factors

$\gamma_\phi$ (internal iteration for $\phi$ )	1.00-1.30
$\beta_\phi$ (external iteration for $\phi$ )	0.80-1.20
$\gamma_\zeta$ (internal iteration for $\zeta$ )	0.65-0.95
$\beta_\zeta$ (external iteration for $\zeta$ )	0.50-0.80
$\alpha$ (iteration for vorticity on the wall)	0.10-0.80

그 크기는壁에 인접한境界層 영향을 고려하여  $1/\sqrt{Re^*}$ 의 크기 以下가 되도록, 그리고 2次渦流를 파악할 수 있도록 하였다. 여기서  $Re^*$ 는  $L=R_2\theta_{max}$ 으로 하여  $Re^*=LU/\nu$ 로 換算한 Reynolds 數이다.

수렴조건은 計算值  $\phi$ 에 대해 内部 반복계산 및 外部 반복계산 共히  $|(\phi^n - \phi^{n-1})/\phi^{n-1}_{max}|_{max} \leq 10^{-4}$ 으로 하였다<sup>(3,17)</sup>.

壁渦度 條件은 Reynolds 數 1,000 까지는 다음의 境界條件 I을, Reynolds 數 1,000 이상은 境界條件 II를, 그리고 比較를 위하여 參考로 境界條件 III을 사용하였다.

[境界條件 I]<sup>(4)</sup> :  $\zeta_w = -(2\phi_{w+1} - 4\phi_w\Delta)/(\pi r\Delta)^2$

[境界條件 II]<sup>(5,6)</sup> :  $\zeta_w = -(V_{w+2} + 4V_{w+1} - 3V_w)/(\pi^2 r^2 \Delta)$

[境界條件 III]<sup>(17)</sup> :  $\zeta_w = -3(\phi_{w+1} - V_w\Delta)/(\pi r\Delta)^2 - \zeta_{w+1}/2$

여기서  $\Delta$ 은 壁에 수직 방향의 格子 크기, 即  $h$  또는  $k$ 를,  $V$ 는 壁에 平行한 방향의 速度成分, 即  $u$ 와  $v$ 를 표시한다.

위에서 境界條件 I은 벽에 인접한 渦도가 均一하다고 가정 한 것이고, 境界條件 II는 인접한 두개 절점에서 속도를 이용한 것이며, 境界條件 III은 벽에서 와도가 線形的으로 변한다고 가정 한 결과이다.

壓력은 식 (12)를 積分하여 구한다. 計算은  $r=1$ 인 바닥면  $CD$ 의  $\theta = \theta_{max}/2$ 인 곳을 基準點으로 하여 數值積分하였다.

4. 結果 및 考察

以上과 같은 방법으로 부채꼴 캐비티의 半徑比  $b=R_2/R_1$ 을 2로 固定시키고 形狀比  $A_r=(R_2-R_1)/[(R_1+R_2)\theta_{max}/2]=0.50, 1.01, 1.20, 1.60$  및  $1.92$ 에 대하여 Reynolds 數를 5,000 까지 변화시키면서 流動函數  $\phi$ , 渦度  $\zeta$ , 半徑方向速度  $u_r$ , 圓周方向速度  $u_\theta$ , 全壓  $P$ , 靜壓  $p$ 를 計算하였다.

本 研究에서 이완계수의 最適値는 찾아 낼 수는 없었

Table 4 Effects of boundary condition on vorticity on the wall

( $A_r=1.6, Re=500, M \times N=31 \times 19$ )

	Boundary condition I	Boundary condition II	Boundary condition III
$\phi_{max}$	.0539856	.542864	.548250
CPU(sec)	282	378	275

지만 일반적으로 流動函數에 대해서는 1 보다 큰 값을, 渦도에 대해서는 1 보다 작은 값을 사용하는 것이 바람직 하다는 것이 알 수 있었다. Table 4는 壁渦度 境界條件에 따른 計算結果로서,  $Re \leq 1,000$ 일 때는 대체로 이와 같이 安定된 解를 구할 수 있었으나,  $Re > 1,000$ 에서 境界條件 I은 계속 진동하였고 境界條件 III은 다소 不安定하게 수렴하였으며 境界條件 II는 비교적 安定하게 수렴하였다.

本 研究에서의 計算結果를 비교하기 위하여  $A_r=1.25, Re=200$  및  $800$ 에 대해 Ghia와 Goyal<sup>(16)</sup>이 有限差分法으로 計算한 結果를 인용하여 Fig. 4에 표시하였다.

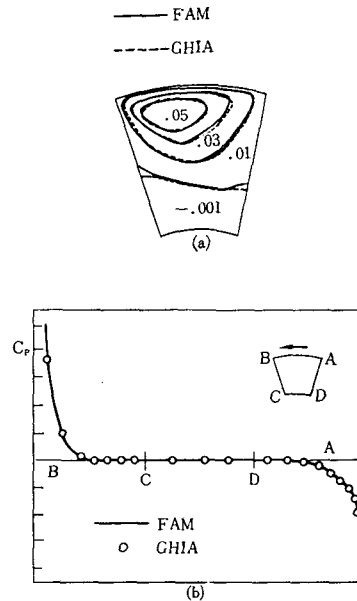


Fig. 4 Stream function and pressure coefficients on surface;  $Re=800, A_r=1.25$

Fig. 5와 6은  $A_r=1.92$ 일 때  $Re \rightarrow 0$ 과 2,000에 대한 流動 形態를 나타낸 것으로 하나의 主渦流와 세계의 2次渦流, 即 하나의 큰 2次渦流와 두개의 작은 2次渦流(corner vortex)가 형성됨을 볼 수 있는데, 이것은 長方形 캐비티의 流動과 同一한 構造이다<sup>(11)</sup>. 그리

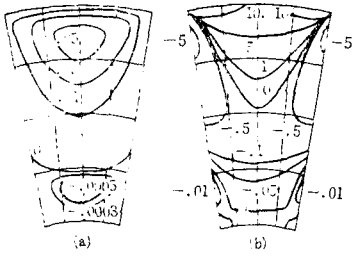


Fig. 5 (a) Stream function and (b) vorticity;  $Re \rightarrow 0.0$ ,  $A_r = 1.92$

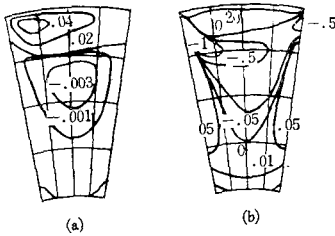


Fig. 6 (a) Stream function and (b) vorticity;  $Re = 2,000$ ,  $A_r = 1.92$

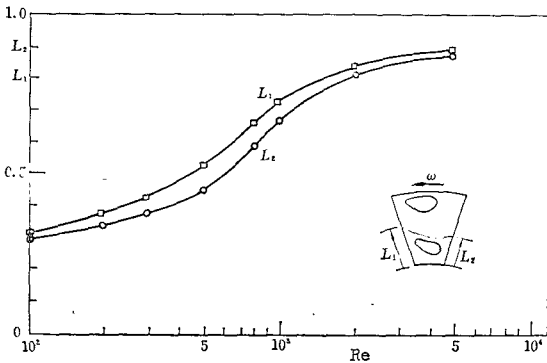


Fig. 7 Growth of secondary vortex;  $A_r = 1.92$

고 Reynolds 數가 작은 경우에는 그 流動이  $\theta = \theta_{max}/2$  處인 中心線에 대해 對稱的이다가 Reynolds 數의 증가에 따라 이 對稱性이 사라지고 큰 2次渦流가 확장되면서 主渦流의 中心이 左上 方向으로 이동함을 볼 수 있다. Fig. 7은 이 큰 2次渦流의 Reynolds 數에 따른 擴張 傾向을 표시한 것이다.  $Re \geq 5,000$  인 범위에서의 流動 構造가 主目되지만 과대한 計算時間의 所要로 本 研究에서는 試行하지 못하였다.

Fig. 8은  $Re=500$  일 때  $A_r=1.60, 1.20$  및  $1.01$  에 대한 流線形態를 나타낸 것인데 形狀비가 클수록 2次

渦流 領域의 占有率도 커짐을 볼 수 있다.

Fig. 9는  $A_r=1.20$  일 때  $Re \approx 300$  에서의 流動 構造의 變化를 나타낸 것이다. (a)는  $Re=290$  에서의 流線形態이고 (b)는  $Re=300$  에서의 流線形態로서,  $Re \leq 290$  에서는 두개의 2次渦流가 바닥 구석에 형성되어 있다가  $Re \approx 300$  에서 이들 두개의 2次渦流가 하나로 합쳐짐을 볼 수 있다. Fig. 10은 2次渦流의 이러한 成長過程을 그래프로 표시한 것이다. 일단 하나로 합쳐진 2次渦流는 Fig. 7과 같은 傾向으로 확장한다. 이와 같은 現象은  $A_r=1.01$  일 때도 발생하였다. 한편 正方形 캐비티의 流動에 대한 Barggraf<sup>(10)</sup>와 Nallasamy<sup>(12)</sup>의 연구에 의하면 바닥 구석에 형성되는 작은 두개의 2次渦流는 Reynolds 數의 증가에 따라 처음에는 커지다가 어느 限界에 達하면 다시 작아져 결국에는 소멸되어 버리는 것으로 관찰되었다. 이러한 사실로부터 形狀비가 1에 가까운 부채꼴 캐비티의 流動은 Reynolds 數의 증가에 따라 正方形 및 長方形 캐비티의 流動과는 전혀 다른 流動構造를 가짐을 알 수 있고 이것은 半徑  $R_2$  인 回轉面과 半徑  $R_1$  인 固定面의 面積差와 曲率에 의한 영향으로 해석된다.

Fig. 11은  $Re=500$  일 때  $A_r=0.50$  에 대한 流線과 全壓을 표시한 것이다. Fig. 11 (a)와 (b)를 비교하면  $\psi=0.9$  인 流線上을 따라서  $P=-0.01$  로 全壓이 일정함을 볼 수 있는데, 이것은 이 領域이 粘性의 영향이 무시될 수 있는 非粘性 流動領域(potential core)임을 뜻

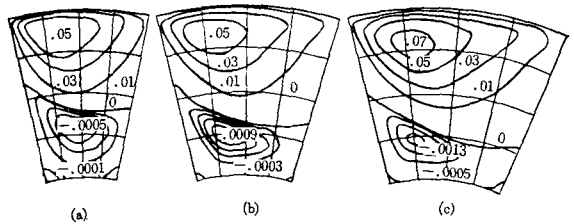


Fig. 8 Stream functions;  $Re=500$ , (a)  $A_r=1.60$ , (b)  $A_r=1.20$ , (c)  $A_r=1.01$

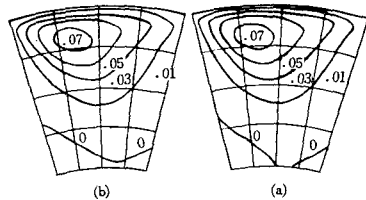


Fig. 9 Stream functions;  $A_r=1.20$  (a)  $Re=290$ , (b)  $Re=300$

하는 것으로서 Reynolds 數의 증가에 따라 이 領域이 확장될 것으로 類推한다.

流動構造는 그 速度形狀으로 부터도 파악될 수 있다. Fig. 12는  $\psi = \psi_{max}$  인 主渦流 中心의  $\theta$ 에서의 圓周方向速度  $u_\theta$ 의 形狀을  $Re=500$  일 때  $A_r=0.50$ ,

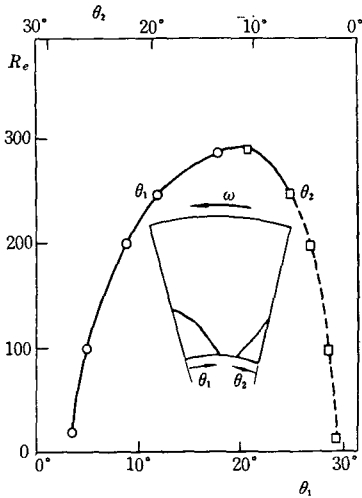


Fig. 10 Growth of corner vortex;  $A_r=1.20$

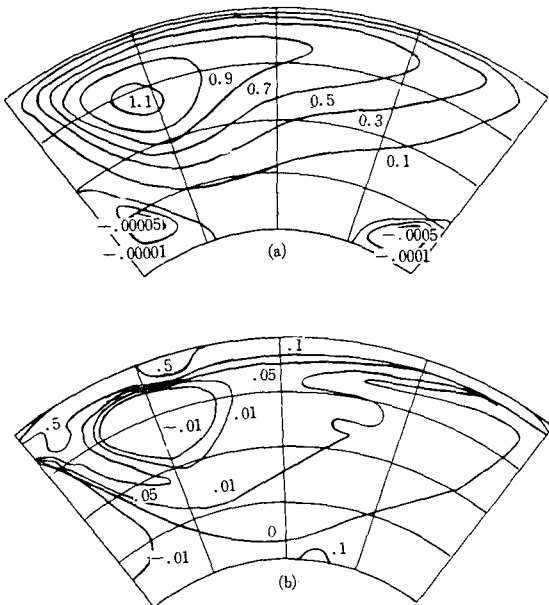


Fig. 11 (a) Stream function and (b) total pressure;  $Re=500, A_r=0.50$

1.01, 1.20, 1.60 및 1.92에 대해 각각 나타낸 것이다. Fig. 12에서 速度가 零에 가까운 부분은 2次渦流의 流動領域을 나타낸다. 同一한 Reynolds 數에 대해서 形狀比가 증가할 수록 이 2次渦流 領域이 증가함을 볼 수 있는데, 이것은 回轉 表面積의 감소에 따른 對流效果의 低下에서 비롯되는 것으로 해석된다.

Fig. 12의  $A_r=0.50$ 에 대한 速度形狀  $a$ 에서 直線的으로 나타나는  $r=1.61\sim 1.81$  부분은, 앞서 언급한 非粘性流動領域에 해당하는 것으로서, 이 領域 內에서의 渦도가 均一한 값을 가짐을 의미하며, 이것은 Bargraf<sup>(10)</sup>와 Nallasamy<sup>(12)</sup>의 해석과 일치한다.

Fig. 13은  $A_r=1.20$ 인 경우에  $\theta = \theta_{max}/2$ 인 中心線에서의 圓周方向速度  $u_\theta$ 의 分布를  $Re=20, 100, 200, 300$  및 400에 대해 표시한 것으로서 Reynolds 數의 증

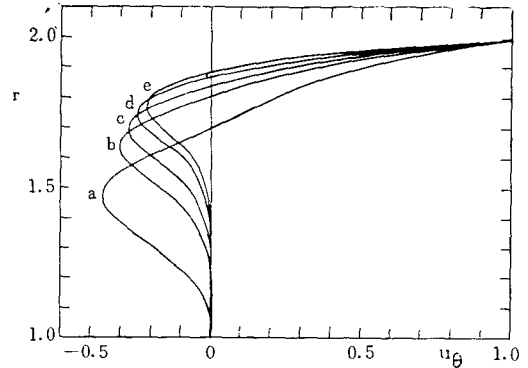


Fig. 12 Velocity profiles at maximum stream function;  $Re=500$ , (a)  $A_r=0.50$ , (b)  $A_r=1.01$ , (c)  $A_r=1.20$ , (d)  $A_r=1.60$ , (e)  $A_r=1.92$

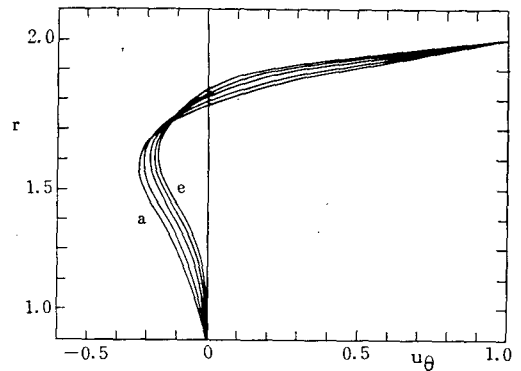


Fig. 13 Velocity profiles at the center of the cavity;  $A_r=1.20$ , (a)  $Re=20$ , (b)  $Re=100$ , (c)  $Re=200$ , (d)  $Re=300$ , (e)  $Re=400$



가에 따라 主渦流가 수축하고 바닥의 구석을 占有하던 두개의 2次渦流가 합쳐져 하나의 渦流를 형성하는 것을 볼 수 있다. Reynolds 數 300 과 400 에서 速度가 零 부근으로 나타나는 低部는 이 합쳐진 2次渦流가  $\theta = \theta_{max}/2$  의 中心線에 대해 對稱的인 流動構造를 가짐을 의미한다.

### 5. 結 論

以上的 研究 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 有限解析法의 正確성과, 特히 높은 Reynolds 數에서의 數值計算의 安定性 및 工學的 解析道具로서의 可能性을 確認하였다.

(2) 有限解析式의 係數의 複雜性으로 인해 格子數의 증가에 따라 과도한 計算時間의 所要를 초래한다. 이를 改善하기 위하여 係數의 計算方法 또는 有限解析要素를 全體 流動領域에 不均一하게 分布시킬 때의 有限解析法의 效率의인 展開에 대한 研究가 要望된다.

(3) 부채꼴 캐비티의 流動은 形狀比에 따라 正方形 및 長方形 캐비티의 流動과 一般的으로 비슷한 傾向을 보였다. 그러나 形狀比 1 부근에서는 바닥의 구석을 占有하던 두개의 2次渦流가  $Re \approx 300$  에서 합쳐져 하나의 큰 2次渦流를 形成하는 特異한 流動構造를 나타내었다.

(4) Batchelor 모델을 確認하기 위한 Reynolds 數를 충분히 높이지 못하였으나, Reynolds 數의 증가에 따라 均一한 渦度를 가지는 非粘性流動領域이 渦流 中心의 周圍에 存在함을 관찰하였고, 이것으로부터 적어도 主渦流에 관한 限 Batchelor 모델의 正當性을 類推할 수 있었다.

### 後 記

本 研究는 서울工大 現代研究基金에 의한 연구비로 수행되었으며 관계자 여러분에게 깊은 감사를 드립니다.

### 참 고 문 헌

(1) Larsen, P.S. and Watton, K.T., "The Four Methods for the Steady Two-Dimensional Navier-Stokes' Equations", *Comp. and Fluids*, Vol. 9, pp. 365~376, 1981

(2) Cebeci, T., Hirsh, R.S., Keller, H.B. and Williams, P.G., "Studies of Numerical Method for the

Plane Navier-Stokes Equations", *Computer Methods in App. Mech. and Eng.*, 27, pp.13~44, 1981

(3) Roche, P.J., *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, 1972

(4) Chen, C. J., Naseri-Neshat, H. and Ho. K. S., "Analytic Numerical Solution of Heat Transfer in Two Dimensional Cavity Flows", *ASME paper, HTD*, Vol. 13, pp.49~61, 1980

(5) Chen, C.J. and Obasih, K., "The Finite Analytic Method-The Finite Analytic Numerical Solution of Heat Transfer and Flow Past a Square Channel Cavity", Vol. 2, *The Finite Analytic Method Technical Report*, Iowa Inst. of Hydraulic Reserch, The Univ. of Iowa, 1981

(6) Chen, C.J. and Chang, S.M., "Finite Analytic Method-The Finite Analytic Numerical Solution for Steady Two Dimensional Heat Transfer and Flow in Bends", Vol. 4, *The Finite Analytic Method Technical Report*, Iowa Inst. of Hydraulic Reserch, The Univ. of Iowa, 1981

(7) 裴柱贊, "極座標系 有限解析法에 의한 2次元 부채꼴 캐비티의 層流流動解析", 서울大學校 大學院 機械工學科 碩士論文, 1984

(8) Chang, G.Z. and Dennis, S.C.R., "Numerical Solutions for Steady Flow past a Circular Cylinder at Reynolds Number up to 100", *J.F.M.*, Vol. 42, pp.471~489, 1970

(9) Fornberg, B., "A Numerical Study of Steady Viscous Flow Past a Circular Cylinder", *J.F.M.*, Vol. 98, pp.819~855, 1980

(10) Burggraf, O. R., "Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows", *J.F.M.*, Vol. 24 pp.113~151, 1966

(11) Pan, F. and Acrivos, A., "Steady Flows in Rectangular Cavities", *J.F.M.*, Vol. 28, pp.643~655, 1967

(12) Nallasamy, M. and Prasad, K.K., "On Cavity Flows at High Reynolds Number", *J.F.M.*, Vol. 79, pp.391~414, 1977

(13) Rotem, Z., Ratkowsky, D.A. and Neilson, J.E., "Viscous Flow in Angle Sectors", *Phy. of F.*, Vol. 13, pp.2650~2656, 1970

(14) Sanders, J., O'Brien, V. and Joseph, D. D.,

- “Stokes Flow in a Driven Sector by Two Different Methods”, *ASME J. App. Mech.*, Vol. 47, pp. 482~484, 1980
- (15) O'Brien, V., “Viscous Flow in an Annulus with a Sector Cavity”, *J. Fluid. Eng.*, Vol., 104, pp. 500~504, 1982
- (16) Ghia, U. and Goyal, R.K., “Laminar Incompressible Recirculating Flow in a Driven Cavity of Polar Cross Section”, *J. Fluid Eng.*, pp. 774~777, Dec., 1977
- (17) Gosman, A.D., Pun, W. M., Runchal, A. K., Spalding, D.B. and Wolfschtein, M., “Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows”, Academic Press, 1969