금속성형의 기초와 응용(I)

梁 東 烈
<한국과학기술원 생산공학과>

1. 서 론

일반적으로 하중을 작게 받는 물체는 탄성적으로 거동하는 가역과정 (reversible process)을 나타내고, 하중이 다소 증가하면 이 물체는 비탄성 변형, 즉 비가역 과정을 나타내는 소성변형을 받게된다. 이와같이 소성변형을 받은 물체는 비선형적이고 변형경로에 영향을 받는 성질을 갖고 있기 때문에 사용재료, 가공온도, 가공조건등에 따라 상당한 물성의 변화가 생기게 된다.

소성이론은 크게 2개로 분류할수 있는데 하나는 금속이 소성변형을 할때 전위론(dislocation theory)과 같이 금속내부의 물질구조를 미시적(microscopic) 측면에서 취급하고 있는 물리적 소성 이론이고, 또 하나는 현상론적인 것으로 거시적(macroscopic) 측면에서의 실험결과를 수식화하는 수학적 소성 이론이다.

또한 소성 이론의 응용분야도 두가지로 대별될 수 있는데, 하나는 단조, 압출, 압연등의 소성가공 분야로써 소성변형도가 대단히 커서 탄성변형도를 무시할수 있는 강소성체의 문제이고 또 하나는 탄, 소성 변형도의 크기가 비슷하여 탄성 변형도를 무시 못하는 탄소성 변형의 경우이다.

금속을 원하는 형상으로 제작하는데는 주물, 절삭, 금속성형의 3가지 방법이 있는데 생산성, 제품의 요구강도, 요구정밀도, 재료절감등을 고려하여 적절한 공정을 선택할 필요가 있다.

이와같은 견지에서 볼 때 금속성형은 재료의 낭비없이 원하는 치수와 형상을 얻으면서, 보다 강화된 재질을 다른 가공방식에 비해 빨리 얻을 수 있는 장점을 갖고 있다.

소성 이론은 아직 모든 금속성형 문제에 정확한 해를 줄 정도로 충분히 진보되어 있는 상태는 아니지만, 그럼에도 불구하고 실제 공정의 단순화, 가공물의 이상화를 통해 문제를 해석함으로써 가공하중, 금속유동등에 관한 인자들의 영향을 예측하고, 또 원하는 결과를 얻기 위한 적절한 가공조건을 선택할 수 있도록 근사해를 제공하고 있어 실제 공정이 성립하기 전에 행하는 실험적 시도의 량을 충분히 줄일 수 있다. 따라서 여기서는 우선 금속성형에 관련된 수학적 소성 이론의 기초이론과 소성변형의 해석방법을 소개 하고자 한다.

2. 소성 이론

2.1. 연속체 역학의 기본식

(1) 평형 방정식[1]

그림 1에 나타난 것과 같이 정지 평형을 이루고 있는 미소 요소를 생각하자.

이 요소의 체적력을 무시할 때 x 방향의 힘의 평형식은 다음과 같다.

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\delta_x\right)\delta_y\delta_z-\sigma_x\delta_y\delta_z$$

$$+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\delta_y\right)\delta_x\delta_z-\tau_{yz}\delta_x\delta_z$$

$$+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\delta_z\right)\delta_x\delta_y-\tau_{zx}\delta_x\delta_y=0$$

이것을 간단히 하면 다음 식이 된다.

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0 \quad (1)$$

y, z 방향에 대해서도 각각 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\rho\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0 \quad (3)$$

위의 세 식들은 원통좌표계, 구좌표계로 바꿔 쓸 수 있고 응력성분들이 반드시 만족시켜야 되는 기본식이다.

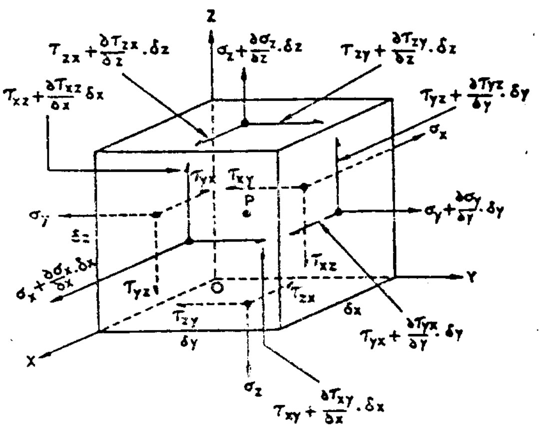


그림 1 미소요소에 작용하는 응력성분

(2) 모우멘트 평형

그림 1에서 x축에 평행하면서 요소의 중심(p점)을 통과하는 축에 대해 모우멘트 평형식을 쓰면 다음과 같다.

$$\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\delta_z\right)\delta_x\delta_y\frac{\delta_z}{2}+\tau_{zy}\delta_x\delta_y\frac{\delta_z}{2}$$

$$-\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\delta_y\right)\delta_x\delta_z\frac{\delta_y}{2}$$

$$-\tau_{yz}\delta_x\delta_z\frac{\delta_y}{2}=0$$

여기서 2차이상의 미소량을 무시한 후 정리하면 다음식을 얻는다.

$$\tau_{zy}=\tau_{yz} \quad (4)$$

다른 축들에 대해서도 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\tau_{xz}=\tau_{zx} \quad (5)$$

$$\tau_{yx}=\tau_{xy} \quad (6)$$

즉 전단응력 성분들은 대칭성을 가짐을 알 수 있다.

(3) 경사면에서의 응력상태

그림 2에 나타난 것과 같이 경사면 ABC의 법선과 x, y, z축 사이의 방향 여현(direction cosine)을 각각 l, m, n으로 하고 경사면 상에서의 합성응력 S_R을 경사면에 수직인 응력 S_n과 접선응력 S_S로 분해됨과 동시에 또한 x, y, z축에 각각 평행한 S_x, S_y, S_z로 분해된다고 하자. 이때 x방향의 힘의 평형식은 다음과 같다.

$$S_x\triangle ABC=\sigma_x\triangle OBC+\tau_{yx}\triangle OCA+\tau_{zx}\triangle OAB$$

이것을 간단히 하면 다음과 같다.

$$S_x=\sigma_x\cdot l+\tau_{yx}\cdot m+\tau_{zx}\cdot n \quad (7)$$

비슷한 방법으로 y, z 방향에 대해서 다음 식들을 얻는다.

$$S_y=\sigma_y\cdot m+\tau_{xy}\cdot l+\tau_{zy}\cdot n \quad (8)$$

$$S_z=\sigma_z\cdot n+\tau_{yz}\cdot m+\tau_{xz}\cdot l \quad (9)$$

경사면에서의 합성응력은

$$S_R=[S_x^2+S_y^2+S_z^2]^{1/2} \quad (10)$$

경사면에서의 수직응력을 S_x, S_y, S_z로 표시하면 다음과 같다.

$$S_n=S_x\cdot l+S_y\cdot m+S_z\cdot n \quad (11)$$

식 (7)~(9)를 식 (11)에 대입하면

$$S_n=\sigma_x\cdot l^2+\sigma_y\cdot m^2+\sigma_z\cdot n^2+2(\tau_{xy}\cdot l\cdot m+\tau_{yz}\cdot m\cdot n+\tau_{zx}\cdot n\cdot l) \quad (12)$$

따라서 경사면 상에서의 접선응력은 다음 식으로 구할 수 있다.

$$S_S=[S_R^2-S_n^2]^{1/2} \quad (13)$$

(4) 주응력 성분

그림 2에서 벡터 S_R과 S_n이 일치하면 그때 접선응력 S_S는 영(zero)이 된다. 이 경우의 수직응력 S_n을 주응력이라 하고 그때의 방향을 주응력 방향이라 한다.

주응력 S_n은 x, y, z 방향으로 다음과 같이 분

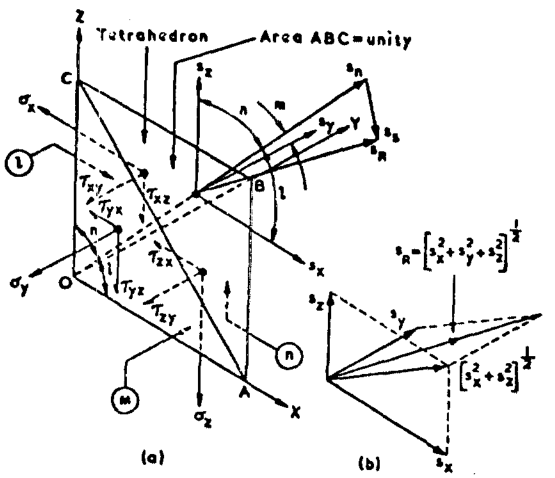


그림 2 경사면에서의 응력 성분

해된다.

$$\left.\begin{aligned} S_x&=S_n\cdot l \\ S_y&=S_n\cdot m \\ S_z&=S_n\cdot n \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

식 (14)을 식 (7)~(9)에 대입하여 행렬 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x-S_n & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-S_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-S_n \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}=0 \tag{15}$$

식 (15)가 nontrivial solution을 갖기 위해서는 다음 조건이 만족되어야 한다.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x-S_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-S_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-S_n \end{vmatrix}=0$$

즉 3차 방정식이 다음과 같이 주어지며 여기로부터 주응력 성분들을 구할 수 있다.

$$S_n^3-J_1S_n^2-J_2S_n-J_3=0 \tag{16}$$

여기서

$$\begin{aligned} J_1&=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z \\ J_2&=-(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x) \\ &\quad+(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2) \\ J_3&=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} \\ &\quad-(\tau_{yz}^2\sigma_x+\tau_{zx}^2\sigma_y+\tau_{xy}^2\sigma_z) \end{aligned}$$

(5) 응력 불변량(stress invariants)

그림 2의 원점 0에서 좌표계 (x, y, z) 대신에 다른 좌표계 $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$를 사용 하더라도 주응력 성분을 결정하는 식 (16)은 변하지 않고 일정하다. 즉 새로운 좌표계 $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$에서 결정된 $\underline{J_1}, \underline{J_2}, \underline{J_3}$는 식 (16)에 나타난 J_1, J_2, J_3와 똑같다는 것을 의미한다.

여기에서 J_1을 제 1 불변량, J_2를 제 2 불변량, J_3을 제 3 불변량이라 말하고 이것들을 주응력 성분으로 표시하면 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned} J_1&=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 \\ J_2&=-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1) \\ J_3&=\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

편차응력(deviatoric stress)을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$\sigma_x'=\sigma_x-\sigma_m$$
$$\sigma_y'=\sigma_y-\sigma_m$$
$$\sigma_z'=\sigma_z-\sigma_m$$

여기서 σ_m은 평균 압력을 나타내는 것으로 $\sigma_m=(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)/3$이다.

위의 편차응력을 사용하여 식 (17)을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned} J_1'&=0 \\ J_2'&=-(\sigma_1'\sigma_2'+\sigma_2'\sigma_3'+\sigma_3'\sigma_1') \\ J_3'&=\frac{1}{3}\{(\sigma_1')^3+(\sigma_2')^3+(\sigma_3')^3\} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

(6) 최대전단응력

주응력 성분이 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$이고 이들 사이의 관계가 $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$일 때 최대 전단응력은 다음과 같이 구해진다.

$$\tau_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3) \tag{19}$$

(7) 유효응력(effective stress)

유효응력은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}&=(3J_2')^{1/2} \\ &=\Big[\frac{1}{2}\{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2 \\ &\quad+(\sigma_3-\sigma_1)^2\}\Big]^{1/2} \end{aligned} \tag{20}$$

(8) 미소 변형도(infinitesimal strain)

그림 3에서와 같이 요소 $ABCDEFGH$가 요소 $A'B'C'D'E'F'G'H'$로 변형 되었을 때 x, y, z

축 방향으로의 미소 변위량은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\left.\begin{aligned}\delta U&=\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\delta z\\ \delta V&=\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\delta z\\ \delta W&=\frac{\partial W}{\partial x}\delta x+\frac{\partial W}{\partial y}\delta y+\frac{\partial W}{\partial z}\delta z\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

이때 변형도는 다음과 같이 정의된다.

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{\partial U}{\partial x}\quad \varepsilon_y=\frac{\partial V}{\partial y}\quad \varepsilon_z=\frac{\partial W}{\partial z}\\ &\gamma_{xy}=2\varepsilon_{xy}=\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\\ &\gamma_{yz}=2\varepsilon_{yz}=\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\\ &\gamma_{zx}=2\varepsilon_{zx}=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

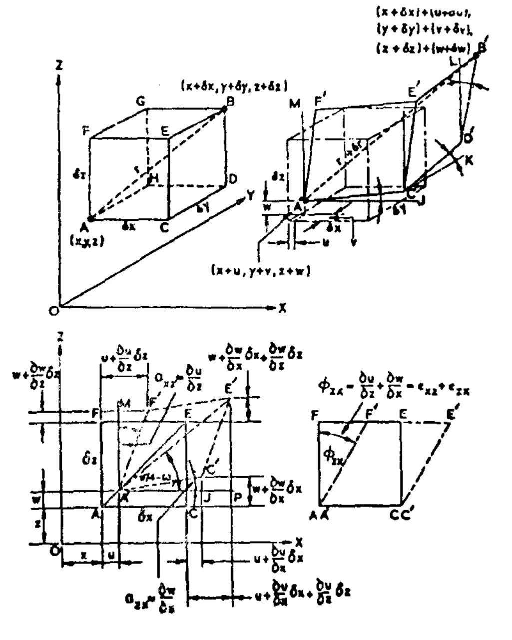


그림 3 xz 평면에서의 변위 및 변형도

2.2. 소성이론의 기본식

(1) 등방성 재질의 항복조건[2]

재료가 항복을 일으키는 순간에서는 응력과 변형도 사이에 Hooke의 법칙이 성립하기 때문에 항복조건은 응력만의 함수로써 나타낼 수 있고, 이것은 또한 등방성 재료의 경우 응력방향에는 무관하고 응력 크기에만 의존하므로 응력불변량의 함수로써 표시할 수 있다.

$$f(J_1, J_2, J_3)=0 \qquad (23)$$

금속재료의 항복은 정수압 응력(평균 응력)에 의해 영향을 받지 않기 때문에 식 (23)을 편차응력으로 표시하면 다음과 같이 된다.

$$f(J_2', J_3')=0 \qquad (24)$$

여기서 J_2'은 식 (18)에서 알 수 있는 바와 같이 우함수이고 J_3'은 기함수이다.

또한 Bauschinger 효과를 무시하면 즉 역방향의 하중이 걸려도 항복응력이 변하지 않는다고 가정하면 J_3'은 우함수로 변환된다.

$$f(J_2',\ J_3'\text{의 우함수})=0 \qquad (25)$$

식 (25)는 등방성 재질에 대한 가장 일반적인 항복조건을 나타내며 이중에서, 소성 이론에서는 다음과 같은 두가지 조건들이 널리 쓰이고 있다.

(가) von Mises 항복조건

1913년 von Mises에 의해 제안된 것으로 식 (25)의 표현중 가장 간단한 형태로 선택한 것이다.

$$\left.\begin{aligned}&\text{항복의 시작}: J_2'=k^2\\ &\text{탄성 변형중}: J_2'<k^2\end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

여기서 J_2'은 편차응력에 의한 제 2 불변량이고, k는 최대전단응력을 나타낸다.

(나) Tresca 항복조건

1864년 Tresca에 의해 제안된 것으로 전단응력의 최대치가 어떤 임계치에 도달했을 때 항복이 시작된다는 것이다. 즉 주응력 $(\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3)$이 주어졌을 때

$$\sigma_1-\sigma_3=Y=2k \qquad (27)$$

여기서 Y는 단축 인장시험에서의 항복응력이다.

일반적으로 von Mises 항복조건이 Tresca 항복조건보다 공학적인 측면에서 실험 결과와 잘 일치되는 경향을 보이는데 항상 그런 것은 아니다.

Tresca 항복조건을 이용하기 위해서는 먼저 주응력들의 상대적 크기가 결정되어야 하며 일단 상대적 크기가 결정되면 수학적 처리가 간단하

게 되어 von Mises 항복조건보다 더 쉽게 표현됨을 알 수 있다.

(2) 소성변형에서의 구성식(constitutive equation)

(가) 탄성응력상태에서의 구성식

등방성 선형 탄성재료의 응력—변형도 관계가 Hooke에 의해 다음과 같이 일반화되었다.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\{\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\}, \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{\gamma_{zx}}{2} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

여기서 E는 탄성계수, ν는 Poisson 비, G는 전단 탄성계수$\left(G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}\right)$이다.

(나) 소성응력상태에서의 구성식

소성영역에서의 응력—변형도 관계는 비선형 관계이며 소성변형도는 최후의 하중상태에 의해 결정되는 것이 아니다.

그 하중에 도달한 경로에 따라 구해지는 것으로 그때 그때의 소성변형도 증분을 구하여 이것을 적분함으로써 전체 변형도를 구할 수 있게 된다.

따라서 소성 응력상태에서는 응력과 변형도 증분과의 관계식이 주어져야 하며 이것은 Prandtl과 Reuss 등에 의해 다음 식으로 가정되었다.

$$\frac{d\varepsilon_x{}^p}{\sigma_x{}'} = \frac{d\varepsilon_y{}^p}{\sigma_y{}'} = \frac{d\varepsilon_z{}^p}{\sigma_z{}'} = \frac{d\varepsilon_{yz}{}^p}{\tau_{yz}} = \frac{d\varepsilon_{zx}{}^p}{\tau_{zx}} = \frac{d\varepsilon_{xy}{}^p}{\tau_{xy}} = d\lambda \tag{29}$$

윗 식을 풀어서 쓰면 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_x{}^p &= \frac{2}{3}d\lambda\left\{\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_z)\right\} \quad d\varepsilon_{xy}{}^p = d\lambda\cdot\tau_{xy} \\ d\varepsilon_y{}^p &= \frac{2}{3}d\lambda\left\{\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z+\sigma_x)\right\} \quad d\varepsilon_{yz}{}^p = d\lambda\cdot\tau_{yz} \\ d\varepsilon_z{}^p &= \frac{2}{3}d\lambda\left\{\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)\right\} \quad d\varepsilon_{zx}{}^p = d\lambda\cdot\tau_{zx} \end{aligned}\right\}$$

여기서 (30)

$$d\lambda = \frac{3}{2}\,\frac{\overline{d\varepsilon^p}}{\bar{\sigma}}$$

(다) 소성 일(plastic work)과 변형경화 가설

소성 변형도($d\varepsilon_{ij}{}^p$)에 대한 단위 체적 당 한 소성 일은 다음과 같다.

$$dW_p = \sigma_1 d\varepsilon_1{}^p + \sigma_2 d\varepsilon_2{}^p + \sigma_3 d\varepsilon_3{}^p \tag{31}$$

그리고 전체 소성 일은 식 (31)을 적분하여 구할 수 있다.

소성 변형도 증분의 주축이 주응력 축과 일치하는 경우엔 식 (31)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$dW_p = \bar{\sigma}\,\overline{d\varepsilon^p} \tag{32}$$

변형경화를 고려하는 데에는 두가지의 가설이 있는데 하나는 가공 경화설로 식 (33)으로 나타내는 것이고, 또 하나는 변형 경화설로 식 (34)로 나타내는 것이다.

$$\bar{\sigma} = F\left(\int dW^p\right) \tag{33}$$

$$\bar{\sigma} = H\left(\int \overline{d\varepsilon^p}\right) \tag{34}$$

재료가 등방성이고 Bauschinger 효과가 없는 경우, 즉 von Mises 항복조건에 따르는 재료에 대해서는 식 (33)과 식 (34)가 일치함을 알 수 있고, 재료가 이방성이며 Bauschinger 효과가 존재할 때는 식 (33)과 식 (34)는 서로 다른 결과를 나타낼 수 있다. 이러한 경우 공학적 문제에서는 보통 식 (34)를 이용하는 것이 편리하다.

3. 소성변형의 해석 방법

일반적인 소성 문제에서 수학적으로 정확한 해를 구하는 것은 아주 어렵지만 문제를 단순화 또는 이상화시켜 근사해를 구하는 것은 가능하다[3].

이와같이 근사해를 얻는 방법에는 여러가지가 있는데 이들 방법중 슬랩방법(slab method), 미끄름 선장법(slip line method)[4], 상계 해법(upper bound method)[5]에 대한 소개와 응용 예를 제시하고 또 최근에 와서 각광받는 유한요소법(finite element method)[6], 실험 결과를 토

대로 한 소성변형 가시화법(visioplasticity method)에 대해서도 간단히 기술하기로 한다.

3.1. 슬랩방법(Slab Method)

이 방법은 "유동 방향에 수직인 평면내에 있는 응력 성분들은 주응력을 나타내고 이들의 크기는 평면내에서 일정하다"라는 가정아래 문제를 해석하는 것으로 다음 세가지에 의하여 해를 구한다.

첫째, 힘의 평형방정식

둘째, 항복조건식

셋째, 경계조건

그러면 그림 4에 나타난 판재 인발 공정에 대해 해석의 예를 보이기로 한다.

판재의 초기두께 (h_B)가 폭 (W)에 비해 상당히 작은 것으로 생각하여 평면변형(plane strain) 문제로 생각한다.

p는 금형면에 수직인 압력이고, μ는 금형면에서의 마찰계수라 할 때 미소요소에 작용되는 힘의 평형은 다음과 같다.

$$(\sigma_x+d\sigma_x)(h+dh)W-\sigma_x hW -2p\left(W\cdot\frac{dx}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha -2\mu p\left(W\cdot\frac{dx}{\cos\alpha}\right)\cos\alpha=0 \quad (35)$$

2차항 이상을 무시하고 $h=2x\tan\alpha$, $B=\mu\cot\alpha$를 이용하여 식 (35)를 정리하면

$$h\,d\sigma_x+(\sigma_x+p(1+B))dh=0 \quad (36)$$

미소요소에서의 응력상태($\sigma_x=\sigma_1$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=\sigma_y\simeq-p$)를 이용하여 Tresca 항복조건을 사용하면

$$\sigma_1-\sigma_3=2k=Y$$

즉

$$p=Y-\sigma_x \quad (37)$$

식 (36)과 식 (37)을 정리하면

$$\frac{d\sigma_x}{B\sigma_x-Y(1+B)}=\frac{dh}{h} \quad (38)$$

경계조건($h=h_B$에서 $\sigma_x=\sigma_{xb}=0$)을 이용하여 식 (38)을 풀면 식 (39)와 같이 소성변형 영역에서의 응력분포를 알 수 있다.

또한 식 (37)을 이용하면 금형면의 압력분포를

$$\frac{\sigma_x}{Y}=\frac{1+B}{B}\left[1-\left(\frac{h}{h_b}\right)^B\right] \quad (39)$$

알 수 있다.

$$\frac{p}{Y}=1-\frac{1+B}{B}\left[1-\left(\frac{h}{h_b}\right)^B\right] \quad (40)$$

위와 같은 접근방법은 인발 공정 이외에도 압출, 압연, 단조 공정등에 같은 방식으로 적용시킬 수 있다.

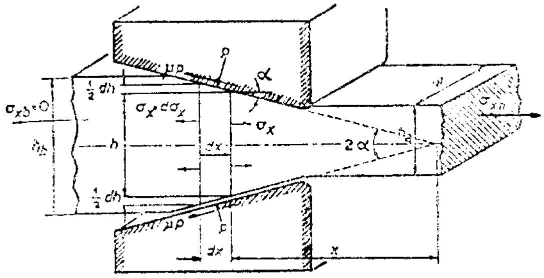


그림 4 인발 공정에서 미소요소에 작용되는 응력 성분

3.2. 미끄름 선장법(Slip Line Method)

이 방법은 평형 미분방정식을 만족하는 특성곡선 즉 미끄름선들로 구성된 미끄름선장을 형성하여 해석하는 것으로 주로 평면 변형문제에 국한되어 있다.

이들 미끄름선은 평형방정식 이외에 항복조건, 유동법칙등을 만족하고 있기 때문에 소성변형 영역내의 응력분포, 변형도율 분포등을 쉽게 구할 수가 있다.

그림 5에서 알 수 있듯이 평면 변형상에서의 응력성분은 정수압 압력 (p)와 전단 항복응력 (k)로 표시될 수 있다.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-p-k\sin2\phi\\ \sigma_y&=-p+k\sin2\phi\\ \tau_{xy}&=k\cos2\phi\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

식 (41)을 평형 미분 방정식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 Hencky 방정식을 얻는다.

$$\left.\begin{aligned}&\alpha\text{ 선을 따라서 : } p+2k\phi=\text{일정}\\ &\beta\text{ 선을 따라서 : } p-2k\phi=\text{일정}\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

비슷한 방법으로 속도의 연속방정식(체적일정의 조건식)과 유동법칙을 이용하여 정리하면 다음과 같은 Geiringer 방정식을 얻는다.

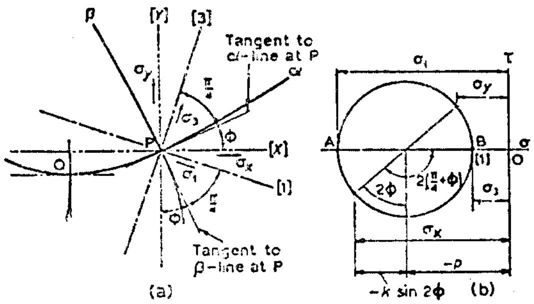


그림 5 (a) 변형물체상의 점 p에서의 α선과 β선
(b) 점 p에서 응력상태를 나타내는 Mohr원

$$\left.\begin{aligned}\alpha\text{선을 따라서}\ ;\ du-vd\phi=0\\ \beta\text{선을 따라서}\ ;\ dv+ud\phi=0\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

여기서 u는 α선에 평행한 속도 성분이고, v는 β선에 평행한 속도 성분이다.

미끄름 선장법의 해석 예제로 그림 6에 나타난 반무한체(semi-infinite)의 펀치압입(punch indentation)문제를 생각한다.

구하고자 하는 펀치 면압은 자유표면 BC에서 시작하여 슬립라인을 따라 가면서 구할 수 있는데, 우선 먼저 자유표면에서의 수직응력이 영(zero)인 것과 Tresca 항복조건을 이용하면 $p_D=k$, 그리고 슬립라인 ED가 α선이라는 것을 알 수 있다. 또한 선분 ED가 직선이므로 식 (42)로부터 바로 $p_D=p_E$임을 알 수 있다.

E점에서 F점까지는 α선을 따라가면서 시계방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 회전하므로 Hencky 방정식은 다음과 같이 된다.

$$p_F+2k\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\text{일정}=p_E=k$$

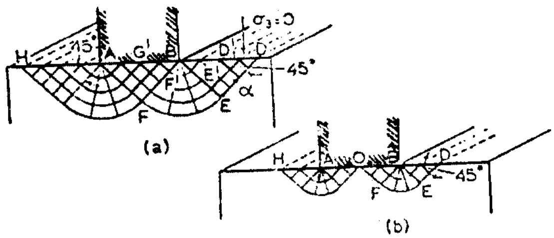
즉

$$p_F=k(1+\pi) \tag{44}$$

선분 FA와 FB는 직선으로써 역시 각도 변화가 없으므로 이들 점에서의 정수압 압력은 변하지 않는다. 즉 $p_G'=p_F$이다.

따라서 G'점에서의 수직응력은 정수압 압력과 전단 항복응력을 합성하여 구해지는 것으로 다음과 같다.

$$P=p_G'+k=k(2+\pi) \tag{45}$$



(a) Prandtl이 제시한 미끄름선장
(b) Hill이 제시한 미끄름선장

그림 6 평편치에 의한 두꺼운 판재의 압입

3.3. 상계해법(Upper Bound Method)

이 방법은 소성역학에 있어서의 상계정리 즉 "소성변형 영역에서 임의의 동적가용 속도장을 가정하는 경우, 이것의 변형 에너지율(J^*)는 실제의 외력이 하는 에너지율(J)보다 작지 않다"를 이용하여 강소성 재료의 가공에 필요한 소요동력 또는 하중의 상계치를 구하는 이론으로써 각종의 압출, 인발, 단조 등의 문제해석 방법으로 널리 응용되고 있다.

동적가용 속도장을 v_i^*로 표시할 때 이것은 다음의 2가지 조건을 만족할 필요가 있다.

첫째, 비압축성 조건($v^*_{i,i}=0$ 즉 $\dot{\varepsilon}_{ii}^*=0$)

둘째, 속도 경계조건

(i) 속도 불연속면에서 수직속도의 연속조건

(ii) 금형면에 수직인 속도성분이 영(zero)이어야 한다.

위에서 말한 상계정리를 수식으로 쓰면 다음과 같다.

$$J^*=\int_V\sigma_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij}^*dV+\int_{S_D}\tau\cdot|\varDelta V|dS_D-\int_{S_T}T_iv_i^*dS_T \tag{46}$$

여기서

v_i^* : 동적가용 속도장

$\dot{\varepsilon}_{ij}^*, \sigma_{i,j}^*$: v_i^*로부터 구해진 변형도율과 응력

S_D : 속도 불연속면

S_T : 외력이 가해진 경계면

T_i : 외력

$|\varDelta V|$: 속도 불연속량

식 (46)의 상계정리를 적용하는 순서는 다음과 같다.

첫째, 실제 유동현상에 가까운 동적가용 속도장 (v_i^*)를 구한다.

둘째, 동적가용 속도장으로부터 에너지율 (J^*)를 계산한다.

셋째, 에너지율을 최소화 시키면서 동적가용 속도장을 수정한다.

넷째, 최후의 동적가용 속도장으로부터 가공에 필요한 하중 및 기타 필요한 자료를 산출한다.

이 방법의 간단한 예제로 그림 7에 나타난 평면변형의 펀치 압입 문제를 생각하기로 한다.

그림 7에서 $ACDEBA$는 전체적인 소성영역을 나타내고 있으며 각 요소는 내부변형이 없는 강체로써 오직 슬립에 의해서만 소성 변형을 하기 때문에 식 (46)을 적용할 경우엔 우변의 두번째 항만 남게 된다.

이 경우의 호도그래프(Hodograph)가 그림 7 (c)에 나타나 있으며 이것을 이용하여 식 (46)에 대입하면

$$J = P\cdot a\cdot 1 \tag{47}$$

$$\begin{aligned} J^* &= \int_{S_D} \tau\cdot|\Delta V|dS_D \\ &= k(AC\cdot V_{AC} + BC\cdot V_{BC} + CD\cdot V_{CD} \\ &\quad + BD\cdot V_{BD} + DE\cdot V_{DE}) \end{aligned} \tag{48}$$

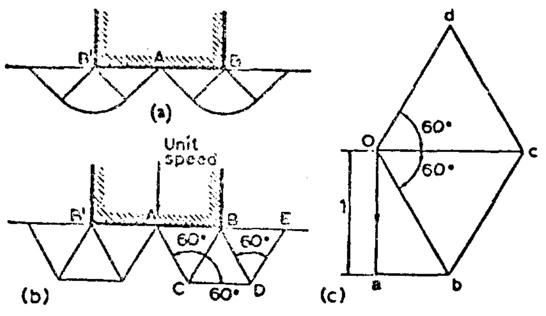


그림 7 (a) 펀치 압입에 대한 미끄름선장
(b) (a)를 이상화시킨 모델
(c) (b)에 대한 호도그래프

식 (47)과 (48)을 정리하면 다음식과 같이 펀치 압력에 대한 상계해를 얻는다.

$$\frac{P}{2k} \leq 2.89$$

3.4. 유한요소법(Finite Element Method)

이 방법은 1960년에 Clough에 의해 처음으로 명명된 이래로 구조역학에 주로 적용되다가 이제는 연속체 역학 전반에 응용되고 있으며, 소성문제에서도 이에 알맞는 수식화 과정을 통해 이 방법을 적용하기 시작했다.

1970년 초에는 모두 탄소성(elasto-plastic)유한요소법의 수식화에 의한 것으로, 이것은 보다 믿을 만한 응력과 변형도 분포를 주지만 매 단계마다 각 요소가 항복상태를 넘었는지를 검사해야 하고, 변형증분량을 한꺼번에 많이 늘릴 수 없어 계산시간이 너무 많이드는 단점이 있다.

이러한 단점이 있더라도 탄성과 소성변형도의 크기가 비슷한 경우에는 탄소성으로 푸는 것이 보다 정확한 해를 준다. 그러나 단조나 압출과 같은 금속성형 문제에서는 탄성 변형량이 소성 변형량에 비해 무시할 만큼 작기 때문에 강소성(rigid-plastic)으로 다루는 것이 경제적이다.

이러한 필요에 의해, Lee와 Kobayashi는 상계정리의 범함수(functional)를 일반화 시킨 다음 식을 사용하여 강소성 유한요소법의 수식을 만들었다.

$$\Phi = \int_V \bar{\sigma}\dot{\bar{\varepsilon}}dV + \int_V \lambda\dot{\varepsilon}_{ii}dV - \int_{S_T} \underline{T}\cdot\underline{v}dS_T \tag{49}$$

여기서 λ는 Lagrange승수이며 이것의 물리적 의미는 정수압응력을 나타낸다.

식 (49)를 사용하여 탄소성 유한요소법과 유사한 접근을 하면 비선형 연립방정식이 유도되며 이를 선형화하여 풀 수 있다.

이 방법의 장점은 가정된 속도장이 비압축성 조건을 만족하지 않아도 사용 가능하며 또한 정수압응력을 직접 구할 수 있고 변형경화를 고려할 수 있어 보다 일반적이고 경제적이어서 현재 많이 응용되고 있는 방법으로써 이에 대한 예제가 그림 8에 나타나 있다.

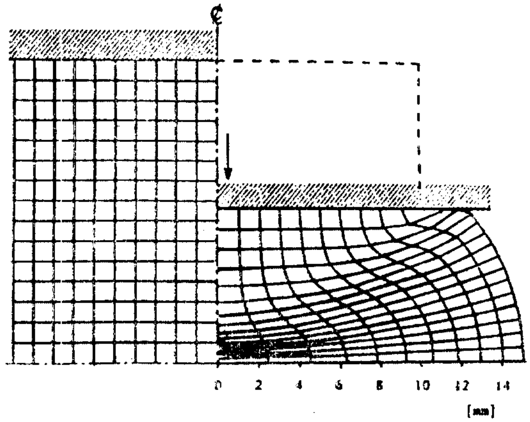


그림 8 초기높이의 50%까지 업세팅(upsetting)시 중심면에서의 변형된 격자 형상

3.5. 소성변형 가시화법 (Visioplasticity Method)

이 방법은 실험적으로 소성변형 영역에서의 유동형상을 구한 후 수치적으로 변형도 분포를 구하는 것인데 이를 위해선 먼저 시편의 대칭축을

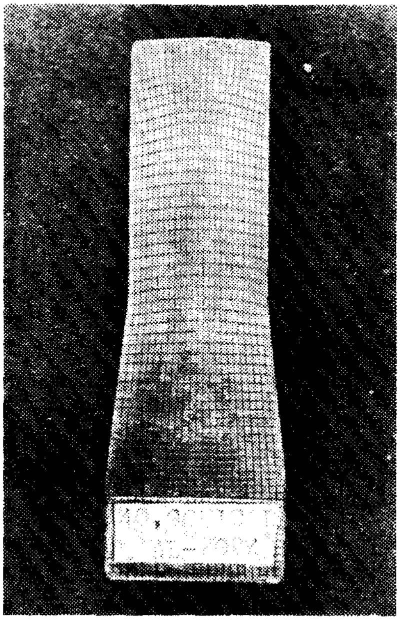


그림 9 소성 유동 형상

지나는 면으로 이등분이 되도록 기계 가공한 후 연마 및 폴리싱(polishing)을 한다. 폴리싱된 중심면상에 밀링 또는 포토에칭(photo-etching)[7] 작업에 의해 정사각형의 격자(grid)들을 만든다.

이렇게 하여 그리딩(gridding)된 시편과 그리딩되지 않은 또 하나의 시편을 합하여 완전한 압출용 시편을 만들어 금형에 넣고 압출을 하면 그림 9에서와 같이 시편의 중심면에서의 소성유동형상을 얻을 수 있다.

중심면상에서 변형된 격자 형상을 측정함으로써 변형영역내에서의 속도, 변형도, 변형도율 분포 등을 구할 수 있다.

참 고 문 헌

(1) Thomson, Yang and Kobayashi "Mechanics of Plastic Deformation in Metal Processing", Macmillan company, 1965

(2) R. Hill, "The Mathematical Theory of Plasticity", Oxford University Press, 1950

(3) 이중홍, "소성가공의 역학적 해석 현황" 대한기계학회지, Vol. 13, No. 2, pp. 87~88, 1973

(4) R.A.C. Slater, "Engineering Plasticity, Theory and application to metal forming processes", Macmillan company, 1977

(5) W. Johnson, P.B. Mellor, "Engineering Plasticity", Van Nostrand Reinhold company, 1972

(6) C.H. Lee, S. Kobayashi, "New Solutions to Rigid-Plastic Deformation Problems using a Matrix Method", Trans. ASME. J. of Eng. for Ind. pp. 865~873, 1973

(7) American Society for Metals, "Metal Handbook", Vol. 3, pp. 240~242, 8th, edition.