

有限要素法에 依한 矩形斷面의 溫度分布와 Computational Effort에 關한 研究

龍 鑄 澤 *

A Study on the Temperature Distribution and Computational Effort of Rectangular Cross-Section by the Finite Dynamic Element Method

Ho Taek Yong

ABSTRACT

The aims of this study are to obtain a suitable method and a proper mesh for investigation of the temperature distribution and heat transfer.

The relative errors of temperature distribution and heat transfer for each mesh are acquired in accordance with linear finite element (FEM 3), square finite element (FEM 6), cubic finite element (FEM 10), and finite difference method (FDM).

It has been found that FEM 10 is the most accurate measure to obtain the temperature distribution and heat transfer.

However, no significant results have been obtained successfully, because when higher order finite element methods are used the more computational efforts are necessary due to the discretization of elements.

The results of this study are as follows ;

1. In case of $a=b=L$, meshes for less than 1% relative errors (temperature distribution) acquired in various methods to exact solution are 2×2 , 4×4 , 8×8 and 8×8 for each FEM 10, FEM 6, FEM 3 and FDM and $a=L$, $b=1/2L$ are 10×5 for each FEM 3 and FDM.

And the tendency of results acquired of heat transfer is similar to those above.

2. In computational efforts ($a=b=L$), FEM 6 has taken 21 times and FEM 10 154 times FEM 3 and FDM and FEM 3 is the same as FDM.

* 正會員, 東洋工業専門大學

NOMENCLATURE

a : length of x
 A : area
 b : length of y
 B : derivative of the shape function
 C : capacitance matrix
 f : force vector
 g' : heat generation
 h : heat transfer coefficient
 k : thermal conductivity
 K : conduction and convection matrix
 n : outward normal vector
 N : shape function
 q : heat flux
 S : surface
 t : time

T : temperature
 V : volume
 ρc : heat capacity
 $[]$: square matrix
 $\langle \rangle$: column matrix
 $[]$: row matrix
 Superscript
 (e) : element
 T : transpose
 Subscript
 c : conduction
 h : convection
 x, y, z : direction
 ∞ : condition in the surrounding

I. 序論

傳熱解析에 有限要素法을 이용할 때의 解의 誤差를 적게 할 目的으로 要素의 補間多項式의 次數를 높이거나 要素를 많이 分割하는 傾向때문에 經濟的 時間의 損失이 많았다.

本研究에서는 이 損失을 적게 할 目的으로 矩形斷面에 대하여 3 角形 要素의 補間多項式이 1次, 2次, 3次式 要素인 有限要素法과 差分法을 이용하여 溫度分布와 傳熱效率을 求하고, 이것을 正確解와 比較検討하였으며, Computational effort 를 求함으로써 最適의 近似解法과 mesh 를 찾았다.

$a=b=L$ 인 矩形斷面의 溫度分布의 平均相對誤差가 1% 以下가 되기 위해선는 3, 2, 1次式 有限要素法과 差分法의 mesh 가 각각 2×2 , 4×4 , 8×8 , 8×8 이어야 하며, $a=L$, $b=1/2L$ 인 斷面에서는 1次式 有限要素法과 差分法의 mesh 는 다같이 10×5 이어야 한다.

傳熱效率도 溫度分布와 비슷한 傾向이 있다.

1次式 有限要素法과 差分法의 Computational effort 는 같았으며, $a=b=L$ 인 矩形斷面에서 2次式 有限要素法은 약 21倍, 3次式 有限要素法은 약 154倍만큼 1次式 有限要素法보다 컸다.

II. 理論解析

2-2 热傳導 方程式과 境界條件

熱傳導 方程式과 境界條件은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_z \frac{\partial T}{\partial z}) + g'(x, y, z) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

境界界面이 一定 溫度로 유지되는 경우와 傳導와 對流에 의한 热損失이 생기면 境界條件은 (2) (3)式과 같다.

$$T = T(x, y, z) \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z + q_c + h(T - T_\infty) = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

2-2 汎函數와 最小值

方程式 (1) 을 최소화⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾ 시키고, 形狀函數를
導入하여 求한 微分값을 零으로 놓으면 다음과
같다.

$$([K_c^{(e)}] + [K_h^{(e)}]) \langle T \rangle + [C^{(e)}] \frac{\partial T}{\partial t} + \langle f^{(e)} \rangle = 0 \quad \dots \quad (4)$$

여기서

$$[K_c^{(e)}] + [K_h^{(e)}] = \int_{v_0} B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \\ + \int_{sh} N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

$$[C^{(e)}] = \int_V \rho c [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dV \dots \dots \dots (6)$$

$$\langle f^{(e)} \rangle = -\int_v g' \lfloor N^{(e)} \rfloor^T dV + \int_s q_c \lfloor N^{(e)} \rfloor^T dS - \int_s h T_\infty \lfloor N^{(e)} \rfloor^T dS \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

$$[D^{(e)}] = \begin{Bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{Bmatrix}$$

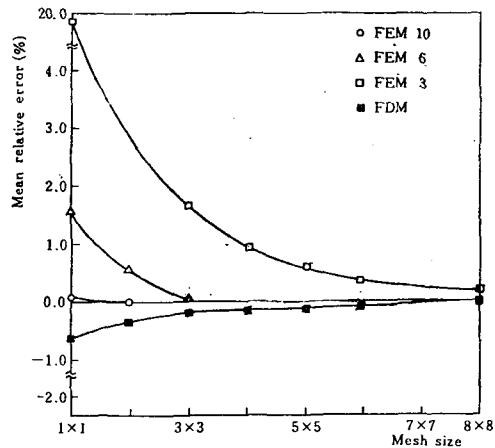
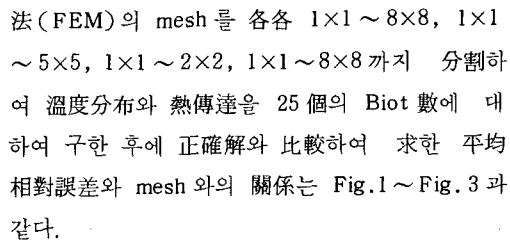


Fig.1 Temperature distribution of internal and adiabatic points

III. 數值計算

本研究에서 解析의 簡便化와 正確性 등을 考慮하여 热傳導 係數는 一定하고, 各要素 自體 内에 热源이 없는 2次元 定常狀態를 假定하였다.

한 면은一定溫度 t_0 , 두 면은斷熱되어 있고, 나머지 한 면은對流로인한熱傳達이 이루어진다.

3-1 解析 例

3-1-1 温度分布와 热傳達 ($a=b=L$)

3 角形 要素의 補間 多項式이 1, 2, 3 次式인
有限要素法 (FEM 3, FEM 6, FEM 10) 과 差分

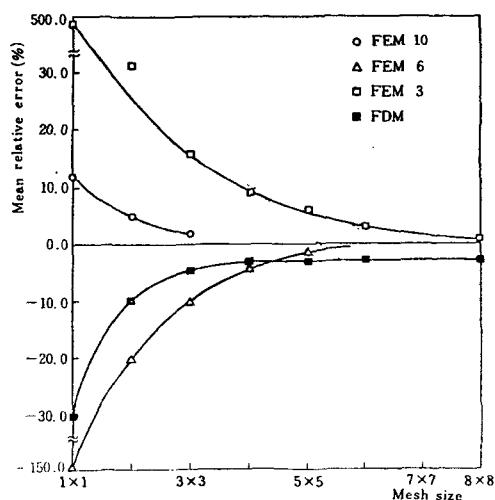


Fig.2 Temperature distribution at convectional points

次數가 높을 수록 溫度分布와 傳熱效率의 平均 相對誤差가 적음을 알 수 있고 溫度分布에서 좋은 結果를 얻었다고 해서 傳熱效率도 반드시 좋은 것은 아니었다.

Fig.2 와 Fig.3에서 FEM 6가 陰의 誤差를 갖는 것이 特異했으며, mesh가 적을 수록 FDM이 FDM 3보다 正確한 반면에, mesh가 커지면 그 反對의 現象을 나타낸을 알 수 있다.

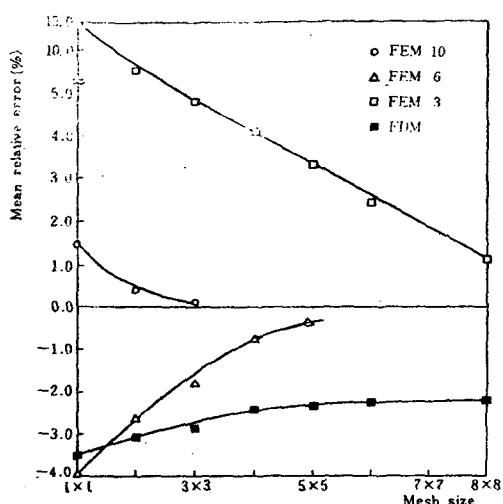


Fig.3 Mean relative errors in heat transfer against mesh

3-1-2 Computational effort ($a=b=L$)

D.H. Norrie, G.de.Vries⁽⁹⁾의 方法에 의한 Computational effort 와 平均 相對誤差와의 關係

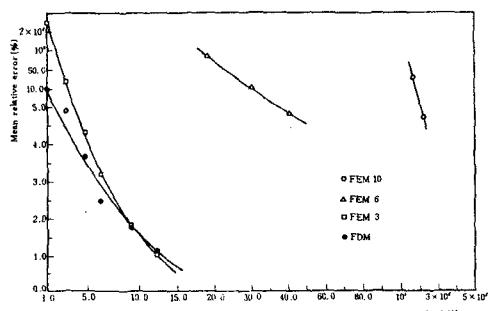


Fig.4 Computational effort ($a=b=L$)

關係를 圖示하면 Fig.4 와 같다.

여기서 n 은 次數, $(m+1)$ 은 傳導와 對流 매트릭스 핵의 半 bandwidth幅이다.

FEM 3과 FDM의 Computational effort는 같으며, FEM 6은 21倍, FEM 10은 154倍정도 FEM 3보다 커졌다.

3-1-3 溫度分布, 热傳達 및 Computational effort ($a=L$, $b=1/2L$)

3-1-1과 3-1-2에서 구한 結果를 基礎로 하여 FEM 3과 FDM에 대한 溫度分布, 热傳達 및 Computational effort를 圖示하면 Fig.5~Fig.8 과 같다.

Fig.5~Fig.8에서 1% 以下의 平均 相對誤差를 구하기 위해서는 FEM 3, FDM의 mesh가 10×5 以上이어야 하고, 모든 면에서 FDM이 FEM 3보다 優秀함을 알 수 있다.

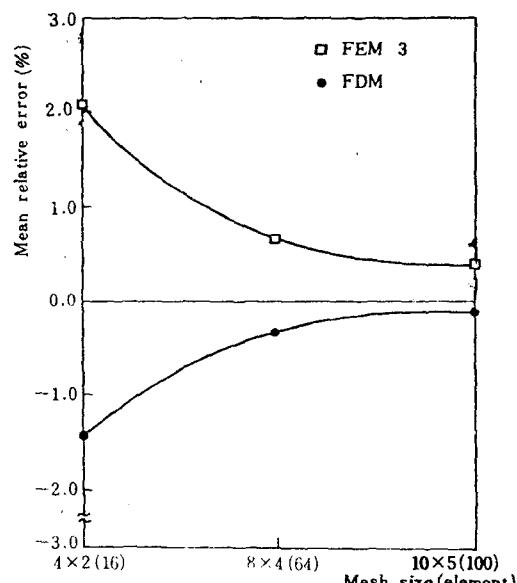


Fig.5 Temperature distribution of internal and adiabatic points

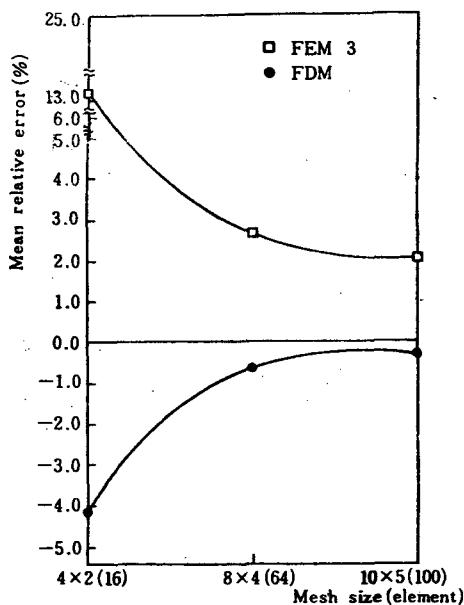


Fig. 6 Temperature distribution at convectional points

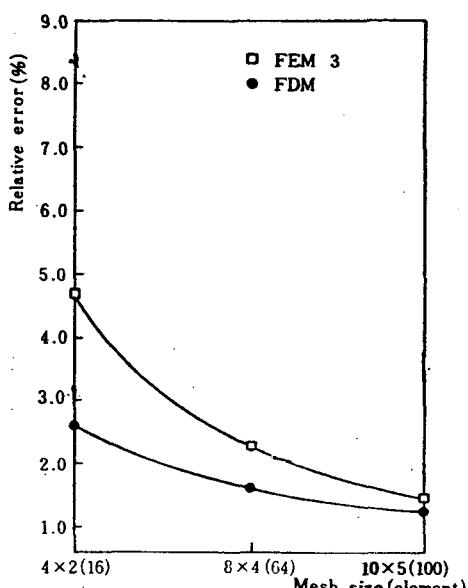


Fig. 7 Relative errors in heat transfer against mesh

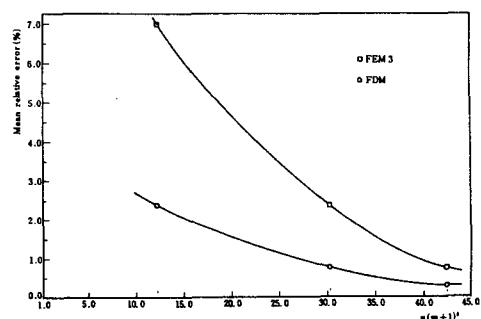


Fig. 8 Computational effort ($a=L$, $b=1/2L$)

그러나 不規則的인 境界를 갖는 傳熱 問題에 있어서는 热平衡 方程式을 일일히 修正해야 하는 어려운 점을 FDM은 갖고 있으므로 FEM 3 가 最適의 方法이다.

IV. 結論

本研究의 結果로부터 얻은 結論은 다음과 같다.

1. $a=b=L$ 斷面에서 1% 以下의 溫度分布, 傳熱效率 및 Computational effort 的 平均 相對誤差를 求하기 위한 FEM10, FEM6, FEM 3, FDM의 mesh 는 각각 2×2 , 4×4 , 8×8 , 8×8 이어야 하며, $a=L$, $b=1/2L$ 斷面의 mesh 는 FEM 3, FDM 똑같이 10x5 以上이어야 한다.
2. Computational effort 는 FEM 3과 FDM 이 같으며, 正四角形 斷面에서 FEM6은 FEM 3의 약 21倍, FEM 10은 FEM 3의 약 154倍이었다.

参考文獻

1. K.H. Huebner, The Finite Element Method for Engineers, John Wiley & Sons, pp.248-252, 1975.
2. 藤野勉, 热傳導と 热應力, 培風館, pp.40 ~ 450, 1972.

龍 鎬 澤

- 3 . L . J . Segerlind , Applied Finite Element Analysis , John Wiley & Sons , pp.71 ~ 77 , 1976.
- 4 . A . F . Emery & W . W . Carson , " An Evaluation of the Use of the Finite Element Method in the Computation of Temperature , " ASME, J . of Heat Transfer , pp. 136 ~ 145 , 1971 .
- 5 . 龍鎬澤 , " 蒸氣터어빈 氣翼과 로우터의 温度分布에 關한 研究 , " 漢陽大學校 大學院 , pp.22 ~ 28 , 1982 .
- 6 . K . K . Gupta . " Finite Dynamic Element Formulation for a Plane Triangular Element , " Int . J . Num . Meth . Engng , Vol . 14 , pp.1431 ~ 1448 , 1979 .
- 7 . G . E . Myers , Analytieal Methods in Conduction Heat Transfer , Mc Graw Hill , pp. 320 ~ 426 , 1971 .
- 8 . E . L . Wilson & R . E . Nickell , " Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis , " Nuclear Engng & Design , Vol . 4 , pp.276 ~ 286 , 1966 .
- 9 . D . H . Norrie & G . de Vries , An Introduction to Finite Element Analysis , Academic Press , pp.138 ~ 143 , 1978 .
- 10 . C . J . Chen & P . Li , " The Finite Analytic Method for Steady & Unsteady Heat Transfer Problems , " ASME , 80-HT-86 , pp.1 ~ 10 , 1980 .