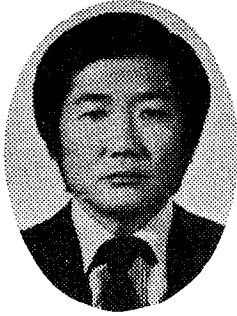


〈論 文〉



# 斜面安定에 應用되는 여러가지 計算法

(The Calculus of Variations Applied to  
Stability of Slopes)

大韓産業安全協會

技術理事 金 慶 鎭\*

## ABSTRACT

This work presents a method for the determination of the safety factor of a slope based on the theory of the calculus of variations.

The method allows for the determination of the critical sliding line (The one giving the minimum safety factor) without the necessity of guessing about its shape, which leads to a considerable economy of time and effort.

Furthermore it gives the actual safety factor of the slope and consequently a more complete knowledge of the safety of the slope is obtained.

## 1. 序 論

現在에 使用되는 斜面安定分析方法은 Engineer 들에 의해 이미 多方面으로 研究되었다. 그리고 安定分析은 安全要因과 關聯된 臨界線을 決定하는 것과 斜面安全要因의 最少値를 얻으려고 하는데 그 目的이 있다. 그러나 이러한 節次 단으로는 所期의 目的을 얻을 수 없으므로 臨界線보다 작은 安全要因을 찾아내야만 한다.

이러한 試圖은 實際使用된 曲線數가 매우 많기 때문에 絕對最小値와 計算上의 最小値는 重大한 結果를 招來하지 않을만큼 작아야한다.

限界平衡基準을 變化시킴으로써 斜面의 安全性을 分析하는 目的은 最小安全要因을 얻기 위한 것으로 臨界滑動線에 대한 研究와 이들의 값

에 대한 計算을 하는 것이다. 앞에서 敘述한 臨界滑動線에 대한 研究와 共通된 一般的인 節次는 實質적으로 많은 計算過程 때문에 매우 不便할 뿐만 아니라 어렵다.

이러한 施行錯誤를 거쳐 斜面安定은 分析된다 다시 말하면 이것은 滑動線의 形態에 대한 正確한 輪廓이 잡힐때까지 여러 번의 施行錯誤를 거침으로써 解析된다고 말할 수 있다. 그러나 이 方法으로 斜面을 分析하는데는 많은 時間과 努力이 든다. 이러한 理由와 其他 다른 條件들로 인하여 缺陷이 없는 滑動線을 찾는 有用한 方法은 必要하다.

여기에 表現된 方法은 여러가지 다양한 計算을 適用하여 問題를 解決함으로써 여러가지 問題點을 풀어나갈 수 있을 것이다. 얻어진 結果

\* 安全管理技術士(建設安全)

는 앞으로 많은 活用이 있을 것이다.

## 2. 數學的 Background

本 研究에서 提示한 여러가지 計算은 function 대신 functional의 最大, 最小을 研究함으로써 最大, 最小의 問題를 一般化하는 것이다. 여기서 functional이라는 것은 實數인 一連의 函數  $y(x)$ 를 適用한 것이다. 斜面安定의 境遇에 있어서 函數  $y(x)$ 는 滑動線이고 이러한 滑動線에 따른 實數는 安定性에 結付된 安定要因이라는 것이 明白하다. [Fig. 1]

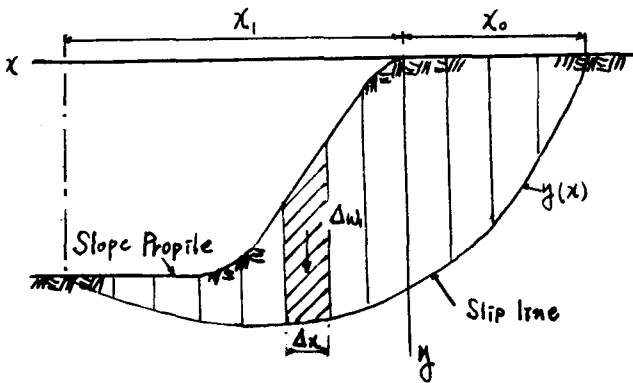


FIG. 1. Diagram used in Janbu's method

### 2-1. 安全要素가 하나의 方程式으로 定義된 傾斜일 境遇

安全要素에 대한 여러가지 計算方法은 두가지 積分을 引用하면 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$S = \frac{\int_{x_1}^{x_0} F(x, y, y') dx}{\int_{x_1}^{x_0} G(x, y, y') dx} \quad (1)$$

結果的으로 斜面의 安定要因을 決定하기 위해서는 函數(1)을 求하는데 이것은 極小值를 決定하는 問題와 關聯된다. 이런 種類의 函數分析은 現在의 學問에서 一般的으로 研究되지 않았다 (Forray, 1968; Gelfand and Fomin, 1963) 그리고 이 境遇 計算理論을 適用하기 前에 이 理論을 認定받아야 한다 (Castilio and Revila, 1975). 이러한 理論을 一般化하기 위해 Euler의 方程式을 適用하면 (2)式과 같이 立證된다.

$$\frac{\int_{x_1}^{x_0} F(x, y, y') dx}{\int_{x_1}^{x_0} G(x, y, y') dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)}{\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial y'} \right)} \quad (2)$$

結果的으로 最小安全要因을 주는 條件은 積分 微分方程式을 滿足시켜야 된다. 이 問題를 풀기 위한 條件은 하나의 Solution과 두개의 다른 條件이 있다고 假定해야 한다. 왜냐하면 方程式 (2)의 Solution은 두개의 常數로 假定하여 式을 세웠기 때문이다. 만약에 滑動曲線의 두끝점 例를 들면 傾斜輪廓의 橫斷曲線을 알 수 있다면 이 曲線은 그러한 두 點을 通過함으로써 이 두개의 常數는 決定된다.

여기서 任意의 點들을 알 수 없을 때 이 方法은 두개의 주어진 點을 通過 지나가는 모든 曲線 가운데에서 最小安全要因을 求할 수 있는 曲線을 찾는 것이다.

이 方法에서 기대한 要點은 사전에 斜面側面圖를 定義하는 曲線上的 點들 가운데에서 알지 못하는 點을 찾는 것이다.

여러가지 計算理論으로부터 이 點을 決定하기 위해 橫斷面의 狀態에 關한 條件을 利用하면 다음과 같이 (3)式으로 表現할 수 있다.

$$[F_{y'} - SG_{y'}] [f'(x) - y'(x)] + F - S \cdot G|_{x=x_i} = 0; (i=0, 1) \quad (3)$$

이 結果로 한개 혹은 두개의 方程式이 얻어짐으로써 問題는 解決된다.

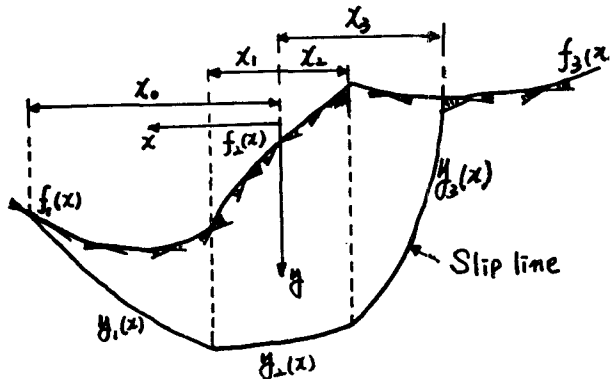


FIG. 2. Slope defined by three functions

### 2-2. 破壞線에 依해 定義된 斜面側面과 關連된 安全要素

萬若에 斜面側面圖가  $f_i(x)$ 에 대한 3개 方程式

에 의해 分析된다고 假定하면  $(x_{i-1}, x_i)$  (Fig. 2) 사이에서는 安定要因에 대한 方程式을 다음과 같은 式으로 表示할 수 있다:

$$S = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} F_1(x, y_1, y_1') dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} F_2(x, y_2, y_2') dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} G_1(x, y_1, y_1') dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} G_2(x, y_2, y_2') dx} + \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} F_3(x, y_3, y_3') dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} G_3(x, y_3, y_3') dx} \dots \dots \dots (4)$$

方程式(4)에서  $y_i(x)$ ,  $(i=1, 2, 3)$ 는 間隔  $(x_{i-1}, x_i)$ 에서의 滑動表面을 나타낸 것이다. 여기에 Euler 方程式을 適用하면 (5)式을 얻을 수 있다.

$$S = \frac{\frac{\partial F_i}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F_i}{\partial y_i'} \right)}{\frac{\partial G_i}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G_i}{\partial y_i'} \right)}; \quad (i=1, 2, 3) \dots \dots (5)$$

微積分方程式으로부터 얻어지는 假定을 常數와 關聯있는 3개의 函數는  $y_i(x)$ ,  $(i=1, 2, 3)$ 이다. 이러한 函數에서 定義한 極限值를 알 수 있다면 問題는 이 曲線이 通過하는 點을 찾으려 한다. 그러나 이것은 그런 境遇가 아니다.

萬若 이 點이 사전에 定해진 것이 아니라면 橫斷條件은 點  $x_0$ 와  $x_3$ 에서 曲線  $y_1(x)$ 와  $y_3(x)$ 에 의해 滿足되어야 한다. 이런 觀點에서 볼 때 이 曲線은 斜面側面圖를 定義하는 曲線위에 있어야 한다. 이와 關聯된 橫斷條件은 (6)式과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{array}{l} F_1 - SG_1 + [F_{1y_1'} - SG_{1y_1'}] \\ [f_1'(x) - y_1'(x)]|_{x=x_1} = 0 \dots \dots \dots (6) \\ F_3 - SG_3 + [F_{3y_3'} - SG_{3y_3'}] \\ [f_3'(x) - y_3'(x)]|_{x=x_3} = 0 \end{array}$$

(6)式에서는  $f_i(x)$ ,  $(i=1, 2, 3)$ 는  $(x_{i-1}, x_i)$ 點에서의 斜面側面圖를 나타내는 曲線이다.

點  $x_1, x_2$ 에서 自然境界條件은 (7)式과 같다.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} - S \frac{\partial G_1}{\partial y_1'} = \frac{\partial F_2}{\partial y_2} - S \frac{\partial G_2}{\partial y_2'} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_2'} - S \frac{\partial G_2}{\partial y_2} = \frac{\partial F_3}{\partial y_3} - S \frac{\partial G_3}{\partial y_3'} \end{array} \right|_{x=x_1} \dots \dots (7)$$

滑動曲線의 連續條件은 다음과 같다.

$$y_i(x_i) = y_{i+1}(x_i), \quad (i=1, 2) \dots \dots \dots (8)$$

그리고  $x_3$ 와  $x_0$ 點間의 境界條件은 (9)式과 같다.

$$\left. \begin{array}{l} y_1(x_0) = f_1(x_0) \\ y_3(x_3) = f_3(x_3) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

問題를 풀기 위한 方程式條件은 다음과 같이 構成된다.

- a) 橫斷面에 對한 두개의 方程式
- b) 두개의 自然境界條件
- c) 두개의 連續方程式
- d) 두개의 境界條件
- e) 方程式<sup>(4)</sup>

이 條件은 9개의 未知數( $x_0, x_3, S$  그리고 6개 積分常數)와 9개의 獨立方程式을 意味한다. 그러므로 問題는 特異한 解를 가져야 解決될 수 있다.

### 3. 凝集土에 대한 Janbu의 方法 適用

앞 節에서 提案한 理論을 明白히 理解하고 그 方法의 效果를 보여주기 위해서 點토에 대한 Janbu의 方法을 適用할 豫定이다(Janbu, 1954) 이 境遇 (10)式은 주어진 滑動曲線(Fig. 1)과 각 微片사이의 剪斷力을 無視함으로써 安全要因  $S$ 를 求한 것이다.

$$\frac{\sum_{i=1}^n C \cdot \Delta x_i (1 + \tan^2 \alpha_i)}{\sum_{i=1}^n \Delta w_i \cdot \tan \alpha_i} \dots \dots \dots (10)$$

(10)式에서  $C$ 는 凝集力이고  $\Delta w_i$ 는  $i$ 번째 微片의 무게이고  $\alpha_i$ 는 滑動表面의 傾斜이고  $\Delta x_i = i$ 번째 微片의 幅이다. 여기서 微片의 幅을 0으로 假定하면  $f=f(x)$ 와  $y=y(x)$ 는 傾斜側面圖와 關聯된 曲線方程式과 滑動曲線을 나타낸 것이다.

이들은 (11) (12)式과 같이 表示할 수 있다.

$$\Delta w_i = \gamma(y-f) \Delta x \dots \dots \dots (11)$$

(11)式을 (10)式에 代入하면

$$S = \frac{\int_{x_1}^{x_2} C(1+y'^2) dx}{\int_{x_1}^{x_2} \gamma(y-f(x))y' dx} \dots \dots \dots (12)$$

여기에서  $\gamma$ 는 흙의 單位重量이고  $x_0, x_1$ 은 滑動曲線이 斜面側面圖를 자르는 橫座表다. 그러므로 極小化된 極數가 얻어진다.

#### 3-1 傾斜가 單一方程式에 依해 定義될 境遇

이 境遇에 Euler의 方程式을 適用하면 주어진 두 點을 通過하는 曲線으로 最小安全要因을 決

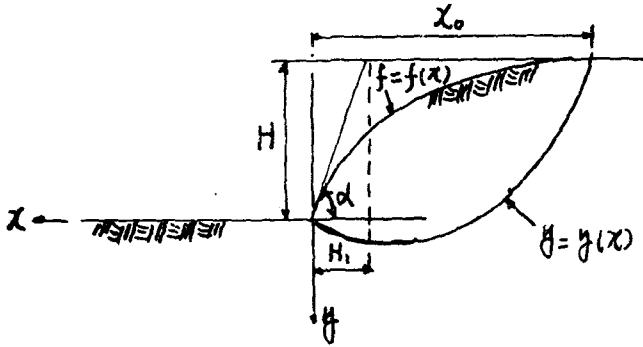


FIG. 3. Geometrical definition of an exponential slope

定할 수 있다.

臨界線과 一致하는 斜面側面圖上的 하나 혹은 두개의 點을 決定하기 위해서 다음과 같은 橫斷條件을 使用한다.

$$S = -2cy'/rf' \dots\dots\dots (13)$$

$$y'^2 - 2y'f' - 1|_{x=x_i} = 0 \quad (i=0,1) \dots\dots\dots (14)$$

方程式 (12)~(14)는 바로 그 問題를 解決한 것이다.

### 3-2. 指數斜面的 境遇

새로운 方法을 指數斜面에 適用하면 斜面의 最高頂點을 通하여 지나는 모든 曲線 가운데 臨界滑動線이 決定된다.

傾斜에 대한 說明은 (15)式과 같이 나타낼 수 있다.

$$f = H(e^{x/H} - 1) \dots\dots\dots (15)$$

여기서 H와 H<sub>1</sub>은 그 意味가 Fig. 3에 表示되어 있는 常數다. Euler 方程式은 (16)式과 같이 나타낸다.

$$Y' = -\frac{r \cdot S}{2C} f + B \dots\dots\dots (16)$$

이것의 一般的인 解는 (17)式과 같다.

$$y = -\frac{Sr}{2C} H H_1 e^{x/H} + \frac{S \cdot r}{2C}$$

$$H \cdot x - B \cdot x - D \dots\dots\dots (17)$$

$$G = r \cdot H / 2 \cdot C \dots\dots\dots (18)$$

(17)式을 簡單히 하기 위해 (18)式을 使用하면 (19)式이 얻어진다.

$$y = -GH_1 S e^{x/H} + (B+GS)x + D \dots\dots (19)$$

이 曲線이 點(0,0)을 通過할때 方程式은 (20)式이 된다. 이때 이것은 단지 하나의 橫斷條件을 唯一하게 滿足한다.

$$0 = -GH_1 S + D \dots\dots\dots (20)$$

$$y'^2 - 2y'f' - 1|_{x=x_i} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

方程式 (12)와 (19)~(21)은 問題解決의 基礎가 된다. Fig. 4는 無次元 形態일 때의 臨界滑動線을 보여준다. Fig. 4에서 斜面의 傾斜가 작으면 작을수록 滑動線은 깊어진다. 角 alpha에 대한 x<sub>0</sub>의 값은 Fig. 5에 있는 無次元形態로 나타나 있다.

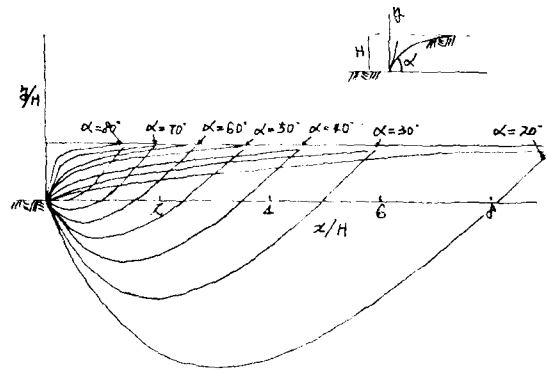


FIG. 4. Critical slip lines for different slope angles

### 3-3. 一般的인 境遇

萬若 斜面 側面圖가 3개의 部分으로 構成된 破壞線에 依하여 定義된 것이라고 假定한다면 安全要素은 (22)式에 依해 주어진다.

$$S = \frac{\int_{x_1}^{x_2} C(1+y_1'^2)dx + \int_{x_2}^{x_3} C(1+y_2'^2)dx + \int_{x_3}^{x_4} C(1+y_3'^2)dx}{\int_{x_1}^{x_2} \gamma(y_1-f_1)y_1'dx + \int_{x_2}^{x_3} \gamma(y_2-f_2)y_2'dx + \int_{x_3}^{x_4} \sigma(y_3-f_3)y_3'dx} \dots\dots\dots (22)$$

여기서 y<sub>1</sub>(x)와 f<sub>1</sub>(x)는 앞에서와 같이 間隔(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>)사이에서의 滑動曲線과 斜面側面圖를 定義한 것이다.

方程式 (5)에 따라 式(22)와 一致하는 Euler의 方程式은 (23)式과 같이 나타낼 수 있다.

$$S = -\frac{2Cy_1''}{\gamma f_1'} \quad S = -\frac{2Cy_2''}{\gamma f_2'} \quad S = -\frac{2Cy_3''}{\gamma f_3'} \dots\dots\dots (23)$$

積分方程式의 係에서 誘導되는 6개의 常數中 安全要素 S, x<sub>0</sub>와 x<sub>3</sub>의 값은 橫斷條件 (6)으로부터 計算되고 이 境遇는

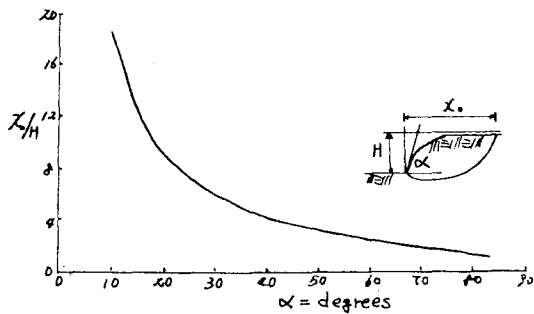


FIG. 5. Variations of  $x_0/H$  with slope angle  $\alpha$

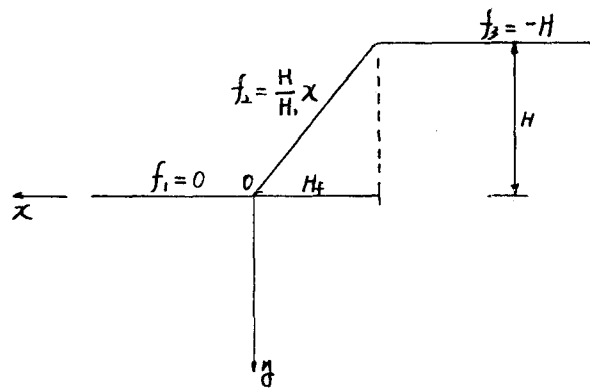


FIG. 6. Geometrical definition of the slope

다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} y_1'^2 - 2y_1' \cdot f_1' - 1 \Big|_{x=x_1} &= 0 \\ y_2'^2 - 2y_2' \cdot f_2' - 1 \Big|_{x=x_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

자연境界條件 (7)은

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x_1) &= y_2'(x_1) \\ y_2'(x_2) &= y_3'(x_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

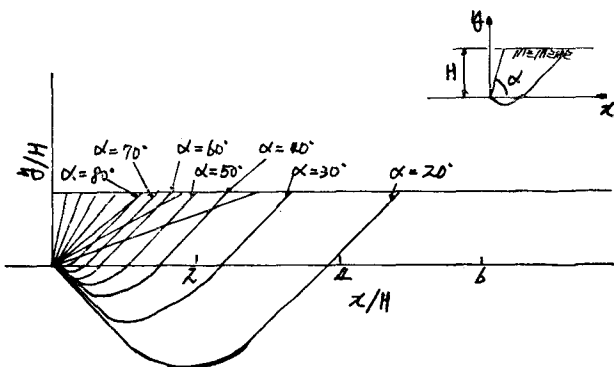


FIG. 7. Critical slip lines for different slope angles

連續條件은

$$y_i(x_i) = y_{i+1}(x_i) \quad (i=1, 2) \dots\dots\dots (26)$$

境界條件은

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_0) &= y_1(x_0) \\ f_3(x_3) &= y_3(x_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

그리고 方程式 (22)도 境界條件이 된다.

### 3-4. 直線傾斜일 境遇

여기서 關心을 갖고 考察할 方法은 直線傾斜를 適用하는 境遇다(Fig. 6)이 傾斜는 3개의 方程式에 依해 定義된다.

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= 0 & ; x_0 \geq x \geq 0 \\ f_2(x) &= -\frac{H}{H_1}x & ; 0 > x > -H_1 \\ f_3(x) &= -H & ; -H_1 \geq x \geq x_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

여기서  $x_0$ 와  $x_3$ 는 極點을 나타낸다. 方程式 (2)에 따르면 Euler의 方程式은 (29)와 같이 義示된다.

$$\left. \begin{aligned} -2Cy_1'' &= 0 \\ -2Cy_2'' &= S \cdot \gamma \times H/H_1 \\ -2Cy_3'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

(29)式을 積分하면 (30)式이 된다.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= B_1 \cdot x + D_1 & ; x_0 \geq x \geq 0 \\ y_2 &= -\frac{1}{2NH_1} \frac{x^2}{2} + B_2 x + D_2 & ; 0 > x > -H_1 \\ y_3 &= B_3 x + D_3 & ; -H_1 \geq x \geq x_3 \end{aligned} \right\} (30)$$

여기서

$$N = \frac{C}{S \cdot r \cdot H} \dots\dots\dots (31)$$

橫斷狀態에 대한 方程式 (24)는 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -1 \\ B_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

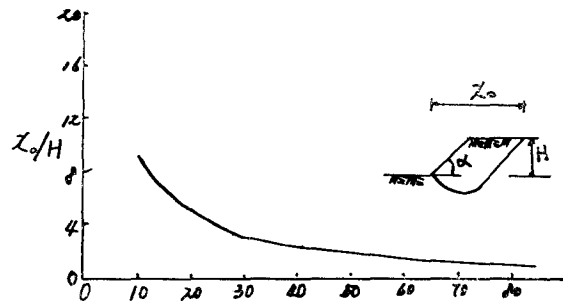


FIG. 8. Variations of  $x_0/H$  with slope angle  $\alpha$

自然境界條件(26式)은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= D_2 \\ -\frac{H_1}{4N} - B_2 H_1 + D_2 &= -B_3 H_1 + D_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots (34)$$

그리고 境界條件(17式)은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} B_1 x_0 + D_1 &= 0 \\ B_3 x_3 + D_3 &= -H \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

(32~(35)式으로부터 알려지지 않은  $x_0$  이외의 모든 값은 알게됐고 이들은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -1 \\ B_2 &= -1 \\ B_3 &= 1 \\ D_1 &= x_0 \\ D_2 &= x_0 \\ D_3 &= H_1 + x_0 \\ x_3 &= -H_1 - H - x_0 \\ N_3 &= 1/4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

式(30)과 式(36)을 式(22)에 代入하면 다음과 같은 (37)式이 된다.

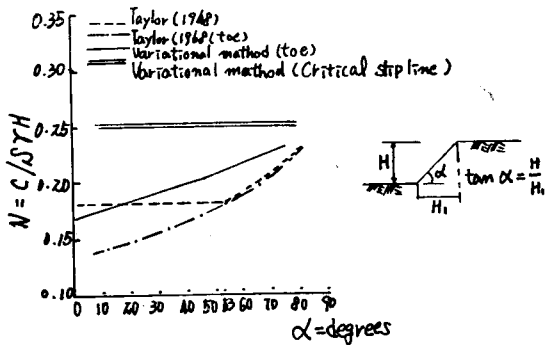


FIG. 9. Variations of stability number  $N$  with slope angle  $\alpha$

$$N = \frac{-H_1 - 3H - 6x_0}{-8H_1 - 12H - 24x_0} \dots\dots\dots (37)$$

結局 이 方程式은 矛盾없이 一致하고  $N=1/4$ 는  $x_0 \rightarrow \infty$ 일 때의 값이다. 이 方程式의 意味는 滑動面이 깊다는 것을 나타낸다. 傾斜의 앞부리를 通過하는 臨界線은 똑같은 過程에 依해 結定할 수 있음에 따라 橫斷條件은 考慮하지 않아도 된다.

$$\frac{x_3}{H} = \frac{-\left(1 + \frac{3}{H/H_1}\right) - \sqrt{\left[\left(1 + \frac{3}{H/H_1}\right)^2 + 8\right]}}{4} \dots\dots\dots (38)$$

$$N = \frac{C}{S \cdot r \cdot H} = \frac{1}{3 - 3H/H_1 + \sqrt{[H/H_1 + 3]^2 + 8(H/H_1)^2}} \dots\dots\dots (39)$$

Fig. 7은 無次元의 形態로  $H/H_1$ 의 函數와 같은 臨界滑動線이고 Fig. 8에서  $x_0/H$ 의 값은 이 線에 임의점에서 實質的인 경우 얻을 수 있도록 許容한다.

#### 4. Taylor의 解와의 比較

Fig. 9는 Taylor(1948)와 本 研究의 方法에 依해 얻을 수 있는 安全係數와 傾斜角사이의 關係를 나타낸 것이다.

예상할 수 있는 바와같이 여러가지 方法에 依해 얻어진 安全요인은 보다 작은 것이다.

그리고 임의의 境遇에 있어서의 差異는 重要な 것이다. 다른 重要的 요인은 滑動線이 斜面角  $90^\circ$ 가 안되면 斜面의 先端을 通하여 지나가지 않는다. 바로 이것이 Talor의 結果와 一致하지 않는 點이다.

어찌든 斜面角이 보다 크다면 그 差異는 작아진다.

#### 5. 結 論

여러가지 計算에서 數學的인 理論을 利用하면 斜面의 臨界滑動線을 直接結定할 수 있다.

橫斷支續限界條件과 함께 Euler 方程時은 그 問題를 解結하기 위하여 使用됐고 이 方法이 여기서 매우 簡單한 境遇에 適用되어 졌지만 이 方法은 非同質形인 斜面과 斜面의 表面에 荷重이 作用할 때의 問題에 適用할 수 있는 매우 有用한 方法이다.

#### \*REFERENCES

1. Forray, M. (1968). Variational calculus in science and engineering. New York: McGraw-Hill.
2. Gelfand, I.M. & Fomin, S.V. (1963). Calculus of variations. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall.
3. Janbu, N. (1954). Application of composite slip

- surfaces for stability analysis. Proc. European Conf. Stability of Earth Slopes, Stockholm 3, 43~49.
4. Taylor, D.W. (1948). Fundamentals of soil mechanics. New York: John Wiley and Sons.
  5. Baker, R. & Garber, M. (1977 a). Discussion of On slip surface and slope stability analysis by Chen. W.P. and Snitbhan, N.S. *Soils and Foundation Vol. 17, No. 1*, 65~88.
  6. Baker, R. & Garber, M. (1977 B). Variational approach to slope stability. *Proc. Ninth Int. Conf. Soil Mech. Fdn Engng*, Tokyo 2, 9~12.
  7. Bjshop, A.W. (1955). The use of slip circle in the stability analysis of Slopes. *Geotechnique 5*, 7~17.
  8. Bolza, O. (1973). *Lectures on the calculus of variations*. New York: Chelsea Publishing Company.
  9. Culmann, K. (1866). *Die Graphische Static*, Zurich.
  10. Dorfman, A.G. (1965). Variational method of investigating the stability of Slopes. *Vop. Geotekhniki Transport, No. 9*, Moscow.
  11. Fellenius, W. (1936). Calculation of the stability of earth darms. *Trans. Second Cong, on Large Dams 4*, Washington.
  12. Garber M. (1973). Variational method of investigating the stability of Slopes. *Soil Mechanics and Foundation Engineering Vol. 10, No. 1*, 77~79.
  13. Janbu, N. (1954). Application of composite slip surface for stability analysis. *Proc. Eur. Conf, on Stability of Earth Slopes*, Stockholm 3, 43~50.
  14. Kopacsy, J. (1955). Uber die Bruchflachen und Bruchspannungen in den Erdbauten. *Gedenbuch fur Dr J. Jaky*. (Ed. by Szechy, K.) *Akadimiai Kiado Budapest*, 81~99.
  15. Morgenstern, N.R. & Price, V.E. (1965). The analysis of the stability of general slip surface. *Geotechnique Vol. 15, No. 1*, 79~93.
  - 16) Rendulic, L. (1935). Ein Beitrag zur Bestimmung der Gleitsicherheit. *Bauingenier, No. 19/20*.
  17. Revilla, J. & Castillo, E. (1977). The calculus of variations applied to stability of Slopes. *Geotechnique Vol. 27, No. 1*, 1~11.
  18. Taylor, D.W. (1973). Stability of earth slopes. *Contributions to Soi Mechanics. Boston Society of Civil Engineers*, 337~386.
  19. 申芳雄. (1980) 斜面的安定. 土質力學. 綠地社, p.283~310.

지혜로운 생활 과학

행복한 우리가 정