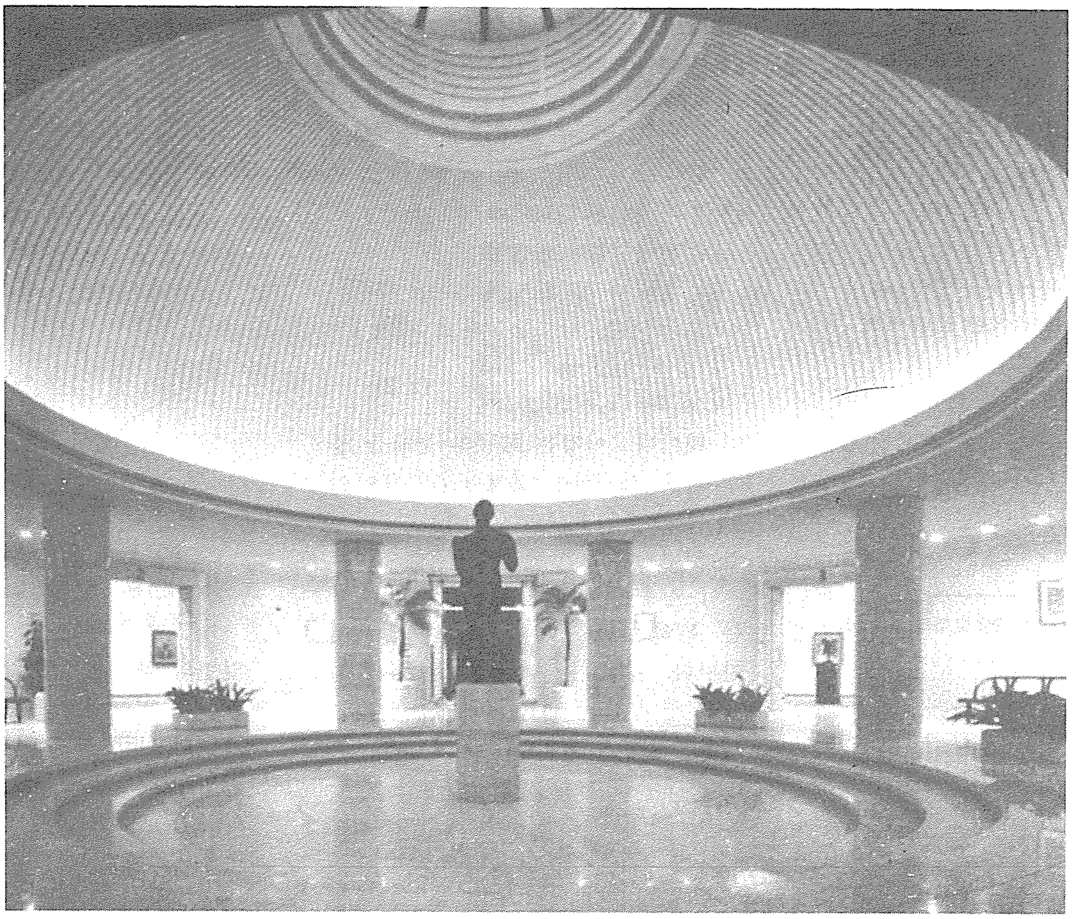
圖形의 數値化와 數値의 圖形化 〈連載 2〉

〈資料：飯塚英雄 著・設計의 컴퓨터手法에서〉



1. 平面上의 點의 表現

지금 그림용지(畵用紙) 위에 點이 한점 찍혀 있다고 하자. 이 그림종이를 보면 점이 어디에 찍혀 있는지 한눈에 알 수 있지만, 만일 전화로 그림의 위치를 전하고자 한다면 어떻게 표현할 것인가. 〈畵面中央에서 약간 왼쪽이나 아래쪽〉이라고 할지 모르겠다. 실생활에서는 이 정도의 대략적인 정보전달이 많으며, 또한 이것으로 귀중한 정보가 될 때도 있다. 그러나 보통은 좀 더 정확하게 〈밑에서부터 몇 센티미터, 왼쪽에서 몇 센티미터의 곳〉이라고 할 것이다.

컴퓨터에 圖形을 인식시키는 데는 말로서 圖形을 전하는 때와 같이 數値化된 정보를 전하는 것이 보통이다. 가장 간단한 圖形인 어떤 점의 위치는 畵用紙의 밑변을 x축, 왼변을 y 축으로 보고 x·y좌표로 표현하는 것이 일반적일 것이다. 때에 따라서는 極座標로 표현할 수도 있다. 畵用紙의 左下隅를 極으로 하여 점까지의 길이를 r, 下邊으로부터의 각도를 θ 로 하고 $r \cdot \theta$로 표현한다. 또한 左下隅과 左上隅로부터의 거리($r_1 \cdot r_2$)로서 나타낼 수도 있다. 어느 방법으로나 2次元 평면상의 점을 표시하는 데에는 두개의 값을 필요로 한다.

點의 위치를 읽어내기 위해 사용되는 座標讀取裝置로부터는 $x \cdot y$ 좌표치에 따라 컴퓨터에 전달되며, 圖形을 그리는 프롯터에도 $(x \cdot y)$좌표치에 의해 펜의 이동위치가 지시되는 경우가 있다. 보통 점을 나타내는 데는 $x \cdot y$ 좌표를 사용하지만 이러한 점의 위치 인식과는 전혀 다른 방법이 있다.

畵用紙의 畵画을 기본적인 줄눈목으로 작게 쪼개어 점이 있는 줄목을 1, 점이 없는 줄목을 0으로서 畵面 全體에 표시하는 방법이다. 점이 여러개 있어도 또한 점이 모여서 검게 되는 부분이 있어도, 0이냐 1이냐의 상태만으로서, 즉 말하자면 2進法으로 표현되는 惑星로켓으로 부터의 사진은 이와 같이 網目의 濃淡의 정도를 On-off의 신호로 바꾸어 전달하는 것이며, 컴퓨터의 入出力장치에도 이 같은 방법으로 畵面을 표현하는 것이 등장하고 있다.

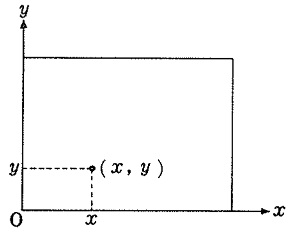


圖 1：直交座標에 의한 점의 표현

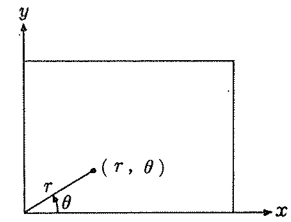


圖 2：極座標에 의한 점의 표현

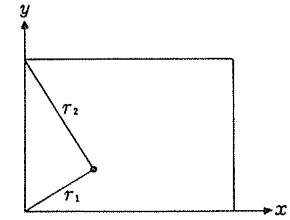


圖 3：두 모서리(隅)로부터의 거리에 의한 점의 표현

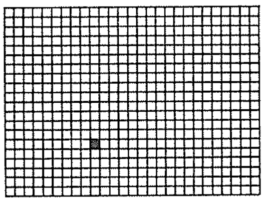


圖 4：網目에 의한 점의 표현

2. 平面上의 直線表現

點 다음으로 直線은 어떻게 나타낼 것인가에 대하여 생각해 보자.

數學이 가르쳐 주는 것과 같이 $x \cdot y$ 좌표계에 있어서 직선의 방정식은

$ax+by+c=0$

로 나타냄으로, 原點을 앞에서와 마찬가지로 畵用紙의 左下隅에 정한다고 약속해 두고 계수 $a \cdot b \cdot c$의 세개의 값을 전하면 컴퓨터는 이 직선을 알게 된다. 그러나 이 식은 직선을 무한히 긴 것으로 나타내고 있기 때문에 圖 5의 實線部分만을 표현하는 데는 불편하다. 建築의 경우에 나타나는 직선은 대개 有限의 길이를 갖는 직선으로서 그 길이, 어디서 어디까지가 중요한 의미를 갖는 경우가 많다. 직선의 부분인 線分은 역시 兩端의 點으로 나타내는 경우가 좋을 것 같다. 線分兩端의 점을 1·2로 이름붙여 각각의 좌표를 $(x_1 \cdot y_1) \cdot (x_2 \cdot y_2)$로 하면 1本의 線分은 네개의 수치에 의해서 표현된다.

이 線分의 길이는 잘 알려진 바와 같이

$$l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad (2 \cdot 1)$$

인 것이다. 이것은 점 1·2가 어떤 위치관계에 따라서도 성립되는 매우 편리한 식이다. 이 값이 0이 될 때에는 $x_1=x_2 \cdot y_1=y_2$, 즉 점 1·2가 중복되었을 때라는 것을 알 수 있고 판별하는 데에 자주 쓰인다.

점 1에서 점 2로 향하는 방향이 x축과 이루는 각도를 θ라고 하면

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= (y_2-y_1)/l \\ \cos\theta &= (x_2-x_1)/l \end{aligned}\right\} \quad (2 \cdot 2)$$

인 것이다. 이것은 圖形의 문제를 풀 때 자주 사용되는 것이나 l이 0이 아닌 것을 확인한 후에 계산하지 않으면 안된다.

이 경우에 한하지 않고 컴퓨터에서는 특히 나눗셈에 주의하지 않으면 안된다. 除數가 0인 경우는 나눗셈을 실행하지 않거나, 실수를 알리는 멧시지를 인쇄하거나, 프로그램言語의 處理系에 따라 다른 결과를 가져오며, 하여튼 그 이하의 계산이 무의미하게 되는 경우가 있으므로 0으로서 나눗셈을 하지 않도록 프로그램을 만들지 않으면 안된다.

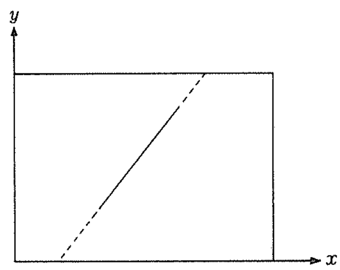


圖 5：線分

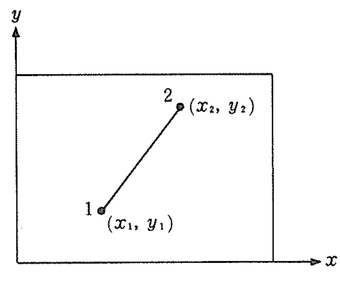


圖 6：兩端의 좌표에 의한 線分의 표현

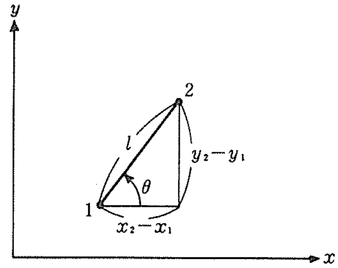


圖 7

3. 平面上의 曲線表現

곡선은 어떻게 표현하는 것이 좋을까. 關數로서 표현할 수 있는 곡선, 예를 들면 圓과 같은 경우는 중심의 위치와 반경으로 표현할 수 있다. 곡선 중에서도 圓은 특별하다고 할 수 있다.

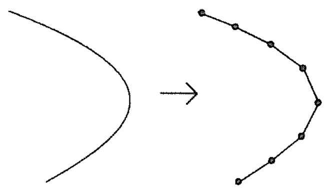


圖 8：곡선은 有限個의 線分으로 바꾸어 놓을 수 있다.

일반의 곡선은 折線, 즉 연속하는 線分으로 바꾸어 놓을 수 있는 것이 보통이다. 折點의 $(x \cdot y)$좌표를 알면 컴퓨터는 곡선을 인식하지만, 折線이 미흡하면 데이터量은 작지만 먼저의 곡선을 충실하게 나타내지 못한다. 折線이 잘면(細) 원래의 곡선에는 충실하나 데이터量이 많아진다. 데이터量이 많으면 컴퓨터 속에서 기억하는 장소를 많이 차지하게 되며 계산시간도 오래 걸려 때에 따라서는 오차가 생기기 쉽다. 곡선의 折線表現은 이러한 점을 생각하여 때에 알맞는 필요한 정도를 결정하지 않으면 안된다.

건축에서 곡선이라고 하면 대체로 圓(그 회전체인 球를 포함해서)이 많고 복잡한 곡선이나 곡면이 나타나는 것은 드물다. 비행기·자동차·선박 등의 분야에서 곡선을 취급하는 것이 주체로 되어 있다.

4. 座標變換

圖 9와 같이 점 $1(x_1 \cdot y_1)$을 원점으로 하는 새로운 座標系를 생각한다. 점 p의 원래 좌표$(x \cdot y)$와 새로운 좌표$(x' \cdot y')$와의 관계는

$$\left.\begin{aligned} x &= x'+x_1 \\ y &= y'+y_1 \end{aligned}\right\} \quad (2 \cdot 3)$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - x_1 \\ y' &= y - y_1 \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot4)$$

인 것이다.

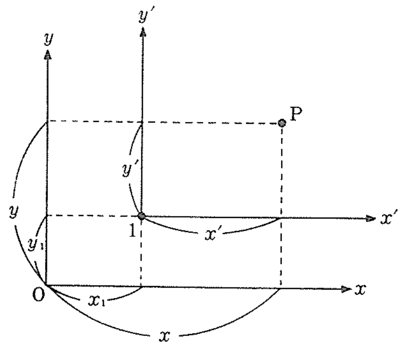


圖 9 : 좌표축의 평행이동

다음에는 원래의 좌표계를 원점의 주위에 角 θ만큼 회전시킨 새로운 좌표계를 생각한다. 이 때에는 舊좌표계에서 생각한 점 p의 좌표$(x \cdot y)$와 新좌표계에서 생각한 점 p의 좌표$(x' \cdot y')$와의 사이에 다음의 관계가 성립된다는 것을 圖 10을 통해 알 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y &= x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot5)$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos\theta + y \sin\theta \\ y' &= -x \sin\theta + y \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot6)$$

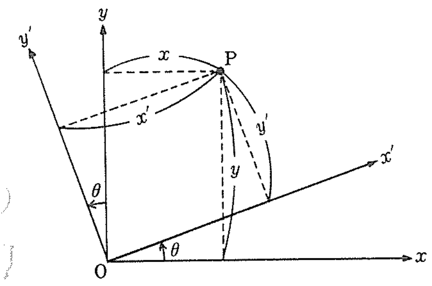


圖 10 : 좌표축의 회전

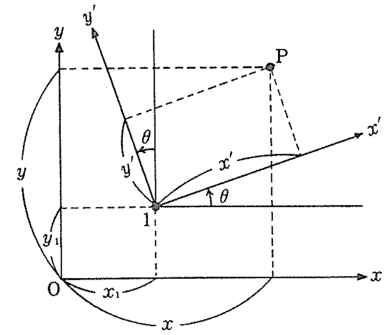


圖 11 : 좌표축의 평행이동과 회전

圖 11과 같은 원점을 점 1 $(x_1 \cdot y_1)$까지 평행이동하여 그 주위에 θ만큼 회전해서 된 새로운 좌표계를 생각한다. 점p의 舊좌표$(x \cdot y)$와 新좌표$(x' \cdot y')$와의 관계는 위에서 설명한 두개의 좌표변환을 조합하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta + x_1 \\ y &= x' \sin\theta + y' \cos\theta + y_1 \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot7)$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x - x_1) \cos\theta + \\ &\quad (y + y_1) \sin\theta \\ y' &= -(x - x_1) \sin\theta + \\ &\quad (y - y_1) \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot8)$$

이 좌표변환式은 고등학교 수학시간 등에서 배우고 있으나 실제로 이 계산을 경험해 본 사람은 적다. 그럼으로 이 식을 많은 사람들은 기억하고 있지 않다. 그러나 컴퓨터로서 圖形의 문제를 다루고자 한다면 이 식은 매우 중요하다. 다음 장에서 설명하는 투시도를 컴퓨터로서 취급할 때이 식은 매우 중요한 역할을 한다. 컴퓨터에서는 이렇듯 잊어버렸던 수학, 그것도 부끄럽지 않는 수학의 활약이 있어 생각지도 않던 효과를 발휘할 때가 있다.

5. 圖化機에의 出力

프롯터나 그래픽 디스프레이 장치등 컴퓨터로부터 圖形을 出力하는 장치를 총칭해서 圖化機라 부르고 있다.

프롯터는 종이 위에 펜을 움직여 (종이 속에서 로라에 감기면서 움직이는 것도 있다.) 그림을 그리거나 $x \cdot y$좌표를 지시함에 따라 현재의 펜 위치에서 똑바로 그 위치에 펜을 움직이게 하는 것이 기본동작으로 되어 있다. 이 이동 때에 펜을 아래로 낮추면 직선이 그어지고 펜을 지면으로부터 올려 놓으면 단순한 펜의 이동이 된다.

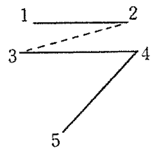


圖 12

예를 들면 〈ラ〉 모양의 글자를 프롯터로 쓸 때 펜은 圖 12와 같이 1·2·3……5로 움직이나 1·3의 점에서는 펜을 낮추고 2·5의 점에서는 펜을 올린다. 4 의 점에서는 펜을 그대로 두고 움직이게 된다.

이와 같이 직선을 기본단위로 하는 圖化의 방식은 다른 圖化機에서도 거의 공통인 것이다. 圖化機에 곡선을

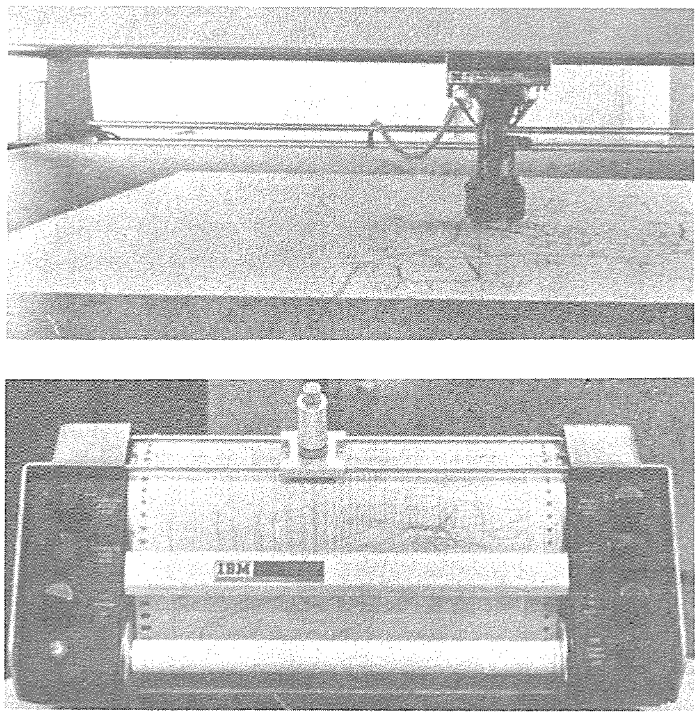


圖 13 : 프롯터 —— 위는 用紙를 평면상에 놓고 펜이 x·y방향으로 이동하면서 作圖하는 형식 아래는 x방향은 원통 드럼에 말려진 용지(卷)가 움직이고 y방향은 펜이 작동하여 作圖하는 형식이다.

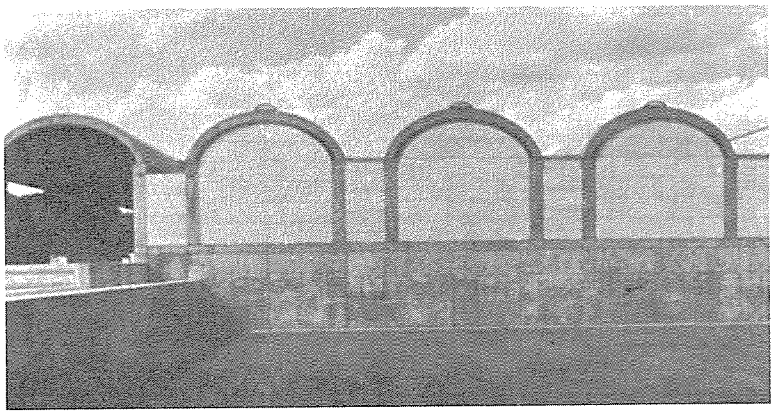


圖 14 : 긴벨 미술관

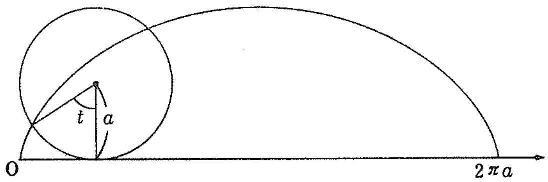


圖 15 : 사이크로이드曲線

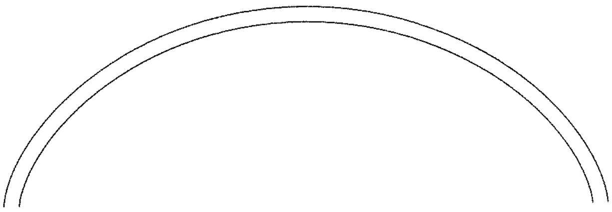


圖 16 : 프롯터로 그린 사이크로이드曲線(내측)과 그 평행곡선(외측)

出力하고자 할 때 짧은 직선의 이음으로 바꾸지 않으면 안된다. 그렇다면 곡선을 그릴 때 언제나 折線으로 바꾸어주지 않으면 안되느냐 하면 반드시 그렇지 않다. 많은 圖化機에는 사용하기 쉽게 편리한 소프트 웨어(프로그램類)가 준비되어 있는 경우가 많으며 자동적으로 짧은 折線으로 변환시켜 준다.

圓의 作圖는 중심점과 반경이 주어지는 것만으로도 좋으며, 어느 점의 좌표치를 주면 그 點間을 부드러운 곡선으로 作圖(스므징이라고 한다.)하기도 한다. 소프트 웨어가 준비되어 있지 않은 곡선은 프로그램을 만들어 짧은 折線으로 바꾸어 둘 필요가 있다. 이러한 경우의 作圖를 위해 아르고리즘을 다음에 나타내 본다.

古今을 통하여 건축에서는 가장 단순한 곡선으로서 어떤 圓 또는 圓弧가 사용되어 왔다. 현대건축 가운데도 수학으로 알려져 있는 것 외에 아름다운 곡선이나 곡면이 사용된 것도 있다. 미국 텍사스주에 세워진 긴벨 미술관의 보울트도 그 하나의 예이다. 切口가 사이크로이드라고 하는 곡선을 취하고 있는 것으로 알려져 있다.

사이크로이드란 반경 a의 圓이 직선상을 스쳐 지나지 않고, 구를 때 그 圓周上의 定點이 그리는 곡선으로서 다음 식으로 나타낸다.

$$\left.\begin{array}{l} x=a(\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{array}\right\} \qquad (2\cdot9)$$

圓周上의 定點이 원의 중심을 정점으로 해서, 원과 직선의 接點과 이루는 角이 t이며 원이 1회전한다. 즉 t가 0에서 2π까지 변화하면 훌륭하고 아름다운 곡선이 그려진다.

t를 0으로부터 Δt만큼 증가해서, 식(2·9)에서 구한 $(x\cdot y)$좌표에 圖化機의 펜을 움직이면 圖 16의 내측과 같은 곡선이 그려진다. 이 그림의 외측 곡선은 내측의 사이크로이드에 평행으로 그린 것이다. 이러한 곡선의 필요는, 예를 들면 지붕 슬래브 두께를 일정하게 한다든가 도로의 곡선폭을 일정하게 한다든가 하는 경우에 생긴다.

사이크로이드曲線에 일정폭으로 늘어나는 곡선도 사이크로이드가 아니므로 數式에 따라 그릴 수는 없다. 거기에서 원래의 사이크로이드의 接線에 수직으로 거리 d만큼 떨어진 點列을 정하여 묶는 것으로 한다. 接線이라 해서 원래의 곡선을 微分하려는 생각은 하지 않아도 좋다. 먼저 사이크로이드를 그릴 때 사용된 이웃한 두 點을 연결하는 직선을 近似的인 接線으로 보면 다음과 같이 해서 평행곡선을 그릴 수가 있다.

먼저 $x_s=y_s=0$으로 한다. 최초에 $t=\Delta t$로 해서

$$x=a(t-\sin t)$$
$$y=a(1-\cos t)$$

를 구한다.

$l=\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_s)^2}$ 을 사용하여

$$\left(x-\frac{d(y-y_s)}{l},\ y+\frac{d(x-x_3)}{l}\right)$$

의 점에 圖化機의 펜을 움직인다. $x_s\cdot y_s$를 각각 $x\cdot y$에 같게 놓고 t를 Δt만큼 증가해서 上記의 과정을 되풀이하고, t가 2π가 될 때 그치게 하면

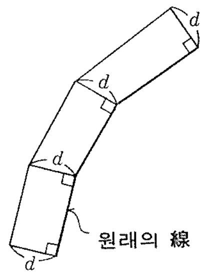


圖 17 : 幅을 붙이는 방법

사이크로이드의 평행곡선이 作圖되는 것이다. 圖 16의 외측곡선은 이와 같이 해서 그린 것이다. (「10. 실제의 프로그램例」 참조)