두개의 수직 다공성 벽면을 가진 좁은 간격에서의 유체의 열적 불안정성

손 동 연* · 유 정 열** · 이 택 식**

Thermal Instability of Fluid in a Slot between Two Vertical Permeable Walls

Dong Yun Sohn, Jung Yul Yoo and Taik Sik Lee

ABSTRACT

An analytical study on the thermal instability of fluid in a vertical solt between two permeable walls has been carried out using fast converging power series solution method. For given values of Prandtl number Pr and permeability paramter σ, the critical Grashof number Gr_C and the critical wave number a_C are found as eigenvalues of the problem formulated by the stability equations and the appropriate boundary conditions which are derived on the basis of linear stability theory.

In the case of $\sigma > 10^4$, the results approach those of solid boundary case, but in the case of $\sigma < 10^3$, the decrease of Gr_C and a_C become more prominent. In other words, the permeable walls cause the flow to be more unstable than the solid walls. This is considered to be due to the slip of the fluid on the wall, which decrease the friction force .

* 서울대학교 대학원 기계공학과

** 정회원, 서울대학교 공과대학 기계공학과

기 호

영 문 자

- a ; 무차원 파수 (dimensionless wave number)
- c ; 무차원 파의 속도 (dimensionless wave speed)
- $\underline{G}$; 단위 벡타 (-1, 0, 0)
- Gr ; Grashof 수
- g ; 중력가속도
- h ; 수직 벽 사이의 거리
- k ; 다공성 물질의 침투도 (permeability)
- p ; 무차원 압력
- Pr ; Prandtl 수
- Q ; 무차원 Darcy 속도
- T ; 무차원 온도
- Tm ; 무차원 기준온도
- To ; 두벽의 평균온도
- t ; 무차원 시간
- U_B ; 다공성 물질 표면에서의 무차원 미끄럼 속도
- $\underline{u}$; 무차원 속도 벡타
- u, v, w ; x, y, z 방향의 무차원 속도 성분
- x, y, z ; 무차원 직각 좌표계

그리이스문자

- α ; 미끄럼 계수 (slip parameter)
- β ; 열팽창 계수
- ρ ; 밀 도
- ν ; 동점성 계수
- μ ; 점성계수
- δ_{ij} ; Kronecker delta
- σ ; 침투 매개변수 (permeability parameter), $h/\sqrt{k}$
- η ; gh^3/ν^2

상 첨 자

- $*$; 차원을 가진 양
- $'$; 교란 양

하 첨 자

- c ; 기본유동
- b ; 임계치

1. 서 론

이 연구는 양면이 각각 등온으로 유지되는 침투성 벽들로 한정되어 있는 수직유체층의 열적 불안정성에 관한 문제를 취급한다. 양벽의온도차가 작다면 열전달은 전도에 의하여서만 일어나지만 (전도구역, Conduction Regime) 온도차가 커지게 되면, 이런 전도구역은 불안정해지고 대류구역 (Convection Regime)으로 천이하게 된다. 이것은 건물 및 냉난방기기의 단열효과를 높이는데 응용될 수 있는 기초적인 문제로서, 양면이 고체 불침투성 벽들로 한정된 수직 또는 경사진 유체층의 불안정성에 관하여는 많은 연구가 이루어진데 반하여 [1,2,3], 다공성 물질로 양면이 한정된 유체층의 불안정성에 관하여는 경계조건의 복잡성으로 인하여 알려진 바가 적다 [4]. 여기서는 다공성 벽면에서 노슬립 조건 대신에 슬립조건을 가정함으로써 얻어진 3차식 형태의 기본속도분포를 사용하여 구성된 안정성 방정식의 해를 구하고, 이로부터 대류열전달의 발생조건을 규명하고자 한다. 다시 말하면 이 연구의 목적은 다공성 물질로 양면이 한정된 수직의 좁은 공간에 채워진 유체층이 비침투성 물질로 양면이 한정될 때 보다 같은 조건하에서 얼마나 더 열적으로 불안정해지며, 또한 Prandtl 수에 따라 임계 Grashof 수가 어떻게 변하는가를 고찰하는데 있다.

2. 기본방정식

그림 1에 스케치된 바와 같이, 양면이 온도차 $\triangle T$ 로서 각각 등온으로 유지되는 수직의 다공

성 벽 사이의 간격이 h 이며, x 방향은 중력과 평행한 방향이고 z 방향은 벽면에 수직인 방향이다. 이 간격에 채워진 유체는 비압축성 Newton 유체로서, Boussinesq 근사에 의거하여 부력항을 제외하고 유체의 물성치는 일정하다고 가정한다. 에너지 방정식에서는 점성에 의한 에너지 소산을 무시한다.

한편, 다공성 물질의 표면에서의 미끄럼속도 U_B^* 는 Beavers 와 Joseph [5]에 의하여 주어진 다음과 같은 관계식으로부터 결정하는데,

$$\mu \left.\frac{du^*}{dz^*}\right|_{z=\text{surface}} = \frac{\mu\alpha}{k^{\frac{1}{2}}}(U_B^* - Q^*),$$

여기서 Q^* 는 Darcy 속도로서 다공성 물질내의 단위면적당 체적 유량을 나타낸다.

이 식의 유효성은 Taylor [6]에 의하여 실험적으로 입증되었으며 Richardson [7]에 의하여 이론적으로도 확인되었다. 낮은 Reynolds 수의 유동에서 Darcy 속도는

$$Q^* = -\frac{k}{\mu}\left[\frac{dp^*}{dx^*} + \rho g(1-\beta(T^* - Tm^*)\right]$$

의 형태로 주어지는데 [8], 이 문제에서는 양쪽의 다공성 물질내의 온도가 각각 균일하며, 압력분포는 유체정력학적이라고 가정할 수 있으므로

$$Q^* \equiv 0$$

으로 놓을 수 있다.

또한, 다공성 물질로부터 유동 영역으로 유체의 흡입이나 송출은 없는 것으로 가정한다.

이와 같은 가정하에, 기준길이 h, 기준속도 ν/h, 기준압력 ρgh, 기준온도 $\triangle T$ 및 기준시간 h^2/ν 를 사용함으로써 무차원화 시킨 지배방정식들과 경계조건들은 다음과 같다 [9] :

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u} = -\eta\nabla p + \nabla^2\underline{u} + \eta\underline{G} - Gr\,T\underline{G}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u}\cdot\nabla T = \frac{1}{Pr}\nabla^2 T, \tag{3}$$

$$z = -\frac{1}{2} \text{ 에서 } \frac{du}{dz} = \alpha\sigma U_B, \quad v=0,\ w=0,\ T=\frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$z = \frac{1}{2} \text{ 에서 } \frac{du}{dz} = -\alpha\sigma U_B, \quad v=0,\ w=0,\ T=-\frac{1}{2}, \tag{5}$$

및 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 에서 $p=0$.

낮은 Gr 의 값에서 형성되는 기본유동에서의 속도는 축방향 성분만을 가지며 z 만의 함수이다. 식 (1), (2), (3) 과 경계조건 (4), (5)를 만족시키는 기본 유동해는 다음과 같다:

$$u_b = f_1 z^3 + f_2 z,\ T_b = -z,\ P_b = -x \tag{6}$$

여기서 $f_1 = \frac{Gr}{6}$ 및 $f_2 = -\frac{Gr(6+\alpha\sigma)}{24(2+\alpha\sigma)}$

이다.

3. 안정성 방정식과 경계조건

Grashof 수가 충분히 커지면 전도구역의 기본유동은 불안정해져서 대류구역으로의 천이를 겪게 된다. 이 논문에서는 y 방향의 축을 가지는 롤들의 형태로서 나타나는 천이에 대하여 연구하기로 한다. 따라서 선형 안정성 이론을 적용하고자 기본유동에 무한소의 교란을 다음과 같이 중첩시킨 섭동된 유동을 고찰한다:

$$\begin{aligned} u &= u_b(z) + u'(x,z,t) \\ w &= w'(x,z,t) \\ T &= T_b + T'(x,z,t) \\ p &= P_b + p'(x,z,t) \end{aligned} \tag{7}$$

위 식을 (1), (2), (3)에 대입하고 선형화 시키면 다음과 같은 안정성 방정식들이 얻어진다:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u_b \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u_b}{\partial z} = -\eta \frac{\partial p'}{\partial x}$$

$$+ (\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}) + GrT', \quad (9)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u_b \frac{\partial w'}{\partial x} = -\eta \frac{\partial p'}{\partial z} + (\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}), \quad (10)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + u_b \frac{\partial T'}{\partial x} + w \frac{\partial T_b}{\partial z} = \frac{1}{Pr}$$

$$\cdot (\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2}). \quad (11)$$

위 식들에서 p'과 u'을 소거하고, 교란양들을 다음과 같은 정규형식 (normal mode)으로 표시하면 〔10〕,

$$w' = W(z) \, exp(iax + ct),$$

$$T' = \theta(z) \, exp(iax + ct).$$

다음과 같은 식들이 얻어지는데,

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - c) W - iaGrD\theta - iau_b (D^2 - a^2) W + iaWD^2 u_b = 0, \quad (12)$$

$$(D^2 - a^2)\theta - cPr\theta - Priau_b\theta + PrW = 0, \quad (13)$$

여기서 $D = d/dz$를 나타낸다.

대류구역으로의 천이 발생점에서 안정성 교환의 원리 〔10〕가 성립된다고 가정할 수 있으므로 한계상태 (marginal state)는 $c = 0$로 정의되며 식 (12), (13)은 다음과 같이 쓰여진다 :

$$(D^2 - a^2)^2 W - iaGrD\theta - ia(f_1 z^3 + f_2 z) \cdot (D^2 - a^2) W + iaW(6f_1 z) = 0, \quad (14)$$

$$(D^2 - a^2)\theta - Pria(f_1 z^3 + f_2 z)\theta + Prw = 0 \quad (15)$$

대응하는 경계조건들은

$$z = \pm \frac{1}{2} \text{에서} \quad \theta = W = DW \pm \frac{1}{\alpha\sigma} D^2 W = 0 \quad (16)$$

3. 풀이방법

이제 식 (14)-(15)의 일반해는 다음과 같은 형태의 급속히 수렴하는 멱급수로서 구하여질 수 있다. 〔1, 4, 11〕 :

$$W = \sum_{j=1}^{6} A_j g_j(z), \quad (17)$$

$$g_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^j z^{n-1},$$

$$\theta = \sum_{j=1}^{6} A_j h_j(z),$$

$$h_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^j z^{n-1}.$$

여기서

$$b_n^j = 0, \quad n = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0,$$

$$c_n^j = 0, \quad n = -4, -3, -2, -1, 0,$$

$$b_n^j = \delta_{jn}, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

$$c_n^j = \delta_{jn}, \quad n = 5, 6,$$

로 정의하면, 식 (17)을 식(14)-(15)에 대입함으로써 얻어지는 순환공식 (recursion formula)으로 부터,

$n \geq 5$에 대하여,

$$b_n^j = \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \cdot \{ 2a^2(n-3)(n-4) b_{n-2}^j - a^4 b_{n-4}^j + iaGr(n-4)c_{n-3}^j + ia[f_1(n-6)(n-7)b_{n-5}^j + f_2(n-4)(n-5)b_{n-3}^j] - ia^3[f_1 b_{n-7}^j + f_2 b_{n-5}^j] - 6iaf_1 b_{n-5}^j \}, \quad (18)$$

$n \geq 3$에 대하여,

$$c_n^j = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \{ a^2 c_{n-2}^j - Prb_{n-2}^j + Pria[f_1 c_{n-5}^j + f_2 c_{n-3}^j] \}, \quad (19)$$

을 얻는다. 다음에는 경계조건 (16)으로 부터 $A_j (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$에 대한 6차 연립방정

식을 얻을 수 있다 :

$$[D_{kj}][A_j] \quad 0. \tag{20}$$

여기서

$$D_{1j} = g_j\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$D_{2j} = g_j\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$D_{3j} = g_j'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\alpha\sigma}\, g_j''\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$D_{4j} = g_j'\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\alpha\sigma}\, g_j''\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$D_{5j} = h_j\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$D_{6j} = h_j\left(-\frac{1}{2}\right).$$

식 (20)이 모두는 영이 아닌 해를 가지기 위하여는

$$det \mid D_{ij}(a, Gr\,; Pr, \sigma) \mid = 0 \tag{21}$$

이어야 한다. 식 (6)의 f_1과 f_2 및 경계조건 (16)에서 α와 σ는 항상 $\alpha\sigma$의 형태로서 나타나는 것을 주목한다.

식 (21)은 고유치문제로서 주어진 Pr과 $\alpha\sigma$에 대하여, 파수 a와 그라스호프 수 Gr이 고유치로서 결정됨을 의미한다. Gr의 임계치를 구하기 위하여는, (a, Gr)의 중립안정성 곡선에서 Gr의 최소치를 읽으면 된다.

4. 결과 및 토의

매우 다공성인 물질에 대하여는 α=1로 놓을 수 있으므로 [5,6] 여기서는 편의상 $\alpha = 1$의 경우에 한하여 논하기로 한다.

Fig.2, Fig.3, Fig.4,는 $\sigma = 10^3$일때 각각 수은 ($Pr = 0.025$), 공기 ($Pr = 0.71$), 물 ($Pr = 7.0$)에 대한 전형적인 중립안정성 곡선을 나타낸다. Fig.5에서는 공기에 대하여 σ 값이 10^2, 10^3, 10^4 일때의 중립안정성곡선들이 보여진다. 여기서 σ값이 작을수록 즉, 침투도 k가 커질수록 흐름은 불안정해 지는데, 이런 현상은 벽면에서 미끄럼의 발생으로 인하여 마찰력이 감소되기 때문인 것으로 판단된다.

Table 1에는 여러가지 σ의 값에 대하여 Pr의 변화에 따른 임계 Grashof 수 Gr_c와 임계파수 a_c를 나열하였고 Table 2에는 고체벽면의 경우에 대한 Ruth[1]의 결과를 나열하였다. 두 Table 들을 비교하였을 때, 다공성 물질의 σ값이 커짐에 따라 즉 침투도 k가 작아질수록, 고체 벽면의 경우에 근접하는 결과를 얻을 수 있음이 보여짐으로 본 연구에서의 해석방법이 타당함을 알 수 있다. 이 결과들은 Fig.6과 Fig.7에 도표로서 예시함으로써 보다 명백하게 알 수 있다. Fig.6에서는 Pr의 변화에 따른 Gr_c의 값을 도시하였는데, Pr의 증가에 따라 대체적으로 Gr_c의 완만한 감소, 급격한 증가, 급격한 감소, 완만한 증가로 특징지어지는 네개의 영역으로 나누어 고찰할 수 있다. Ruth[1]는 교란양의 진폭의 분포가 Pr에 따라 변화하기 때문에 이런 네가지 영역들이 존재하게 된다는 것을 설명하였다.

Fig.6에서는 σ값이 작아짐에 따라 둘째 영역과 셋째 영역이 옮겨짐을 볼 수 있는데, 이로부터 다공성물질의 성질은 교란양의 진폭의 분포에도 영향을 미친다는 것을 알 수 있다. Fig.7은 Pr의 변화에 따른 a_c의 값을 도시하였는데, 여기서도 $\sigma = 10^5$일때 Ruth의 결과와 거의 일치하는 것을 알 수 있다. σ의 값이 작을수록 a_c의 값도 작아지는 것, 즉 파의 길이가 커지면서 대류세포(convection cell)의 크기가 커지는 것을 알 수 있다.

5. 결 론

다공성 물질이 경계면을 이루고 있는 수직의 좁은 간격에 채워진 유체의 열적 불안정성에 대한 해석이 급속히 수렴하는 급수해를 사용한 멱급수해법을 사용함으로써 수행되었다. 주어진

Pr 과 침투매개변수 σ에 대하여 선형안정성이론으로부터 유도된 안정성 방정식 및 적절한 경계조건들을 만족시키는 Gr_c와 a_c가 고유치로서 결정되었다.

$\sigma > 10^4$인 경우에는 거의 고체 경계면의 경우의 결과에 근접하지만, $\sigma < 10^3$ 에서는 Gr_c와 a_c의 급격한 감소가 나타난다. 즉, 다공성 경계면은 유체유동을 고체 경계면의 경우보다 더 불안정하게 만든다고 할 수 있다. 이것은 경계면에서 유체가 미끄러짐으로써 마찰력이 감소되기 때문인 것으로 판단된다.

후 기

이 논문은 유정열 교수가 1983-1984 문교부 국비 해외파견 연구교수로 선발되어 University of Minnesota에서 수행하였던 연구의 일부이므로, 문교부에 심심한 감사의 뜻을 표합니다.

참 고 문 헌

1. D.W. Ruth, On the Transition of Transverse Rolls in an Infinite Vertical Fluid Layer - A Power Series Solution, Int. J. Heat & Mass Transfer, 22, 1199-1207, 1979.
2. S. A. Korpela, D. Gozum & C. B. Baxi, On the Stability of the Conduction Regime of Natural Convection in a Vertical Slot, Int. J. Heat & Mass Transfer, 16, 1683-1690, 1973.
3. T. E. Unny, Thermal Instability in Differently Heated Inclined Fluid Layers, ASME Journal of Applied Mechanica, 39, 41-46, 1972.
4. N. Rudraiah & V. Wilfred, Natural Convection Past Inclined Porous Layers, ASME J. of Applied Mechanics, 49, 266-272, 1982.
5. G. S. Beavers. & D. D. Joseph, Boundary Conditions at a Naturally Permeable Wall, Journal of Fluid Mechanics, 30, 197-207, 1967.
6. G. I. Taylor, A Model for the Boundary Conditions for a Porous Material, Part I, J.F.M, 49, 319-326, 1971.
7. S. Richardson, A Model for the Boundary Condition for a Porous Material, Part II, J.F.M, 49, 327-336, 1971.
8. M. Scheidegger, 1957, The Physics of Flow Through Porous Media, New York; MacMillan.
9. 손동연, 수직의 다공성 벽면을 가진 좁은 간격에서의 유체의 열적 불안정성, 석사학위논문, 서울대학교 공과대학, 1984.
10. S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford Univ. Press, 1961.
11. E. M. Sparrow, K. J. Goldstein & V.K. Jonsson, Thermal Instability in a Horizontal Fluid Layer ; Effect of Boundary Conditions and Nonlinear Temperature Profile, J.F.M., 513-528, 1964.

그 림 설 명

Figure 1. Schematic diagram of the physical model

Figure 2. Neutral stability curve for $Pr = 0.025$ and $\sigma = 1000$.

Figure 3. Neutral stability curve for $Pr = 0.71$ and $\sigma = 1000$.

Figure 4. Neutral stability curve for $Pr = 7.0$ and $\sigma = 1000$.

Figure 5. Neutral stability curves for $Pr = 0.71$ and various values of σ : (1) $\sigma = 10^2$, (2) $\sigma = 10^3$, (3) $\sigma = 10^4$.

Figure 6. Dependence of Gr_c on Pr for various values of σ : (1) $\sigma = 10^2$, (2) $\sigma = 250$, (3) $\sigma = 10^3$, (4) $\sigma = 10^4$, (5) $\sigma = 10^5$ (o, result of Ruth[1]).

Figure 7. Dependence of a_c on Pr for various values of σ : (1) $\sigma = 10^2$, (2) $\sigma = 250$, (3) $\sigma = 10^3$, (4) $\sigma = 10^4$, (5) $\sigma = 10^5$ (o, result of Ruth[1]).

Table 2. 고체벽면의 경우에 여러가지 값의 Pr 에 대한 a_c 및 Gr_c [1]

Pr	a_c	Gr_c
.00001	2.688	7929.923
.0001	2.688	7928.733
.001	2.689	7916.920
.01	2.695	7807.448
.02	2.699	7703.050
.05	2.708	7482.533
.1	2.707	7349.516
.5	2.789	8093.723
.7	2.810	8041.422
1.	2.808	7940.235
2.	2.779	7850.043
3.	2.771	7852.483
5.	2.768	7863.939
7.	2.767	7868.426

Table 1. 다공성 벽면의 경우에 여러가지 값의 Pr 및 σ에 대한 a_c 및 Gr_c

	$\sigma = 100$		$\sigma = 250$		$\sigma = 10^3$		$\sigma = 10^4$		$\sigma = 10^5$	
Pr	a_c	Gr_c	a_c	Gr_c	a_c	Gr_c	a_c	Gr_c	a_c	Gr_c
.00001	2.149	4901.456	2.458	6091.647	2.633	7344.989	2.683	7866.994	2.688	7923.584
.0001	2.149	4900.671	2.458	6090.737	2.633	7343.889	2.683	7865.813	2.688	7922.395
.001	2.150	4892.868	2.459	6081.697	2.633	7332.971	2.684	7854.096	2.688	7910.592
.01	2.158	4819.630	2.465	5997.187	2.639	7231.494	2.689	7745.466	2.694	7801.204
.025	2.168	4715.309	2.474	5878.229	2.647	7091.000	2.696	7596.161	2.701	7650.979
.05	2.179	4583.221	2.481	5731.980	2.653	6924.669	2.703	7422.395	2.708	7476.474
.1	2.182	4438.625	2.482	5589.427	2.653	6785.885	2.702	7288.595	2.707	7343.376
.5	2.182	4944.059	2.527	6176.271	2.725	7478.609	2.782	8027.240	2.788	8087.022
.71	2.223	4982.616	2.559	6177.479	2.749	7441.780	2.803	7973.267	2.810	8031.113
1.	2.240	4929.405	2.566	6110.959	2.749	7355.717	2.802	7877.206	2.807	7933.885
2.	2.221	4830.949	2.542	6025.218	2.722	7269.530	2.773	7787.569	2.779	7843.750
3.	2.212	4824.177	2.534	6023.379	2.713	7270.983	2.765	7789.919	2.770	7846.181
5.	2.209	4828.619	2.531	6030.762	2.710	7281.397	2.762	7801.278	2.767	7857.627
7.	2.209	4830.305	2.531	6033.943	2.710	7285.685	2.762	7805.757	2.767	7862.114