

<論 文>

말단질량의 관성모우멘트가 Beck's Column의 안정성에 미치는 영향

윤 한 익* · 김 광 식**

(1983년 9월 27일 접수)

The Influence of Inertial Moment of Tip Mass on the Stability of Beck's Column

Han Ik Yoon and Kwang Sic Kim

Abstract

An analysis is presented for the vibration and stability of Beck's column carrying a tip mass at its free end and subjected there to a follower compressive force by using variational approach.

The influence of transverse shear deformation and rotatory inertial of the mass of the column upon the critical flutter load and frequency is considered, and Timoshenko's shear coefficient K' is calculated by Cowper's formulae.

It is, moreover, worth noticing that the influence of inertial moment of tip mass upon the flutter load and frequency is investigated. The centroid of a tip mass is offset from the free end of the beam and located along its extended axis for the two cases, one of which has a tip mass increasing as ξ , the tip mass offset parameter, is augmented, the other has a tip mass constant but the inertial moment is variable according to a magnitude of η , the tip mass offset parameter.

This study reveals that the effects of inertial moment of a tip mass and larger value of p are specially remarkable even a tip mass is a same.

기 호 설 명

A : 보의 횡단면
 a : 말단질량의 반지름
 b : 보의 횡단면의 반지름
 c_1, c_2, c_3, c_4 : 무차원 계수
 c : 보의 자유단에서 말단질량의 무게 중심까지의 거리
 E : 종탄성계수
 G : 횡탄성계수

I : 보의 단면 2차모우멘트
 J_1 : 말단질량의 관성모우멘트
 K' : 티모셴코(Timoshenko)의 전단계수
 k : 보의 관성반지름
 l : 보의 길이
 M_1 : 말단질량
 $M(x, t)$: 보의 굽힘모우멘트
 m : 보의 단위길이의 질량
 P_c : 압축 종동력
 P_B : $\pi^2 EI/4l^2$
 P_L : P_c/P_B

* 정희원, 한양대학교 대학원 박사과정

** 정희원, 한양대학교 정밀기계공학과

p	: ρ_1/ρ
$Q(x, t)$: 보의 전단력
s	: a/l
t	: 시간
v	: 보의 횡진폭
x	: 보의 축좌표
x_1	: x/l
$y(x_1, t)$: 보의 횡변위
α	: c/l
γ	: J_1/ml^3
ϵ	: $E/G=2(1+\nu)$
η	: 말단질량이 일정한 경우, 보의 자유단에서 말단질량의 무게중심까지의 거리 변화률
θ	: $1/(1-16\epsilon\Omega^2/K'\sigma^4)$
μ	: M_1/ml
ν	: 프와송의 비
ξ	: $2c/l$
ρ	: 보의 밀도
ρ_1	: 말단질량의 밀도
σ	: $2l/k$
$\varphi(x_1, t)$: 보의 횡단면의 회전각
ω	: 고유 원진동수
Ω^2	: $\rho A \omega^2 l^4/EI$
prime(')	: x 에 대한 미분
dot(·)	: t 에 대한 미분

1. 서 론

20세기 후반에 기계공업의 발달과 함께 항공공학 로켓공업의 급속한 발전을 가져왔다. 동시에 탄성체의 안정성 문제가 중요하게 다루어지면서 비보존력(non-conservative force)을 받는 탄성체에 대한 연구가 관심을 끌며, 최근에 많은 논문이 발표되고 있다.

1950년대에 pflüger⁽¹⁾와 Feodos'ev⁽²⁾는 자유단에 접선 종동력(follower force)을 받는 외팔보의 안정성 문제를 연구하였다. 이 연구에서 그들은 정적인 방법(Euler's method)으로 계산하였으므로 안정을 잃게 되는 임계하중이 없다는 잘못된 결론을 얻게 되었다. Beck⁽³⁾는 자유단에 압축 종동력을 받는 균일 단면의 외팔보(이하 Beck's column이라 한다)의 임계 프라터하중(critical flutter load)을 동적안정기준(kinetic stability criterion)에 의하여 계산하였고, Deineko, Leonov⁽⁴⁾들은 Beck's column의 자유단과 보의 중앙에 집중질량이 있을 때, 그들이 보의 안정성에 미치는

영향을 연구하였다. 그 후 Leipholz, Madan^{5,6)}과 Hauer⁽⁷⁾는 등분포와 선형분포 종동력을 받는 보의 안정성을 연구하였고, Bolotin⁽⁸⁾은 탄성안정의 비보존적 문제를 광범위하게 연구하여 그의 저서에서 상세하게 설명하였다.

최근에는 Memat-Nasser⁽⁹⁾와 Kounadis, Katsikadelis⁽¹⁰⁾들이 보의 전단변형과 회전관성을 고려한 Beck's column의 안정성을 연구하였고, Kounadis⁽¹¹⁾는 압축 종동력을 받는 Timoshenko beam의 안정성에 집중질량들의 영향을 고려하였다. Irie(入江), Yamada(山田), Takahashi(高橋)⁽¹²⁾들은 종동력을 받는 테이퍼진 Timoshenko beam의 진동과 안정성을 해석하였다. 국내에서는 1981년에 박영필, 김찬수⁽¹³⁾들이 종동력을 받는, 양단자유보로 모델링(modeling)한 미사일(missile)을 유한요소법으로 그 안정성을 연구하였다.

한편 Anderson, Vasilakis, Wu⁽¹⁴⁾들은 자유단에 부착된 질량의 증감이 Beck's column의 안정성에 미치는 영향을 연구하였다. 그런데, 보의 전단변형과 회전관성은 무시되었고, 자유단의 질량과 그 관성모우멘트만 고려하여 해석하였다. 또 이들은 자유단의 질량과 그 관성모우멘트를 함께 증감시켰으므로, 자유단의 질량이 일정하고, 그 관성모우멘트만 변할 때의 임계 프라터하중은 구하지 못하였다.

본 논문에서는 자유단에 부착된 질량의 관성모우멘트가 Beck's column의 안정성에 미치는 영향을 다음과 같은 방법으로 연구하였다.

(1) 보의 자유단으로부터 말단질량의 무게중심까지의 거리를 조절하여 말단질량과 그 관성모우멘트를 동시에 증감시킨다.

(2) 말단질량은 일정한 값으로 고정시키고, 보의 자유단으로부터 말단질량의 무게중심까지의 거리를 조절하여, 즉 말단질량의 형상에 의하여 그 관성모우멘트를 증감시킨다.

(3) 보의 전단변형과 회전관성의 영향을 고려하고, Timoshenko의 전단계수 K' 는 Cowper의 공식으로 결정한다.

(4) 보의 운동방정식과 그 경계조건식은 에너지법, 즉 변분법으로 유도한다.

이상의 방법으로 계산한 임계 프라터하중과 임계 프라터진동수는 모두 말단질량 관성모우멘트의 영향이 많이 받고 있는데, 특히 임계 프라터하중은 말단질량의 증가에 크게 예민하지 않았으나, 그 관성모우멘트의 증가에는 많은 영향을 받아 하중의 감소가 크게 나타났다. 또 말단질량이 일정한 값을 가질 때에는, 말단질량과 보

의 말단질량 관성모우멘트의 영향이 더욱 현저하였다.

2. 이론해석

Fig. 1은 Beck's column의 자유단에 질량을 부착하고, 보의 자유단에서 그 질량의 무게중심까지 일정 거리 c 를 갖게 하였다. 이 c 의 값에 따라서 말단질량의 관성모우멘트가 증감된다.

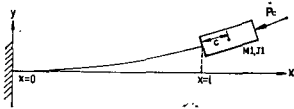


Fig. 1 A cantilever beam carrying a tip mass and subjected to a follower compressive force

의 팔보의 평형위치에서 충분히 작은 평변위가 주어저 교란(disturbance)된 운동이 일어나는 동적 안정 문제로 해석한다. 보의 회전관성과 진단변형이 고려되면, 보의 굽힘모우멘트 $M(x, t)$ 와 변형되지 않는 보의 축에 수직인 전단력 $Q(x, t)$ 는 다음과 같다⁽¹¹⁾.

$$M(x, t) = -EI\varphi'(x, t) \tag{1a, b}$$

$$Q(x, t) = K'AG[ey'(x, t) - \varphi(x, t)]$$

여기서 $e = 1 - P_c / (K'AG)$ 이고, 중동력 P_c 가 작용되지 않는다면 식(1a, b)는 참고문헌 (16)의 (d)식에 일치한다.

앞에서 말한 변위에 기인하는 가상일(virtual work)의 원리와 d'Alembert의 원리를 응용하면⁽¹⁷⁾

$$\sum_{i=1}^n (F_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0 \tag{2}$$

여기서 δr_i 는 가상변위이다. 보에 작용하는 힘을 변형 에너지(strain energy)로부터 유도되는 보존력과 그렇지 않은 비보존력으로 나누면 식 (2)의 첫 항은

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i &= -\delta u + \sum_{k=1}^n p_{ck} \cdot \delta y_k \\ &= \int_0^l EI\varphi'' \delta\varphi dx + \int_0^l K'AG y'' \delta y dx \\ &\quad - \int_0^l K'AG\varphi' \delta y dx + \int_0^l K'AG y' \delta\varphi dx \\ &\quad - \int_0^l K'AG\varphi \delta\varphi dx - [EI\varphi']_0^l \delta\varphi \\ &\quad - [K'AGy']_0^l \delta y + [K'AG\varphi]_0^l \delta y \\ &\quad - \int_0^l P_c y' \delta y dx - P_c y'(0, t) \delta y(0, t) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 u 는 보의 변형에너지이다. Steiner의 정리를 도입하면, 보의 자유단에서 말단질량의 관성모우멘트는

$J_1 + M_1 c^2$ 이 되므로 식 (2)의 둘째 항은

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i &= \int_0^l m \ddot{y} \delta y dx + \int_0^l \rho I \ddot{\varphi} \delta\varphi dx \\ &\quad + M_1 \ddot{y}(l, t) \delta y(l, t) + (J_1 + M_1 c^2) \varphi(l, t) \delta\varphi(l, t) \end{aligned} \tag{4}$$

가 되고, 식 (1), (2), (3)과 (4)로부터 다음과 같은 미분방정식(5a, b)와 경계조건식(6a, b, c, d)를 얻는다.

$$\begin{aligned} EI\varphi'''' - \rho I \varphi'' + m \ddot{y} + P_c y'' &= 0 \\ K'AG(y'' - \varphi') - \rho A \ddot{y} - P_c y' &= 0 \end{aligned} \tag{5a, b}$$

$$\begin{aligned} y(0, t) &= \varphi(0, t) = 0 \\ EI\varphi'(l, t) + (J_1 + M_1 c^2)\varphi(l, t) &= 0 \end{aligned} \tag{6a, b, c, d}$$

$$Q(l, t) + P_c y'(l, t) + M_1 \ddot{y}(l, t) = 0$$

식 (5a, b)로부터 다음과 같은 운동방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} ey'''' - \rho \left(\frac{1}{K'G} + \frac{e}{E} \right) \ddot{y}'' + \frac{P_c}{EI} y'' + \frac{m}{EI} \ddot{y} \\ + \frac{\rho^2}{K'EG} y'''' = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

그런데 중동력 P_c 에 의하여 발생되는 전단력은 보의 변형된 축선에 수직함은 사실이지만, 축력이 전단 응력에 미치는 효과와 마찬가지로 전단변형에 기인하는 전단각($r = y' - \varphi$)는 극히 작으므로 축의 굽힘에 의해서만 일어나는 단면의 회전각에 대한 전단력을 생각하면⁽¹⁸⁾ 식 (5b)의 $P_c y'$ 을 $P_c \varphi'$ 으로 고쳐 쓸 수 있다.

$$K'AG(y'' - \varphi') - \rho A \ddot{y} - P_c \varphi' = 0 \tag{8}$$

식 (8)과 식 (5a)로부터 다음과 같은 수정된 운동방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} y'''' - \rho \left(\frac{1}{K'G} + \frac{1}{E} \right) \ddot{y}'' + \frac{m}{EI^*} \ddot{y} + \frac{P_c}{EI^*} y'' \\ + \frac{\rho^2}{K'EG} \ddot{y} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

여기서

$$I^* = \frac{I}{1 + P_c / K'AG}$$

식 (9)의 해를

$$y(x, t) = v(x) e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1} \tag{10}$$

라 가정하여, 식 (10)을 식 (9)에 대입하고 무차원 독립변수 $x_1 = x/l$ ($0 < x_1 < 1$)을 도입하면, 식 (9)는

$$\frac{d^4 v(x_1)}{dx_1^4} + \beta^2 \frac{d^2 v(x_1)}{dx_1^2} - \zeta v(x_1) = 0 \tag{11}$$

으로 무차원화 된다. 여기서

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{\rho \omega^2 l^2}{K'G} + \frac{\rho \omega^2 l^2}{E} + \frac{P_c l^2}{EI^*} \\ \zeta &= \frac{m \omega^2 l^4}{EI^*} \left(1 - \frac{\rho^2 \omega^2 I^*}{m K'G} \right) \end{aligned} \tag{12a, b}$$

마찬가지로 경계조건식 (6a, b, c, d)는 다음과 같이

된다.

$$v(0) = \varphi(0) = 0$$

$$EI\varphi'(1) - \omega^2(J_1 + M_1c^2)\varphi(1) = 0 \quad (13a, b, c, d)$$

$$Q(1) + (P_c/l)v'(1) - \omega^2 M_1 v(1) = 0$$

전단력 $Q(x_1)$, 굽힘모우멘트 $M(x_1)$ 과 굽힘에 의해 서만 발생하는 단면의 회전각 $\varphi(x_1)$ 은 식 (1a, b)와 식 (8)으로부터 유도된다. 즉

$$Q(x_1) = -\frac{EI/l^3}{1 - \rho^2 \omega^2 I / (mK'G)} [v''''(x_1) + \beta^2 v'(x_1)]$$

$$M(x_1) = -\frac{EI^*}{l^2} [v''(x_1) + \frac{\rho \omega^2 I^2}{K'G} v(x_1)] \quad (14a, b, c)$$

$$\varphi(x_1) = \frac{1/l}{1 + \rho P_c / (mK'G)} [v(x_1) - l\rho Q(x_1) / (mK'G)]$$

식 (11)의 일반해는

$$v(x_1) = c_1 \cos h \lambda_1 x_1 + c_2 \sin h \lambda_1 x_1 + c_3 \cos \lambda_2 x_1 + c_4 \sin \lambda_2 x_1 \quad (15)$$

이 되고, 여기서

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\beta^4 + 4\zeta^2)^{1/2} + (-1)^n \beta^2]^{1/2}, \quad n=1, 2 \quad (16)$$

이다. λ_1 과 λ_2 의 관계는 다음과 같다.

$$\beta^2 = \lambda_2^2 - \lambda_1^2, \quad \zeta = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \quad (17)$$

식 (14~17)을 경계조건식 (13a, b, c, d)에 대입하여 무차원화시키면 다음 4개의 선형제차대수 방정식으로 표시되는 진동수 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{i=1}^4 b_{ji} c_i = 0, \quad j=1, 2, 3, 4 \quad (18)$$

여기서

$$b_{11} = 1, \quad b_{12} = 0, \quad b_{13} = 1, \quad b_{14} = 0 \quad b_{21} = 0,$$

$$b_{22} = [1 + 4\varepsilon \theta \lambda_2^2 / (K' \sigma^2)] \lambda_1$$

$$b_{23} = 0, \quad b_{24} = [1 - 4\varepsilon \theta \lambda_1^2 / (K' \sigma^2)] \lambda_2$$

$$b_{31} = [\lambda_1^2 + 4\varepsilon \Omega^2 / (K' \sigma^2)] \cos h \lambda_1 - \Omega^2 \lambda_1 (\gamma + \mu \alpha^2)$$

$$[1 + 4\varepsilon \theta \lambda_2^2 / (K' \sigma^2)] \sin h \lambda_1$$

$$b_{32} = [\lambda_1^2 + 4\varepsilon \Omega^2 / (K' \sigma^2)] \sin h \lambda_1 - \Omega^2 \lambda_1 (\gamma + \mu \alpha^2)$$

$$[1 + 4\varepsilon \theta \lambda_2^2 / (K' \sigma^2)] \cos h \lambda_1$$

$$b_{33} = [-\lambda_2^2 + 4\varepsilon \Omega^2 / (K' \sigma^2)] \cos \lambda_2 + \Omega^2 \lambda_2 (\gamma + \mu \alpha^2)$$

$$[1 - 4\varepsilon \theta \lambda_1^2 / (K' \sigma^2)] \sin \lambda_2$$

$$b_{34} = [-\lambda_2^2 + 4\varepsilon \Omega^2 / (K' \sigma^2)] \sin \lambda_2 - \Omega^2 \lambda_2 (\gamma + \mu \alpha^2)$$

$$[1 - 4\varepsilon \theta \lambda_1^2 / (K' \sigma^2)] \cos \lambda_2$$

$$b_{41} = (-\theta \lambda_2^2 + \pi^2 P_L / 4) \lambda_1 \sin h \lambda_1 - \Omega^2 \mu \cos h \lambda_1$$

$$b_{42} = (-\theta \lambda_2^2 + \pi^2 P_L / 4) \lambda_1 \cos h \lambda_1 - \Omega^2 \mu \sin h \lambda_1$$

$$b_{43} = -(\theta \lambda_1^2 + \pi^2 P_L / 4) \lambda_2 \sin \lambda_2 - \Omega^2 \mu \cos \lambda_2$$

$$b_{44} = (\theta \lambda_1^2 + \pi^2 P_L / 4) \lambda_2 \cos \lambda_2 - \Omega^2 \mu \sin \lambda_2 \quad (19)$$

진동수 방정식(18)이 유의미한 해(non-trivial solution)를 갖기 위해서는 그 계수 행렬식이 영(zero)이 되어야 한다.

즉

$$\det(b_{jk}) = 0 \quad (20)$$

3. 수치해석결과 및 고찰

충분히 작은 무차원 종동력 P_L 을 선택하여 식 (20)을 만족시키는 Ω^2 을 구하면 횡진동의 제 1, 2차 모드(mode)에 해당하는 진동수를 얻게 된다. P_L 을 점차 증가시키면 1, 2차 진동수는 점차 가까워져서 겹쳐지게 되는데, 그 때의 P_L 이 임계 프라터하중이 되고, 또 겹쳐지는 진동수가 임계 프라터진동수가 된다. P_L 이 이 값 이상으로 증가하면 진동수방정식의 실근은 없으며 보의 횡진동은 지수적으로 증가하여 안정을 잃게 된다.

수치해석은 개인용 컴퓨터 Apple II를 사용하였으며 P_L 의 값을 증가시키면서 반복 계산하였다. 원형단면을 갖는 Beck's column에 대해서 해석했으며 Timoshenko의 전단계수 K' 는 0.89이고, 프와송의 비 ν 는 0.3, 세장비 $\sigma (= \frac{2l}{k})$ 는 64로 하였다.

3.1. 말단질량과 그 관성모우멘트가 함께 변하는 경우

보의 횡단면 반경을 b , 말단질량의 횡단면 반경을 a 라고 하면,

$$I = \pi b^4 / 4, \quad k = b / 2, \quad m = \rho \pi b^2 M_1 = 2\rho_1 \pi c a^2,$$

$$J_1 = (\pi / 6) \rho_1 c a^2 (3a^2 + 4c^2) \quad (21)$$

가 되고, $a = 2b$ 라 두면 식 (19)의 μ 와 $\gamma + \mu \alpha^2$ 은

$$\mu = (\rho_1 / \rho) (a/b)^2 (2c/l) = 4\beta \xi$$

$$\gamma + \mu \alpha^2 = (\mu / 12) (\xi^2 + 3s^2) + \alpha^2 \mu \quad (22a, b)$$

$$= \beta \xi [(4/3)\xi^2 + 1/64]$$

가 된다. 여기서 c 는 말단질량의 무게중심의 평행이동 거리, 즉 보의 자유단에서 말단질량의 무게중심까지의 거리로써 중요한 매개변수이다. 식 (20)에 식 (22a, b)을 대입하면 식 (20)은 말단질량의 길이의 매개변수 ξ 의 함수가 되어, 말단질량의 관성모우멘트 변화의 영향을 조직적으로 계산할 수 있다.

Fig. 2, Fig. 3과 Fig. 4는 매개변수 ξ 에 대한 수치해의 결과를 도시한 것이다. β 의 값은 0.1, 0.5, 1, 3으로 했다. 말단질량의 관성모우멘트를 무시한 Fig. 2에서는 임계 프라터하중 P_{Lcr} 의 증감이 매우 완만하여 질량 말단질량의 증감에 예민하지 못하다. 말단질량과 보의 비 $\mu = 4\beta \xi$ 가 0.6 즉 ξ 가 증가하여 말단질량 이 보의 질량의 60%가 될 때까지는 P_{Lcr} 이 점차 감소하지만 60% 이상이 되면 증가함을 볼 수 있다. 이 현상

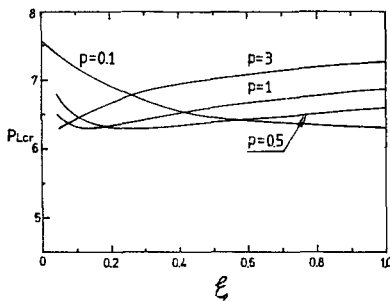


Fig. 2 Variation of P_{Lcr} versus ξ for four values of p . A tip mass is variable and its inertial moment is neglected. $K'=0.89$. $\sigma=64$

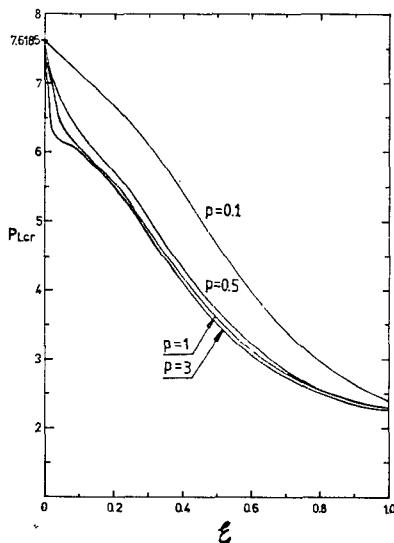


Fig. 3 Variation of P_{Lcr} Versus ξ for four values of p . A tip mass and its inertial moment are all variable according to a magnitude of ξ . $K'=0.89$. $\sigma=64$

은 보의 전단변형과 회전관성의 영향을 무시하였을 때의 $\mu=1$ 즉 100%와 좋은 비교가 되어⁽¹⁹⁾ 보의 전단변형과 회전관성의 영향을 무시할 수 없음을 의미한다.

Fig. 3에서 $\xi=0$, 즉 말단질량이 없을 때의 P_{Lcr} 은 7.6185이다. 이는 Beck의 8.1259보다 약 6.2% 낮은 값으로 보의 전단변형과 회전관성의 영향이다. Timoshenko의 전단계수 K' 의 값이 작을수록 그 영향이 더욱 커지며, $K'=0.186$ 인 I 형 단면의 보에서는 P_{Lcr} 의 값이 Beck의 8.1259에 비하여 약 30% 감소된다⁽¹⁰⁾.

식 (20)에 $\xi=0$, $K'=0.85$, $\sigma=100$ 을 대입하여 계산하면, $P_{Lcr}=7.902$, $\Omega^2_{cr}=115.5$ 가 되어 참고문헌 (10, 12)의 $P_{Lcr}=7.805$ 에 충분히 근사하며 약 1%의 오차

를 가진다. Ω^2_{cr} 도 참고문헌(10)의 $\Omega^2_{cr}=114.5$ 에 1% 미만의 오차를 가진다. 또 $\xi=0$, $K'=\frac{E}{4G}=0.65$ ($=2(1+\nu)$), $\sigma=100$ 을 (20)식에 대입하면 $P_{Lcr}=7.862$, $\Omega^2_{cr}=115$ 가 되어 참고문헌(9)의 $P_{Lcr}=7.4$ 에는 약 6%, 참고문헌(20)의 $P_{Lcr}=7.796$ 에는 약 0.8%의 오차를 가지며, Ω^2_{cr} 는 참고문헌(20)의 $\Omega^2_{cr}=114$ 에 1% 미만의 오차로 근접한다. 참고문헌(9)의 P_{Lcr} 곡선으로부터 $P_{Lcr}=7.4$ 를 추정하였으며, 또 K' 의 정확한 수치가 명기되지 않았으므로, 위의 6%, 오차는 약간의 유동성이 있다고 생각된다.

Fig. 3의 P_{Lcr} 는 ξ 가 증가됨에 따라 단조로우면서 급격히 감소되는데, 이것은 곧 ξ 가 증가됨에 따라 말단질량의 관성모우멘트가 Beck's column의 안정성에 미치는 영향이 점점 커짐을 의미한다. 또 Fig. 2와 Fig. 3의 곡선을 비교 관찰하면, ξ 의 값이 0.1 이하이면 말단질량의 관성모우멘트의 영향이 크지 못하지만 0.1부터는 그 영향이 점점 크게 나타나고, 0.6부터는 다시 그 영향의 증가 폭이 줄어든다.

보의 전단변형과 회전관성을 무시한 참고문헌(14)의 Fig. 3에서 $p=0.1$ 의 곡선과 $p=1$ 의 곡선이 $\xi=0.5$ 근방에서 교차하였으나, 본 논문의 Fig. 3에서는 $\xi=1$ 이상에서 이들 두 곡선이 교차될 것으로 예상된다. 이 두 곡선이 교차되는 이유는 ξ 가 증가함에 따라 p 가 클수록, 보의 안정성에 미치는 그 말단질량의 수평관성력의 영향이 커지고(Fig. 2 참조), 관성모우멘트 영향의 증가폭이 감소함으로 p 가 큰 곡선의 기울기가 완만해지기 때문이다. 따라서 참고문헌(14)의 Fig. 3에서 p 의 값이 클수록 그 곡선의 경사는 완만해지고, 이 곡선들의 교차점은 ξ 의 작은 값에서 나타남을 알 수 있다. 본 논문에서 이 곡선들의 교차점이 $\xi=1$ 근방 또는 그 이상에서 나타남은 보의 전단변형과 회전관성이 보의 안정성에 미치는 말단질량의 수평관성력을 영향을 감소시키고 그 관성모우멘트의 영향을 증대시키기 때문이라고 할 수 있다.

Fig. 4에서는 말단질량이 있음으로 해서 임계프라터 진동수 Ω_{cr} 는 급격히 감소되고 있다. Ω_{cr} 는 말단질량과 그 관성모우멘트의 영향을 모두 감소되는 방향으로 받아 Fig. 3의 P_{Lcr} 보다는 더 급격히 감소되었다. 또 p 의 값에 의한 Ω_{cr} 의 감소율을 관찰하면, $\xi=0.25$ 즉 $\mu=1$ 에서, $p=1$ 의 Ω_{cr} 는 $\xi=0$ 때보다 55% 이상 감소하였고, $p=3$ 의 Ω_{cr} 는 70% 이상 감소하였으므로 p 값의 영향을 많이 받음을 알 수 있다.

3.2. 말단질량이 일정하고 그 관성모우멘트가 변하는 경우

μ 를 일정하게 유지하고, γ 를 증감시키기 위하여 원

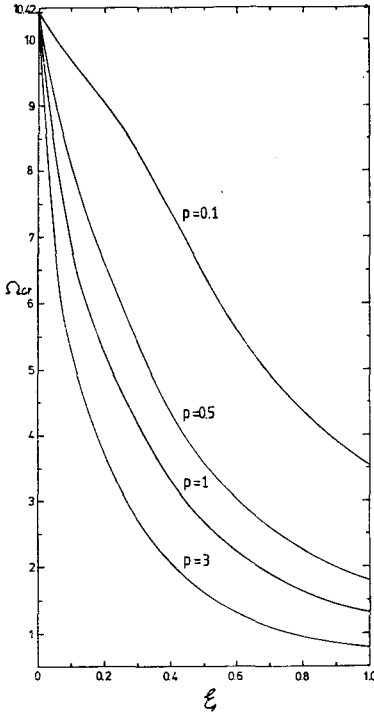


Fig. 4 Variation of Ω_{cr} versus ξ for four values of p . A tip mass and its inertial moment are all variable according to a magnitude of ξ . $K'=0.89$ $\sigma=64$

기둥의 질량을 일정하게 하고, 높이를 변화시킬 때, 반지름과 높이의 관계식을 도입한다.

$$M_1 = 2\pi a^2 c \cdot 2\pi (a/\sqrt{\eta})^2 \eta c = \text{const.}$$

이 때 반지름은 높이 변화물의 2 중근에 역비례함을 알 수 있고, η 는 높이의 변화물 즉 말단질량의 무게중심 거리의 변화물이 된다.

p 의 각 값에 대하여 $\mu=p$ 가 되도록 c 를 결정하면 식 (22a)에서

$$4\xi = (a/b)^2 (2c/l) = 1$$

이 되므로 $c=l/8$ 이다.

이 c 의 값과 η 를 식 (22a, b)에 대입하여 정리하면

$$\mu = p$$

$$\gamma + \mu\alpha^2 = (p/12)[(\eta/4)^2 + 3/64\eta + (\eta/8)^2 \times 12] \quad (23a, b)$$

가 되어 식 (20)을 η 의 함수로 계산할 수 있다.

Table 1은 식 (23b)에 의하여 계산한 말단질량의 관성모우멘트 값이다. η 의 값에 따른 그 크기를 비교하였다.

Table 1 Values of inertial moment of tip mass for a magnitude of η . $D=0.29875 \times \frac{p}{12}$

η	$\gamma + \mu\alpha^2$	η	$\gamma + \mu\alpha^2$	η	$\gamma + \mu\alpha^2$	η	$\gamma + \mu\alpha^2$
0.05	3.1600D	0.5	0.5263D	1.0	D	2.0	3.4474D
0.1	1.5874D	0.6	0.5663D	1.2	1.3442D	2.5	5.3263D
0.2	0.8232D	0.7	0.6383D	1.5	2.0000D	3.0	7.6316D
0.3	0.6021D	0.8	0.7363D	1.8	2.8161D	3.5	10.3609D
0.4	0.5295D	0.9	0.8575D	1.9	3.1231D	4.0	13.5132D

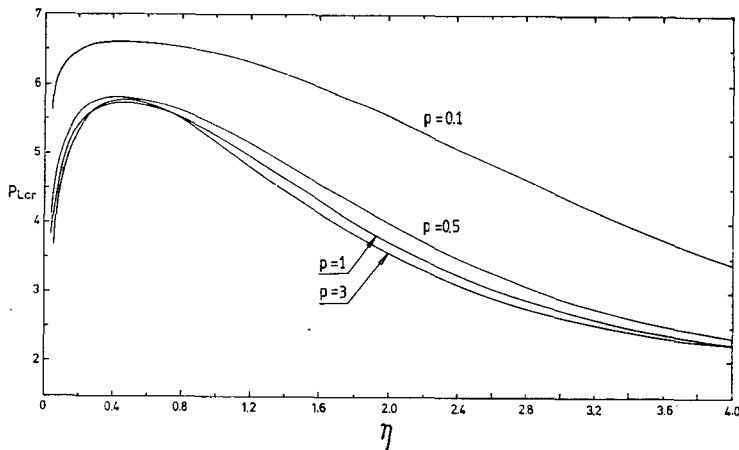


Fig. 5 Variation of P_{Lcr} versus η for four values of p . A tip mass is constant and its inertial moment is variable according to a magnitude of η . $K'=0.89$, $\sigma=64$

η 를 p 의 각 값에 관하여 0.05에서 4까지 증가시키면서 P_{Lcr} 와 Ω_{cr} 를 계산하여 Fig. 5와 Fig. 6에 도시하였다. $\eta=0.05$ 이면 말단질량의 반경 a 는 보의 반경 b 의 약 9배가 되는 대단히 납작한 말단질량이 되고, $\eta=4$ 이면 $a=b$ 가 되어 말단질량과 보는 일체가 되어 길이가 2배인 균일단면보가 된다.

Fig. 5를 관찰하면, 말단질량의 관성모우멘트가 가장 작은 $\eta=0.05$ 에서 P_{Lcr} 는 가장 크고, 관성모우멘트의 크기가 같은 $\eta=0.05$ 와 $\eta=1.913$ 에서 P_{Lcr} 이 같은 값을 가진다. 이것은 곧 말단질량의 관성모우멘트의 영향이 지배적임을 의미한다. 또 p 의 값이 클수록 η 값에 따른 P_{Lcr} 의 증감폭이 큰 것을 볼 때, p 가 클수록 말단질량의 관성모우멘트가 Beck's column의 안정성에 미치는 영향은 더욱 현저함을 알 수 있다. $p=0.1$ 에서 $\eta=0.05$ 의 P_{Lcr} 는 $\eta=0.5$ 의 것보다 약 14.7% 감소되었고, $p=1$ 에서는 약 32.7%가 감소되었다. 그리고, $\eta=0.5$ 에서 $p=3$ 의 곡선이 $p=1$ 의 곡선보다 큰 값을 나타낸 것은 곧 p 의 값이 클수록 말단질량의 관성모우멘트가 P_{Lcr} 에 미치는 영향이 더 커진다는 뚜렷한 현상이다.

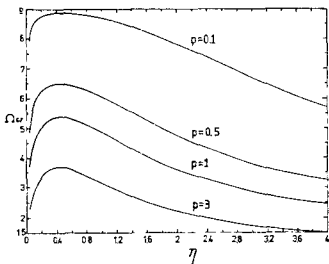


Fig. 6 Variation of Ω_{cr} versus η for four values of p . A tip mass is constant and its inertial moment is variable according to a magnitude of η . $K'=0.89$, $\sigma=64$

Fig. 6의 Ω_{cr} 는 Fig. 4에서도 확인된 바와 같이 p 의 값, 즉 말단질량의 값에 근본적인 영향을 받고 있다. 말단질량 관성모우멘트의 영향도 p 가 큰 곳에서 더 크게 나타난다. 즉 $\eta=0.05$ 때의 Ω_{cr} 가 $\eta=0.5$ 의 것에 비하여, $p=0.1$ 에서 약 10.6%, $p=0.5$ 에서 약 25.3%, $p=1$ 에서 약 31%, $p=3$ 에서 약 37.7% 감소되어 있다.

4. 결 론

이상의 해석결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 말단질량과 그 관성모우멘트가 동시에 증가될 때, 즉 ξ 가 증가될 때 P_{Lcr} 의 감소는 그 관성모우멘트가 증가된 영향이다.

(2) $p=0.1$, $\xi=1$ 의 질량과 $p=1$, $\xi=0.1$ 의 질량은 서로 같은데, 그 관성모우멘트의 효과로 인하여 그들의 P_{Lcr} 와 Ω_{cr} 는 $p=1$, $\xi=0.1$ 의 값을 기준해서 각각 60%와 49% 이상의 차를 가진다.

(3) 말단질량이 일정하고 그 관성모우멘트가 증감될 때, 그 효과는 p 가 클수록 더 커진다. 관성모우멘트가 제일 작은 $\eta=0.05$ 에서 P_{Lcr} 와 Ω_{cr} 가 제일 크고, $\eta=0.05$ 인 박원관형 말단질량을 가질 때 P_{Lcr} 와 Ω_{cr} 이 대단히 증가되었음은 그 관성모우멘트의 감소가 지배적인 영향이다. 이 영향은 p 가 클수록 더 커진다.

(4) P_{Lcr} 는 말단질량의 증감에 예민하지 않지만, Ω_{cr} 은 그 영향을 근본적으로 받는다. Ω_{cr} 은 말단질량의 증감에 역비례한다.

(5) 이와 같이 말단질량의 관성모우멘트는 Beck's column의 안정성에 지대한 영향을 미치므로 말단질량의 설계에 그 형상을 고려하여야 한다.

이러한 관성모우멘트의 영향은 여러가지 조건을 가진 비보존적 탄성계에도 작용할 것이다.

References

- (1) A. Pflüger, Stabilitätsprobleme der Elastostatik, Springer-Verlag, Berlin, 1950.
- (2) V.I. Feodos'ev, Selected Probleme and Question in Resistance of Materials, Gostekhizdat, 1953.
- (3) M. Beck, Die Knicklast des Einseitig Eingespannten, Tangential Gedrückten Stabes, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 3, pp. 225—229, 1952.
- (4) K.S. Deineko and M. Iu. Leonov, The Dynamic Method Investigating the Stability of a Bar in Compression, PMM., Vol. 19, pp. 738—744, 1955.
- (5) H. Leipholz, Die Knicklast des Einseitig Eingespannten Stabes mit Gleichmässig Verteilte, Tangentialer Längsbelastung, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 13, pp. 581—589, 1962.
- (6) H. Leipholz and O.M. P.Madan, On the Solution of the Stability Problem of Elastic Rods Subjected to Uniformly Distributed, Tangential Follower Forces, Ingenieur-Archiv, Vol. 44, pp. 347—357,

- 1975.
- (7) W. Hauger, Die Knicklasten Elastischer Stäbe unter Gleichmässig Verteilten und Linear Veränderlichen, Tangentialen Druckkräften, Ingenieur-Archiv, Vol. 35, pp. 221—229, 1966.
- (8) V.V. Bolotin, Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergmon Press, Oxford, 1963.
- (9) S. Nemat-Nasser, Instability of a Cantilever under a Follower Force According to Timoshenko Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 34, pp. 484—485, 1967.
- (10) A.N. Kounadis and J.T. Katsikadelis, Shear and Rotatory Inertia Effect on Beck's Column, Journal of Sound and Vibration, Vol. 49, pp. 171—178, 1976.
- (11) A.N. Kounadis, Stability of Elastically Restrained Timoshenko Cantilevers with Attached Masses Subjected to a Follower Force, Journal of Applied Mechanics, Vol. 44, pp. 731—736, 1977.
- (12) T. Irie, G. Yamada and I. Takahashi, Vibration and Stability of a Nonuniform Timoshenko Beam Subjected to a Follower Force, Journal of Sound and Vibration, Vol. 70, pp. 503—512, 1980.
- (13) 박영필, 김찬수, 유한요소법에 의한 단순화된 미사일물체 모델의 안정성에 관한 연구, 대한기계학회논문집, 제 5권, 제 4호, pp. 293—302, 1981.
- (14) G.L. Anderson, J.D. Vasilakis and J.J. Wu, The Influence of Tip Mass Offset on the Stability of Beck's Column, Journal of Sound and Vibration, Vol. 62, pp. 475—480, 1979.
- (15) G.R. Cowper, The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 335—340, 1966.
- (16) S. Timoshenko, Vibration Problems in Engineering, 4th Ed., pp. 433, John Wiley & Sons Inc., New York, 1974.
- (17) L. Meirovitch, Elements of Vibration Analysis, pp. 239—244, McGraw-Hill Inc., New York, 1975.
- (18) S. Timoshenko and J.M. Gere, The Theory of Elastic Stability, pp. 132—135, McGraw-Hill Inc., New York, 1961.
- (19) Reference(8), pp. 94.
- (20) V. Sundararamaiah and G. Venkateswara Rao, Effect of Shear Deformation and Rotatory Inertia on the Stability of Beck's and Leipholz's Columns, AIAA Journal, Vol. 18, No.1, pp. 124—125, 1980.