韓國軍事運營分析學會誌
第10卷, 第2號, 1984.12

수송비와 핵심로 수송량의 복합수송문제

최 창 흡*
박 순 달**

Abstract

This paper deals with a transportation problem with two objectives, that is, transportation cost and vital-route shipment. In the transportation problem minimizing cost is sometimes conflicting minimizing vital-route shipment.

This paper develops an algorithm finding paneto-optimal solutions in minimizing vital-route shipment and cost, and also presents theoretical backgrounds for developing an algorithm.

1. 서 론

수송문제에 있어서 핵심로(vital-route)는 흔히 있을 수 있다. 예로써 군사작전에 있어서 어느 주보급로에 적게릴라의 활동이 예상되거나 혹은 주보급로가 적의 포화유효사거리내에 있다면 그 보급로는 군수물자 수송에 있어서 핵심로가 된다. 또는 어느 지역이 물자수송에 있어서 병목(bottleneck) 현상이 자주 발생하여 이 지역을 가능한 한 피하고저 한다면 이 지역의 수송로가 또한 핵심로의 역할을 하게 된다.

이러한 경우 물자수송에 있어서 가능한 한 수송비를 절약하고저 하면서 동시에 이 핵심로를 통하는 수송량도 줄이려고 한다. 그런데 수송비를 줄이면 동시에 핵심로의 수송량도 줄어질 수 있다면 좋겠지만 그렇지 않을 경우가 많다. 이런 경우에는 핵심로 수송량(VRS; Vital-Route Shipment)을 줄이면 수송비(TC:Total Cost)는 증가 하게 된다. 이 논문의 목적은 핵심로수송량을 줄이면서 동시에 수송비를 줄일때 나타나는 최적수송비와 최적핵심로수송량의 쌍 즉 파레토 최적해들을 모두 찾아 내려고 하는 것이다.

이 복합수송문제를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\text{목적함수}: \min TC = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}X_{ij}$$
$$\min VRS = X_{ij} \quad \{(i,j):\text{핵심로}\} \qquad \cdots\cdots(1)$$

제한조건 :

$$\sum_{j\in J} X_{ij} = a_i, \qquad \forall_{i\in I}$$
$$\sum_{i\in I} X_{ij} = b_j, \qquad \forall_{j\in J}$$

* 성균관대학교
** 서울대학교 공과대학

$X_{ij} > 0$, $\forall i \varepsilon I$
$\forall j \varepsilon J$

단 C_{ij}: 공급지 i 로 부터 수요지 j 까지의 단위수송비
X_{ij} : 공급지 i 로 부터 수요지 j 까지의 수송량
a_i : 공급지 i 의 공급 가능량
b_j : 수요지 j 의 필수 수요량
I : 공급지의 집합
J : 수요지의 집합

복합수송문제는 Glickman-Berger [4] 와 Srinivarsan-Thonmpson [8]이 연구한바가 있으나 이들의 연구는 수송비(TC)와 병목지점시간(bottleneck time)의 복합수송문제에 관한것이었다. 이들은 먼저 수송비를 최소화한 다음 점차 병목지점시간을 최소화해 나가는 방법을 개발하였다. 이 논문에서도 이와 비슷한 방법을 사용하여 먼저 수송비를 최소화 하는 해를 구한 다음 핵심로수송량을 가능한 범위내에서 최소화 하는 방법을 사용하기로 한다.

2. 이론적 배경

전술한 바와 같이 I 는 m개의 공급지의 집합이고, J 는 n 개의 수요지의 집합을 의미하며 다른 수송문제에서와 마찬가지로 I 의 요소를 行으로, J 의 요소를 列로 일컫기로 한다. 이것은 수송문제를 行列형태로 표현하였을 때 I 는 行으로, J 는 列로 나타나기 때문이다. 그리고 行과列를 구별할 필요가 없을 때는 통칭하여 線으로 표현하기로 하겠으며 또한 $i \varepsilon I$ 와 $j \varepsilon J$ 의 쌍(pair)(i, j)을 세포(cell)이라 부르기로 한다.

定義1. A를 세포의 집합이라고 두자. 선 g 가 선 h에 연결(connected)되었다는 것은 집합A 내에서 서로 다른 세포들로 이루어진 經路S가 다음 두조건을 만족시킨다는 것을 뜻한다.

$$S = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3), \cdots, (i_k, j_k)\} \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) (i_1, j_1)는 선 g에 있는 S의 유일한 세포이고, (i_k, j_k)는 선 h에 있는 S의 유일한 세포이다.

(2) 모든 t 는 $1 < t < k$에 대하여 다음중 하나가 성립한다.

(i) $i_t = i_{t-1}$ 그리고 $j_t = j_{t+1}$
(ii) $j_t = j_{t-1}$ 그리고 $i_t = i_{t+1}$

이 정의에 따라 선 g와 선 h가 다같이 行이거나 列이면 經路(2)는 우수개의 세포로 이루어져 있고, 선 g가 行이고 선 h가 列이거나 혹은 선 g가 列이고 선 h가 行이면 經路(2)는 기수개의 세포로 이루어져 있다. 그리고 기저(base)들의 집합B에 어떤 비기저세포(e,f)가 추가되면 이 비기저세포(e, f)를 요소로 갖는 순환(cycle) Γ가 생기고 이 Γ는 4개 또는 그이상의 우수개 세포들로 이루어 진다. 지금 S를 行 e로부터 列 f 까지의 유일한 經路라고 하면 이 $\Gamma = (e, f) \cup S$는 다음과 같이 두개의 집합 Γ_1 과 Γ_2 로 분할 될 수 있다. 즉

$$\Gamma = \{(e, f) = (i_0, j_0), (i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3), \cdots, (i_{2l-2}, j_{2l-2}), (i_{2l-1}, (j_{2l-1})\}$$

$$\Gamma_1 = \{(i_1, j_1), (i_3, j_3), \cdots, (i_{2l-1}, j_{2l-1})\}$$

$$\Gamma_2 = \{(i_0, j_0), (i_2, j_2), \cdots, (i_{2l-2}, j_{2l-2})\}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad , \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$$

단 Γ_1은 기수번째의 세포들로 이루어져 있고 Γ_2는 우수번째의 세포들로 이루어져 있다. 이 정의에 따라 모든行 또는 列은 Γ의 세포를 두개를(이경우 한세포는 Γ_1의 요소이고 다른 한세포는 Γ_2의 요소이다)가졌거나 그렇지 않으면 Γ의 세포를 하나도 가지고 있지 않는다.

지금 $(p, q) \in B$, $\Omega = B - (p, q)$라고 하자, 그리고

$$I_p = \{p\} \cup \{\ \Omega\text{내에서 行 } p\text{에 연결된 } i \varepsilon I \text{ 의 집합}\}$$

$Jp = \{$ Ω내에서 行 p에 연결된 $j\varepsilon J$ 의 집합$\}$

$Iq = \{$ Ω내에서 列 q에 연결된 $i\varepsilon I$ 의 집합$\}$

$Jq = \{q'\} \cup \{$ Ω내에서 列 g에 연결된 $j\varepsilon J$ 의 집합$\}$

이라고 두자. 그러면 $I = Ip \cup Iq$, $Ip \cap Iq = \phi$, 그리고 $J = Jp \cup Jq$, $Jq \cap Jp = \phi$임을 알 수 있다. 이것은 수송문제에 있어서 기저들의 집합B는 minimal spanning tree를 이루고 있기 때문이다. 그리고 $(p,q) \in [Ip \times Jp]$, $B-\{(p,q)\}$ 의 모든 요소는 $[Ip \times Jp] \cup [Iq \times Jq]$ 의 요소임은 당연하다.

義定 2. 두개의 기저가능해 B, B'이 주어졌을때 B와B′이 오직하나의 要素만이 다를때 이웃(adjacent)이라고 부른다. 그리고 더좋은 이웃기저가능해가 없으면 그 기저가능해를 국부적최적해(locally optimal solution)라고 한다.

定理 1. 수송문제에서 국부적최적해는 최적해이다.

증명. p483 ~ 484 [10] 에 증명되어 있다.

수송문제에서 기저들의 집합B가 주어졌다고 하자.그리고 $(p,q) \in B$, $\Psi = [Ip \times Jq] - \{(p,q)\}$라고 두고 $(r,s) \in \Psi$라고 두자. 그러면 $B \cup \{(r,s)\}$에는 (r,s)와 (p,q)를 포함하는 하나의 순환 γ를 형성하게 되고 이 순환 γ는 기수번째의 세포들의 집합 γ_1과 우수번째의 세포들의 집합 γ_2로 분할된다. 이때 새로운 집합B′을 다음과 같이 정의한다.

$$X'_{ij} = \begin{cases} X_{ij} + \triangle & (i,j) \in \Gamma_2 \\ X_{ij} - \triangle & (i,j) \in \Gamma_1 \\ X_{ij} & (i,j) \notin \Gamma \end{cases} \quad (3)$$

단, 여기서 $\triangle = \min_{(i,j) \in \Gamma_1} \{X_{ij}\}$ 이다.

그러면 다음 정리가 성립한다.

定理 2. 식 (3)에서 정의된 새로운 집합B′은 기저들의 집합이며 $\Psi = \phi$이면 (p,q)를 B에서 탈락시킬 수 없다.

〔증 명〕

$(r,s) \in \Psi$임으로 (r,s)와 기저들의 집합 B는 어떤 유일한 순환Γ를 형성한다.

그런데 Γ_1 내에서 최소수송량을 $\triangle$라고 하였으므로 (3)식에 의하여 Γ_1에 반드시 탈락되는 B의 요소가 존재한다. 이 탈락 요소를(ℓ, m)라고 하자. 지금 순환Γ에서 (ℓ, m)를 제거하면 Γ의 나머지 요소들은 다시 minimal spanning tree를 형성한다. 즉 $B' = B - \{(\ell,m)\} + \{(r,s)\}$는 일차독립인 요소가 됨으로 B′은 새로운 기저들의 집합이다.

만일 $\Psi = \phi$이면 기저들의 집합B′와 같이 순환을 형성할 수 있는 비기저세포가 존재하지 않는다는 뜻이다. 따라서 국부적인 방법에 의해 (p,q)를 탈락시킬 수는 없으며 **定理 1**에 의해 국부적이 아닌, 즉 여러 개의 세포를 동시에 교환하는 방법에 의해서도 (p,q) 를 탈락시킬 수 없게 된다. □

3. 해 법

전술한바와 같이 수송비와 핵심로수송량(VRS)을 최소화 하는 수송문제에 있어서 해법은 우선 표준수송문제의 해법으로 수송비가 최소화되는 해를 구한 다음 핵심로수송량을 최소화해 나가는 방법을 택한다.

먼저 표준수송문제의 최적해를 X^0라고 두자, 지금 핵심로가 (p,q)라고 할때 $X_{pq} = 0$이면 이문제는 핵심로수송량의 문제가 아니다. 그러나 $X_{pq} \neq 0$이면 이 X_{pq}를 줄여가면서 이에 대응하는 수송비의 쌍들을 구한다. 지금 X_{pq}를 줄일수 있는 후보자는 $[Ip \times Jq]$ 의 요소뿐이다. 〔정리 1 참조〕. 물론 이때 X^0가 표준수송문제의 최적해이기 때문에

$$C_{ij} - U_i - V_j \geq 0, \quad \forall (i,j)$$

이다. (여기서 U_i, V_j는 X_{ij}에 대한 쌍대변수이다)

지금

$$\min_{(i,j) \in [Ip \times Jq]} (C_{ij} - U_i - V_j) = C_{rs} - U_r - V_s$$

라 하자, B에 비기저세포(r,s)를 기저후보자로 취하면 가장적은량($C_{rs}-Ur-Vs$)의 수송비만이 증가하면서 핵심로수송량이 줄어지게 된다. 이러한 절차를 핵심로송수량을 줄일 수 있을때까지 계속하면 결국 定理 2에 의해 두가지의 목적함수를 최소화 할 수 있게 된다.

가. 해 법

단계 0. 주어진 a_i, b_j 그리고 $\{C_{ij}\}$에 대하여 표준수송문제의 한해법으로 최적해 TC^1을 구하고 주어진 핵심로(VR)의 수송량 VRS^1을 구하여 이들의 유효쌍해(TC^1, VRS^1)을 정한다. 이때의 optimal base B^1, optimal solution X^1을 구하고, dual variable U_i와 V_j를 구한다. $k=1$로 한다.

만일 $VRS^k=0$이면 단계 4로 간다.

만일 $VRS^k \neq 0$이면 단계 1로 간다.

단계 1 : (진입후보자를 결정한다)

1－1, 핵심로(VR)인 기저(p,q)에 대하여 Ip와 Jq를 구한후 $\Psi=[Ip \times Jq]$를구한다. 만일 $\Psi=\phi$이면 단계 4로 간다. $\Psi \neq \phi$이면 1－2로 간다.

1－2., $\Psi=[Ip \times Jq]$의 비기저세포중에서

$$(r,s)=\min_{(i,j)\in\Psi} \{C_{ij}-U_i-V_j\} \text{ 인 } (r,s)$$

를 진입후보자로 선정한다.

만일 tie인 경우는 임의로 선정하되 서열상 앞의 요소를 선정한다.

단계 2로 간다.

단계 2 :

2－1: 진입후보자 (r,s)와 B^k로 순환 Γ를 형성하고 Γ를 Γ_1과 Γ_2로 분할한다.

2－2: $\triangle=\min_{(i,j)\in\Gamma_1} \{X_{ij}\}$를 구한다.

새로운 B^k와 X^k를 구한다.

$$X^k=\{X_{ij}^k\}=\begin{cases} X_{ij}^k-\triangle, & (i,j)\in\Gamma_1 \\ X_{ij}^k+\triangle, & (i,j)\in\Gamma_2 \\ X_{ij}^k & , (i,j)\notin\Gamma \end{cases}$$

$\{X_{ij}^k\}$에 대한 dual variable $\{U_i\}$, $\{V_j\}$를 구하고 $k=k+1$로 한다.

2－3 : 새로운 B^k과 X^k에 대하여 수송비의 최적해TC^k를 구하고 VRS^k를 구하여 새로운 유효쌍해(TC^k, VRS^k)를 구한다. 단계 3으로 간다.

단계 3 :

만일 $VRS^k=0$면 단계 4로 간다.

만일 $VRS^k \neq 0$면 단계 1로 간다.

단계 4 :

(TC^k, VRS^k)를 나열한다. ▨

이것을 순서도로 나타내면 〔그림 1〕과 같다. (다음페이지 참조)

나. 예 제

다음 예제를 통하여 이해법을 적용해 본다. 이 예제는 공급지가 3이고 수요지가 4인수송문제를 해법의 각단계에 따라 차례차례로 푼것이며 핵심로는 (1,2)이다. 주어진 값은 단위수송비 $\{C_{ij}\}$와 수요량 b_j 그리고 공급량 a_i이다.

수요지 \ 공급지	D_1	D_2	D_3	D_4	공급량
S_1	6)	3) △	11)	7)	6
S_2	5)	8)	15)	9)	1
S_3	5)	8)	15)	9)	10
수요량	7	5	3	2	

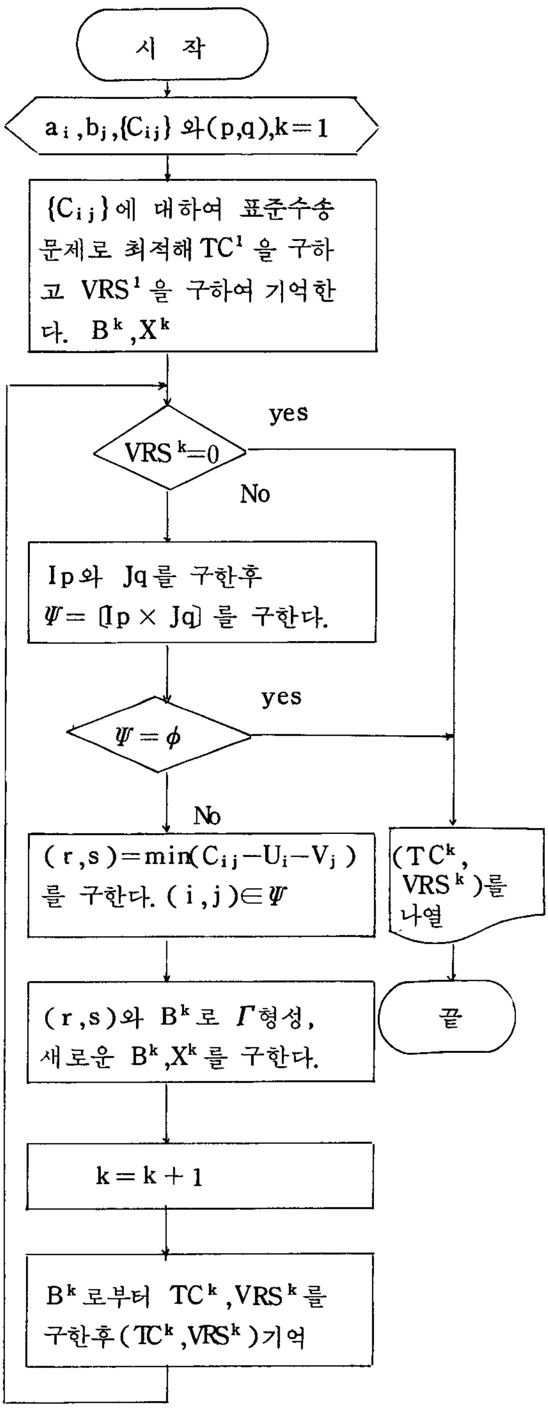
단계 0 : 표준수송문제의 해법으로 최적해 TC^1을 구한다.

수요지 \ 공급지	D_1	D_2	D_3	D_4	U_i	공급량
S_1	6)	3) ⑤	11)①	7)	0	6
S_2	5)	8)	15)①	9)	4	1
S_3	5)⑦	8)	15)①	9) ②	4	10
V_j	1	3	11	5		
수요량	7	5	3	2		

$TC^1=109$ $VRS^1=5$

$(TC^1, VRS^1)=(109, 5)$

$k=1$, $VRS^1 \neq 0$, 단계1로 간다.



〔그림 1〕 순서도

단계 1

1−1 : $(p,q) = (1,2)$

$Ip = I_1 = \{1,2,3\}$

$Jq = J_2 = \{2\}$

$\Psi = [I_1 \times I_2] = \{(1,2),(2,2),(3,2)\}$

$\Psi \neq \phi$ 임으로 1−2로 간다.

1−2 : $(r,s) = \{(2,2),(3,2)\} = \{(2,2)\}$

$C_{ij}-U_i-V_j$ 1 1

단계 2

$(r,s) = \{(2,2)\}$

2−1 :

수요지 / 공급처	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1		⑤	①	
S_2		□	①	
S_3	⑦		①	②

$\Gamma_1 = \{(1,2),(2,3)\}$

$\Gamma_2 = \{(2,2),(1,3)\}$

2−2 : $\triangle = \min\{1,5\} = 1$

수요지 / 공급처	D_1	D_2	D_3	D_4	U_i
S_1	6)	3) ④	11)②	7)	0
S_2	5)	8) ①	15)	9)	5
S_3	5) ⑦	8)	15)①	9)②	4
V_j	1	3	11	5	

2−3 : $TC^2 = 110$ $VRS^2 = 4$

$(TC^2, VRS^2) = (110, 4)$

단계 3 : $VRS^2 \neq 0$, 단계 1로 간다.

단계 1 :

1−1 : $(p,q) = (1,2)$

$Ip = I_1 = \{1,3\}$

$Jq = J_2 = \{2\}$

$\Psi = [I_1 \times J_2] = \{(1,2),(3,2)\}$

1−2 : $(r,s) = \{(3,2)\}$

단계 2 : $(r,s) = (3,2)$

2-1 :

수요지 / 공급지	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1		④	②	
S_2		①		
S_3	⑦		①	②

$\Gamma_1 = \{(1,2),(3,3)\}$

$\Gamma_2 = \{(3,2),(1,3)\}$

2-2 : $\triangle = \min\{1,4\} = 1$

$K = 3$

수요지 / 공급처	D_1	D_2	D_3	D_4	U_i
S_1	6)	3)③	11)③	7)	0
S_2		8)①			5
S_3	5) ⑦	8)①		9)②	5
V_j	1	3	11	4	

2-3 : $TC^3 = 111$ $VRS^3 = 3$

$(TC^3, VRS^3) = (111, 3)$

단계 3 : $VRS^3 \neq 0$, 단계 1 로 간다.

단계 1 :

1-1 : $(p,q) = (1,2)$

$Ip = I_1 = \{1\}$

$Jq = J_2 = \{1,2,4\}$

$\Psi = [I_1 \times J_2] = \{(1,1),$
$(1,2),(1,4)\}$

1-2 : $(r,s) = \{(1,1),(1,4)\} = \{(1,4)\}$

$C_{ij} - U_i - V_j$ 6 3

단계 2 : $(r,s) = (1,4)$

2-1 :

수요지 / 공급지	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1		③	③	
S_2		①		
S_3	⑦	①		②

$\Gamma_1 = \{(1,2),(3,4)\}$

$\Gamma_2 = \{(1,4),(3,2)\}$

2-2 : $\triangle = \min\{3,2\} = 2$

$K = 4$

수요지 / 공급지	D_1	D_2	D_3	D_4	U_i
S_1	6)	3)①	11)③	7)②	0
S_2		8)①			5
S_3	5)⑦	8)③			5
V_j	0	3	11	7	

2-3 : $TC^4 = 117$ $VRS^4 = 1$

$(TC^4, VRS^4) = (117, 1)$

단계 3 : $VRS^4 \neq 0$, 단계 1 로 간다.

단계 1 :

1-1 : $(p,q) = (1,2)$

$Ip = I_1 = \{1\}$

$Jq = J_2 = \{1,2\}$

$\Psi = [I_1 \times J_2] = \{(1,1),$
$(1,2)\}$

1-2 : $(r,s) = (1,1)$

단계 2 : $(r,s) = (1,1)$

2-1 :

수요지 / 공급지	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1		①	③	②
S_2		①		
S_3	⑦	③		

$\Gamma_1 = \{(1,2),(3,1)\}$

$\Gamma_2 = \{(1,1),(3,2)\}$

2-2 : $\triangle = \min\{7,1\} = 1$

$K = 5$

수요지 / 공급지	D_1	D_2	D_3	D_4	U_i
S_1	6) ①		11) ③	7)②	0
S_2		8) ①			1
S_3	5) ⑥	8) ④			−1
V_j	6	9	11	7	

2-3 : $TC^5 = 123$ $VRS^5 = 0$

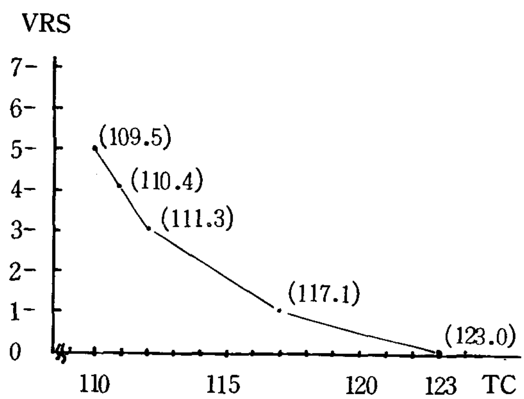
$(TC^5, VRS^5) = (123, 0)$

단계 3 : $VRS^5 = 0$, 단계 4 로 간다.

단계 4 : (TC^k ,VRS^k)를 나열한다.

K=1 (109, 5)
K=2 (110, 4)
K=3 (111, 3)
K=4 (117, 1)
K=5 (123, 0) ▨

이 pareto최적해인 (TC^k ,VRS^k)를 그림으로 나타내 보면 〔그림 2〕와 같이 된다.



〔그림 2〕 Pareto 최적해

4. 결 론

이상에서 수송문제에 있어서 수송비와 동시에 핵심로수송량을 최소화하는 방법을 제시하였다. 이방법은 표준수송문제의 해법으로 수송문제를 푼 다음에 핵심로수송량을 줄일수 있는 후보자를 찾아 기존해를 개선해 나가는 간편한 방법이다. 그리고 기저에 진입되는후보자는 모든세포대신에 〔$I_p \times J_q$〕 의 세포에서 찾으므로 계산속도가 효율적이다.

핵심로수송량문제는 특히 군수수송분야에 자주 일어나는 문제인데 이핵심로 수송문제에서 수송비를 동시에 고려할 수 있으면 더욱 효과적일 것이다. 이런점에서 이 논문의 뜻을 찾을 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Balachandran, V. and Thompson, G. L. "An operator theory of Parametric programming for the generalized transportation problem – I basic theory" *Nav. Res. Log. Quart.* Vol. 22 (1975).
2. Bookbinder, J. H. and Sethi, S. P., "The Dynamic transportation problem: a survey", *Nav. Res. Log. Quart.* vol. 27 (1980).
3. Geoffrion, A. M., "Solving bicriterion mathematical programmings" *Operations Research,* vol. 15, No. 1 (1967).
4. Glickman, T. S. and Berger, P.D., "Cost/completion date tradeoff in the transportation problem", *Operations Research,* vol. 25, No. 1 (1977).
5. Lubore, S. H., Rathiff, H. D. and Sicilia, G. T., "Determining the most vital link in a flow network," *Nav. Res. Log. Quart.* vol. 18, No. 4 (1971).
6. Srinivarsan, V. and Thompson, G. L., "An operator theory of parametric programming for the transportation problem – I", *Nav. Res. Log. Quart* vol. 19(1972).
7. ______, "Algorithm for minimizing total cost, bottleneck time and bottleneck shipment in transportation problem", *Nav. Ras. Log. Quart.* vol. 23, No. 4 (1976).
8. ______, "Determining cost vs time pareto-optimal frontiers in multi-modal transportation problem", *Transportation science* vol. 11, No. 1 (1977).
9. ______, "Determining optimal growth paths in logistics operation", *Nav. Res. Log. Quart,* vol. 19, No. 4 (1972).
10. Szwarc, W. "Some remark on the time transportation problem" *Nav. Res. Log. Quart* vol. 18 (1971).