Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol.9, No.2, December 1983

線型的 增加需要와 一定在庫補充率下에서의 経済的 生産量에 관한 研究

(Economic Production Quantity for a Linear Trend in Demand and Contant Replenishment)

趙 載 岦*
李 暁 成*

Abstract

The classical deterministic inventory model is investigated for the case of linear trend in demand and constant production rate. Three models are presented so as to minimize the total of set-up and inventory carrying costs over a finite time span. For each of the policies the methods are developed which can determine the optimal production quantities and times at which production should be started. Three policies are compared in point of costs and times for getting solutions and various case examples are also presented.

1. 序 論

新製品의 需要는 時間에 대해 線型的으로 增加하는 特性을 지니고 있는 경우가 많다. 이러한 경향은 製品의 壽命週期에서 보아 成熟期의 안정적 국면에 도달하기 前 導入期와 成長期에 걸쳐 지속되는것이 보통이다.

需要가 線型的으로 增加하는 상황에서의 在庫管理政策에 대한 研究는 1977年 Donaldson[1] 이 計劃期間이 유한한 경우에 대해 最適發注時點과 發注量을 산출하는 分析的 方法을 제시한 이후 활발히 진행되었다. 동일한 문제에 대해 Silver [6] 는 보다 적은 노력으로 近似解를 찾을 수 있는 發見的 方法(heuristic method)을 研究하였고, Henery [2] 는 需要가 線型的인 경우를 포함해 일반적인 增加函數를 따를 때의 문제를 다루었다. Phelps [5] 는 需要가 線型的으로 발생할 때 發注間隔을 一定하게 한다는 條件下에서 最適發注回數를 구하는 式을 유도하였다. Naddor [4] 는 Donaldson 이전의 이 분야에 대한 研究者로서 需要가 時間에 定比例로 增加하는 경우에 대해 固定發注量과 固定發注週期 模型에 대한 解를 제시하였고, Johnson [3] 도 一意的인 解(closed solution)를 구하지는 못하였으나 일반적인 需要函數에 대한 最的解 算出方法을 언급한 바 있다.

그러나 위에서 언급된 모든 研究는 發注後의 在庫補充이 즉각적으로 이루어질 수 있다는 假定下에서 행하여졌으며, 自家生産에 의한 販賣의 경우와 같이

*경희대학교 공과대학
*本 研究는 1983年度 경희대학교 연구비에 의해 수행되었음.

在庫補充이 漸進的으로 이루어질 때에 대한 硏究는 아직까지 시도된 바 없다. 本 硏究의 目的은 이러한 상황—製品의 需要가 線型的으로 增加하고 在庫補充은 漸進的으로 이루어지는—하에서의 計量的 在庫管理 模型을 計劃期間이 유한한 경우에 대해 수립해 보고자 함이다.

일반적으로 動態的 需要下에서의 在庫管理 模型 수립시에 가장 먼저 고려해야 될 점은 生産量과 生産始點이다.

生産量과 生産始點의 간격에 대한 制限에 따라 模型이 결정되며 模型이 결정된 후에는 해당 模型에 대한 最的生産始點, 最的生産量, 最的生産回數 등의 算出方法이 유도될 수 있다. 보통 生産量과 生産始點의 간격에 따라 在庫管理政策은 (1) 生産量과 生産始點의 간격에 制限을 두지 않는 경우 (2) 生産始點의 간격 (生産週期)을 一定하게 유지해 줄 경우 (3) 一回 生産量을 一定하게 유지해 줄 경우의 셋으로 분류된다. 그러나 需要가 線型的 增加추세를 따르는 本硏究에서는 (3) 의 政策은 적절하지 못하다. 왜냐하면 (3)의 政策에서는 每 週期의 生産量이 고정되므로 需要의 增加에 대처할 수 있는 적절한 반응이 불가능하며 需要의 增加가 심한 計劃期間의 끝 부근에서는 生産週期가 극히 짧아져 經濟的이고 적절한 生産活動이 힘들어 지기 때문이다. 따라서 本硏究에서는 (3) 의 政策은 고려되지 않고 (1)과 (2)의 政策에 대해 計劃期間중의 總 生産準備費用(set-up cost) 과 在庫維持費用(carrying cost)의 合을 最小化해주는 數學的 模型을 개발하고자 한다. 本 硏究에서는 (1)의 政策을 (t_i, q_i)政策 (2)의 政策을 (t, q_i)政策이라 表示하기로 한다.

각 政策에 대한 數學的 模型 및 解의 算出方法은 다음과 같다.

2. (t_i, q_i) 政策

(t_i, q_i)政策은 生産始點의 간격과 生産量에 모두 制限이 없는 政策이다. (t_i, q_i)政策은 生産量과 生産始點이 모두 變數이므로 모든 在庫政策 중 在庫管理 費用을 最小로 해주나 다음과 같은 두가지 결함이 지적될 수 있다. 첫째, 點化 方程式을 포함한 非線型 最適化 問題이므로 현장의 실무자 들에게는 복잡하고, 둘째 一回 生産量과 生産始點의 변화가 심해 일관성있는 生産計劃을 세우기 힘들다는 점이다.

그러나 製品의 單價가 비싸 費用節減이 중요한 경우에는 總 在庫量을 最小로 유지시켜줄 수 있는 (t_i, q_i)政策을 사용하여야 한다. 本 模型에서 사용되는 假定과 記號는 다음과 같다.

〈假定〉

(1) 計劃期間은 有限하다.

(2) 製品의 需要는 時間이 지남에 따라 線型的으로 增加하며 連續的으로 발생한다.

(3) 在庫補充을 위한 生産率은 一定하며, 計劃期間 중의 需要率보다 크다.

(4) 品切은 許容되지 않는다.

(5) 初期在庫는 없다.

〈記號〉

H : 計劃期間;

C_1 : 1回 生産에 소요되는 生産準備費用(Set-up Cost) ;

C_2 : 在庫維持費用 / 單位製品 / 單位期間;

$d(t)$: 需要函數 $d(t)=a+bt$ $(a, b>0)$;

$D(t)$: 累積需要函數 $D(t)=\int_0^t d(x)\,dx$;

P : 生産率 / 單位期間$(P \geq a+bH)$;

$I(t)$: 時點 t에서의 在庫水準;

N : 計劃期間 중의 生産回數;

t_{i-1} $(i=1, 2 \cdots, N)$: 生産回數를 N으로 할 경우의 i번째 生産始點$(t_0=0, t_N=H)$;

t_i^* : i 번째 週期에서의 生産期間;

Q_i : i 번째 生産週期$[t_{i-1}, t_i]$에서의 生産量;

$TC(N, t_1, t_2, \cdots, t_{N-1})$: 生産始點을 $t_0, t_1, \cdots, t_{N-1}$으로 할 경우의 計劃期間 중의 總費用;

$TC(N)$: $\underset{t_1, \cdots, t_{N-1}}{\text{Min.}}$ $TC(N, t_1, t_2, \cdots t_{N-1})$;

N^* : 最的生産回數;

이상과 같은 假定과 記號하에서 計劃期間중의 生産回數를 N回로 한다면 i 번째 生産週期중 時點$[t_{i-1}, t_{i-1}+t_i^*]$에서의 在庫水準은 $I(t)=P(t-t_{i-1})-\int_{t_{i-1}}^{t} d(x)\,dx=P(t-t_{i-1})-D(t)+D(t_{i-1})$이 되고, 時點 $[t_{i-1}+t_i^*, t_i]$에서의 在庫水準은 $I(t)=\int_t^{t_i} d(x)\,dx=D(t_i)-D(t)$로 表示된다. 따라서 生産回數를 N回로 했을 때의 計劃期間 중의 總費用은

$$TC(N, t_1, t_2 \cdots t_{N-1})=NC_1+C_2 \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} I(t)\,dt$$

$$=NC_1+C_2\sum_{i=1}^{N}\Big[\int_{t_{i-1}}^{t_{i-1}+t_i^*}\{P(t-t_{i-1})-D(t)+D(t_{i-1})\}dt+\int_{t_{i-1}+t_i^*}^{t_i}\{D(t_i)-D(t)\}dt\Big]$$

$$=NC_1+C_2\sum_{i=1}^{N}\Big[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\{-D(t)\}dt+\int_{t_{i-1}}^{t_{i-1}+t_i^*}\{P(t-t_{i-1})+D(t_{i-1})\}dt+\int_{t_{i-1}+t_i^*}^{t_i}D(t_i)dt\Big] \qquad (1)$$

가 되며, 주어진 N에 대해 $TC(N, t_1, t_2, \cdots, t_{N-1})$ 을 最小化하는 $t_1, t_2, \cdots, t_{N-1}$ 을 구하기 위해 $t_i^* = \frac{D(t_i)-D(t_{i-1})}{P}$ 의 관계를 이용하여 式(1) 을 t_i에 대해 미분한 후 0로 놓고 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{D(t_{i-1})d(t_i)}{P}-d(t_i)t_{i-1}+d(t_i)t_i-\frac{2D(t_i)d(t_i)}{P}+\frac{D(t_{i+1})d(t_i)}{P}+D(t_i)-D(t_{i+1})=0 \qquad (2)$$

단, $i=1, 2, \cdots, N-1$

$t_0=0, \quad t_N=H$

식(2)의 형태는 非線型 點化方程式이며 需要가 線型的으로 增加하는 函數를 따를 경우에는 $d(t)=a+bt$, $D(t)=at+\frac{b}{2}t^2$가 되므로 이를 식(2)에 대입하면 식 (3)이 된다.

$$\left(\frac{ab}{2p}+\frac{b^2}{2p}t_i-\frac{b}{2}\right)t_{i+1}^2+\left(\frac{a^2}{P}+\frac{ab}{P}t_i-a\right)t_{i+1}+\left(\frac{a^2}{P}-a\right)t_{i-1}+\frac{ab}{2P}t_{i-1}^2+\left(\frac{ab}{P}-b\right)t_{i-1}t_i+\frac{b^2}{2P}t_{i-1}^2t_i+\left(2a-\frac{2a^2}{P}\right)t_i+\left(\frac{3}{2}b-\frac{3ab}{P}\right)t_i^2-\frac{b^2}{P}t_i^3=0 \qquad (3)$$

단, $i=1, 2, \cdots, N-1$

$t_0=0, \quad t_N=H.$

여기에서 $A=\frac{ab}{2P}+\frac{b^2}{2P}t_i-\frac{b}{2}$, $B=\frac{a^2}{P}+\frac{ab}{P}t_i-a$,

식 (3)의 좌변에서 t_{i+1}을 포함하지 않는 모든 항의 合을 C라 치환하면, t_{i-1}과 t_i가 주어졌을 때 t_{i+1}은 $\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ 의 식으로 구해질 수 있다. 식(3)에서 t_0의 값은 0로 주어지므로 적당한 t_1 의 값을 대입하여 위 이차방정식의 근의 공식을 이용하면 點化式을 만족하는 $t_2, t_3, \cdots, t_N$ 의 값이 축차적으로 구해진다. 이렇게 하여 구해진 t_N의 값이 H보다 클 경우에는 t_1 의 값을 줄여 주고 H보다 작을 경우에는 t_1의 값을 크게해 주어 수정된 t_1 의 값에 대해 새로운 $t_2, t_3, \cdots, t_N$의 값을 구한다. 이러한 과정을 $t_N=H$가 될 때 까지 반복 수행함으로써 식(3)을 만족하는 $t_1, t_2, \cdots, t_{N-1}$의 값을 구한다. 만일 t_1 의 최소 가능치와 최대 가능치를 알 수 있으면 補間法이나 探査技法을 이용하여 t_1을 찾는 과정을 용이하게 할 수 있다. t_1 의 최소 가능치와 최대 가능치는 적당한 α, β값에 대해 각각 $\frac{H}{N}-\alpha$, $\frac{H}{N}+\beta$로서 정해 줄 수 있다. 위 方法에 의해 고정된 N의 값에 대해 計劃期間 중의 費用을 最小化하는 $t_1, t_2, \cdots t_{N-1}$과 이때의 費用 $TC(N)$을 구한 후에는, N의 값을 변화시켜 가며 위 과정을 되풀이 수행함으로써 $TC(N)$ 의 값을 最小化하는 最適 生産回數 N^*의 값과 이때의 最適 生産始點등을 구할 수 있게 된다. 費用 $TC(N, t_1, t_2, \cdots t_{N-1})$의 값은 식 (1)을 이용하여 구할 수 있으나 후술 될 수정된(t_i, q_i) 政策에서의 식 (5)을 이용하면 보다 간편하게 구해진다. 函數 $TC(N)$은 N에 대해 unimodal한 函數이므로 $TC(N)$ 을 最小化하는 N^*의 값은 $TC(N+1)>TC(N)$의 부등식을 만족사키는 最小 正數 N이 되며 계산량을 줄이기 위해서는 N의 초기값으로 (t_i, q_i)政策에서 구해지는 最適生産回數 N^*의 값을 사용하면 좋다.

이상과 같은 方法에 의해 最適 生産回數 N^*와 이때의 生産始點 $t_0, t_1, \cdots, t_{N-1}^*$ 이 구해지며, 이 값들이 구해지면 每生産週期에서의 生産量 또한 쉽게 계산된다. 각 週期에서의 生産量은 해당 週期중의 總需要量과 일치하므로 i번째 週期에서의 生産量은 $Q_i=D(t_i)-D(t_{i-1})=a(t_i-t_{i-1})+\frac{b}{2}(t_i^2-t_{i-1}^2)$가 되고, 그 때의 生産期間 t_i^* 는 $\frac{Q_i}{P}$가 된다.

3. 수정된 (t_i, q_i) 政策

앞에서 언급한 바와 같이 (t_i, q_i)政策은 在庫管理의 諸般 費用을 最小化해 줄 수 있는 政策이나 解를 구하기 위한 計算시간이 너무 많이 소요된다는 결함을 지니고 있다. 이러한 결함을 극복해 주기 위한方法이 다음에 제시되는 수정된 (t_i, q_i) 政策이다. 수정된 (t_i, q_i)政策은 發見的 方法(heuristic method)을 사용하기 때문에 最適解를 보장해 주지는 못하나 우

수한 解를 算出해 주는 경우가 많으며 (t_i, q_i) 政策에 비하여 解를 구하기 쉽고 計算時間을 단축시켜 준다

수정된 (t_i, q_i) 政策은 (t_i, q_i) 政策과 問題解決의 접근방식을 전연 달리한다. (t_i, q_i) 政策은 計劃期間중의 總費用을 最小化할 수 있는 生産回數 N^*와 그때의 生産始點 $t_1, t_2, \cdots, t^*_{N-1}$ 의 算出을 問題解決의 決定基準으로 삼았으나, 수정된 (t_i, q_i) 政策은 現 生産週期의 單位 期間當 費用을 最小化할 수 있도록 現 生産週期의 길이를 決定함으로써 問題解決에 접근한다. 現 生産週期의 길이가 決定되면 現 週期의 끝 時點을 0으로 하여 다음 生産週期의 길이를 정하게 되고 이러한 과정을 計劃期間 H에 도달할 때까지 반복한다. 물론 이러한 方法은 最終 生産週期의 끝이 計劃期間의 끝과 일치하지 않으므로 最適解가 되지는 못하며 특히 計劃期間이 짧을 경우에는 좋은 結果를 얻지 못할 수 있다. 그러나 計劃期間이 길을 경우에는 最適解에 손색없는 우수한 解를 얻을 수 있으며 計算過程이 단순하여 현장의 실무자들에게도 이용 가능하다는 장점이 있다. 주시할 점은 計劃期間 H는 추정치에 불과할 경우가 대부분이며 計劃期間이 끝난 후에도 需要는 소멸하지 않고 존속하는 경우가 많다는 사실이다. 이러한 사실은 수정된 (t_i, q_i) 政策에 대한 사용의 유효성을 높여주며 計劃期間이 명확하지 않을 경우나 計劃期間중 需要 양상에 변화가 생길 가능성이 있을 경우에는 수정된 (t_i, q_i) 政策의 사용이 매우 유효해 짐을 입증해 준다.

本 硏究에서 제시한 수정된 (t_i, q_i) 政策은 Silver-Meal Heuristic [6]을 다소 변형시켜 在庫 補充이 漸進的으로 이루어지는 상황에 적용시킨 것이며 (t_i, q_i) 模型에서 정의한 記號외에 本 模型에서 사용하는 記號는 다음과 같다.

T: 現 生産週期의 길이;

T^* : 現 生産週期의 最適길이;

t^* : 現 生産週期에서의 生産期間;

Q : 現 生産週期에서의 生産量;

T_i^* : i번째 生産週期의 最適길이;

$TRC(T)$: 現 週期동안 발생하는 總費用;

$TC(T)$: 現 週期에서의 單位期間當 발생하는 總費用.

수정된 (t_i, q_i) 政策은 첫번째 生産週期의 길이를 決定함으로써 問題解決이 시작된다. 첫번째 生産週期의 길이를 T라 하고 生産期間을 t^*라 하면 時點 $[0, t^*]$ 에서의 在庫水準은 $\{Pt-D(t)\}$이 되고, 時點 $[t^*, T]$에서의 在庫水準은 $\{D(T)-D(t)\}$가 된다. 따라서 첫번째 週期동안 발생하는 總費用은

$$TRC(T)=C_1+C_2\left[\int_0^{t^*}\{Pt-D(t)\}dt+\int_{t^*}^{T}\{D(T)-D(t)\}dt\right] \tag{4}$$

이 되고, 첫번째 週期에서의 生産量은 $Q=\int_0^T d(t)dt=D(T)$ 가 되며 生産期間은 $t^*=\dfrac{D(T)}{P}$ 가 된다.

本 硏究에서는 需要函數가 時間에 대해 線型이므로 $d(t)=a+bt$, $D(t)=at+\dfrac{b}{2}t^2$ 의 관계를 식 (4)에 대입하면

$$\begin{aligned}TRC(T) &= C_1+C_2\left\{\int_0^{t^*}\left(Pt-at-\frac{b}{2}t^2\right)dt+\int_{t^*}^{T}\left(aT+\frac{b}{2}T^2-at-\frac{b}{2}t^2\right)dt\right\}\\ &=\frac{P}{2}t^{*2}+\frac{a}{2}T^2+\frac{b}{3}T^3-aTt^*-\frac{b}{2}T^2t^*\end{aligned}$$

가 되며 $t^*=\dfrac{D(T)}{P}=\dfrac{1}{P}\left(aT+\dfrac{b}{2}T^2\right)$ 을 위 식에 대입하여 정리하면 식 (5)를 얻는다.

$$TRC(T)=C_1+C_2\left\{-\frac{b^2T^4}{8P}+\left(\frac{b}{3}-\frac{ab}{2P}\right)T^3+\left(\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2P}\right)T^2\right\}. \tag{5}$$

따라서 단위기간당 발생하는 總費用은

$$TC(T)=\frac{C_1}{T}+C_2\left\{-\frac{b^2}{8P}T^3+\left(\frac{b}{3}-\frac{ab}{2P}\right)T^2+\left(\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2P}\right)T\right\} \tag{6}$$

가 되며 우리의 목적은 식 (6)을 最小化 시켜주는 生産週期의 길이 T^*의 값을 구하는 것이다. $TC(T)$를 T에 대해 미분하여 0으로 놓으면

$$\frac{dTC(T)}{dT}=-\frac{C_1}{T^2}+C_2\left\{-\frac{3b^2}{8P}T^2+\left(\frac{2b}{3}-\frac{ab}{P}\right)T+\left(\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2P}\right)\right\}=0 \tag{7}$$

가 되며 $TC(T)$를 T에 대해 2차 미분하면

$$\frac{d^2TC(T)}{dT^2}=\frac{2C_1}{T^3}+C_2\left[-\frac{3b^2}{4P}T+\left(\frac{2b}{3}-\frac{ab}{P}\right)\right] \tag{8}$$

가 되고 식 (7)을 만족하는 T^*를 식 (8)에 대입하여 정리하면 식 (9)를 얻게 된다.

$$\frac{d^2 TC(T^*)}{dT^2} =$$

$$C_2 \left\{ \frac{-3b^2 T^{*2} + 4bPT^* - 6abT^* + 2aP - 2a^2}{2PT^*} \right\}. \tag{9}$$

$P > a + bT^*$ 의 관계를 이용하여 식 (9)의 분자의 부호를 살펴보면

$$-3b^2 T^{*2} + 4bPT^* - 6abT^* + 2aP - 2a^2$$
$$= 4bT^*(P - a - bT^*) + 2a(P - a - bT^*) + b^2 T^{*2} > 0$$

이므로 $\frac{d^2 TC(T^*)}{dT^2} > 0$ 이 되고 따라서 식 (7) 을 만족하는 T^* 는 식(6) 의 最小값이 됨을 알 수 있다. 식 (7) 을 만족하는 T^* 는 Newton-Raphson 法을 이용하여 구할수도 있으나 다음의 순환식을 이용하면 보다 편리하다. $M = \frac{C_1}{C_2}$, $A = -\frac{3b^2}{8P}$, $B = \frac{2b}{3} - \frac{ab}{P}$, $C = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2P}$ 이라 놓고 k 번의 반복 후에 얻어진 T 의 값을 T_k 라 하며 식(7)을 만족하는 T 는

$$T_k = \sqrt{\frac{M}{AT^2_{k-1} + BT_{k-1} + C}} \tag{10}$$

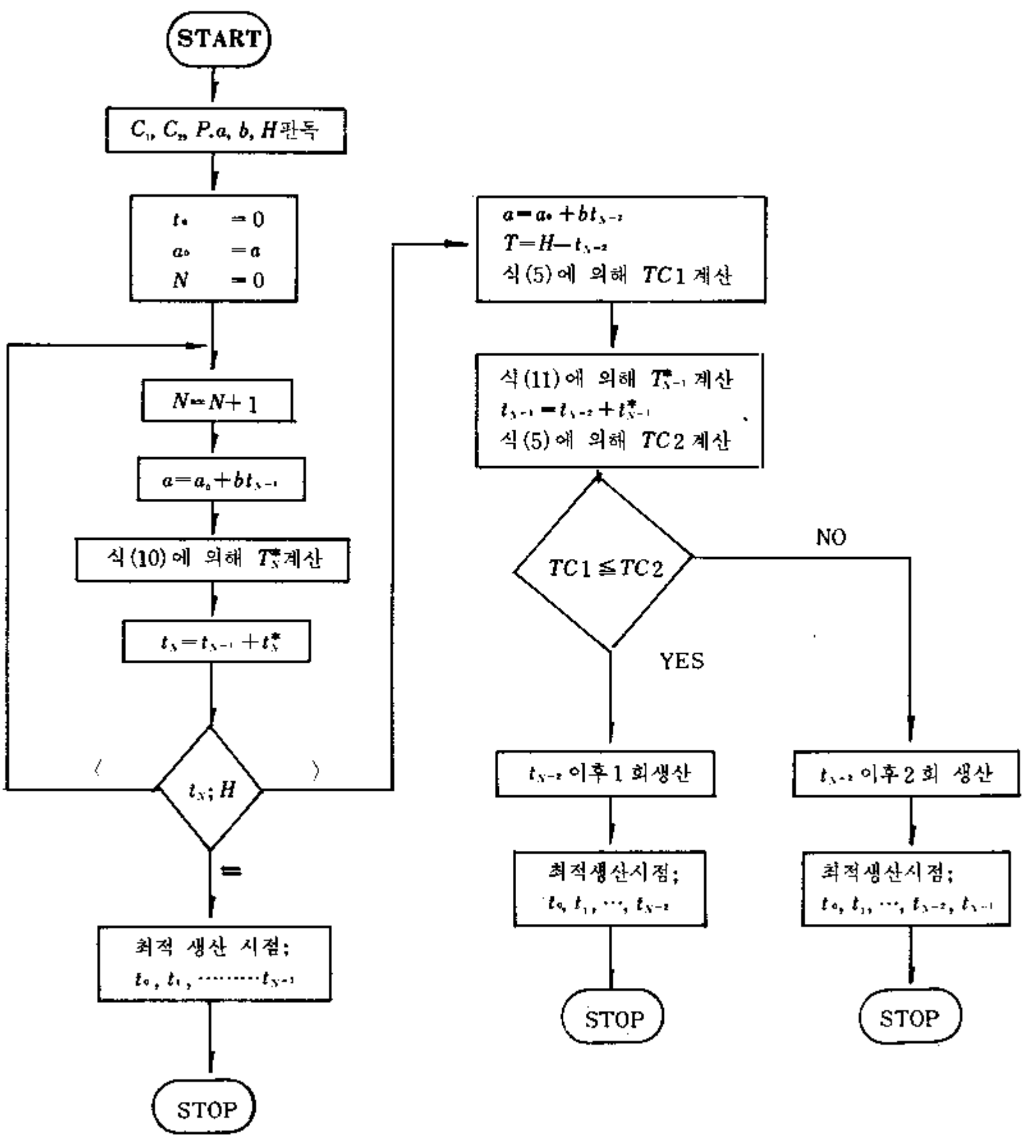
의 순환식에 의해 구해 질 수 있다. 위 식에서 초가치 T_0 의 값으로는 작은 양의 값을 사용하면 된다. 위 순환식을 이용하면 반복을 거듭함에 따라 T_k 의 값이 식 (7)을 만족하는 T^*의 값으로 수렴하므로 원하는 정밀도로서 T^*의 값을 구할 수 있게 된다. 만일 期間當 增加 추세 b 가 크지 않을 경우에는 需要가 一定率일 때의 EOQ공식을 이용하여 T_0 의 값으로 $\sqrt{\frac{2C_1}{aC_2}}$ 을 사용할 수 있다.

위 方法에 의해 첫번째 生産週期의 길이 T_1^* 가 결정되면 두번째 生産始點 t_1 은 T_1^* 가 되며, 두번째 生産週期의 最適길이 T_2^*는 t_1 을 時點 0 로 놓고 T_1^* 를 구할 때와 同一한 과정을 적용함으로써 구한다. 이때 두번째 週期初 t_1 을 0 으로 간주하였으므로 a 값은 t_1 時點에서의 需要率 $a + bt_1$ 으로 고쳐 사용하여야 한다. 일반적으로 i 번째 生産始點 t_{i-1} 은 $t_{i-2} + T^*_{i-1}$ 가 되며 i 번째 生産週期의 最適길이 T_i^*는 時點t_{i-1}을 0 로 놓고 a 대신에 이 時點에서의 需要率을 대입한 후 식 (10)을 풂음으로써 결정한다. 식 (10)을 푸는 과정에서 두번째 週期부터는 초기값으로 앞주기에서의 最適解 T^*_{i-1} 를 사용하면 보다 효과적이다. 이러한 과정을 計劃期間 H 에 도달할 때까지 반복 수행함으로써 수정된 (t_i, q_i)政策의 解를 구할 수 있으며 이때 각 週期에서의 發生費用은 식 (5)에 의하여 구해질 수 있다.

수정된 (t_i, q_i)政策에서의 가장 큰 問題點은 計劃期間 끝 부근에서의 週期설정 問題이다. 만일 어떤 週期의 끝이 H 바로 앞 부근에서 발생한다면 짧은 期間을 위하여 한번의 生産을 더해주어야만 하는 問題가 발생한다. 이러한 問題點을 해결하기 위해 本 硏究에서는 N번째 週期의 끝이 H를 처음으로 초과할 경우 $(t_{N-1} < H,\ t_N > H)$ 다음 두가지 方法—(1) t_{N-2} 이후의 生産回數를 1 回로 하여 初期 準備費用을 줄여 주는 方法, (2) t_{N-2} 이후의 生産回數를 2 回로 하되 經濟的인 t_{N-1} 의 값을 새로 정해 주는 方法— 을 고려하였으며, 이중 費用이 보다 적게 발생되는 方法을 택하였다. (1)의 方法에서는 t_{N-2} 이후의總 發生費用을 $TC1$ 이라 하면 $TC1$ 은 식 (5)에 의해 구해지며, 이때 a 의 값은 時點 t_{N-2} 에서의 需要率로 고쳐주고 T의 값에는 $H - t_{N-2}$ 를 대입하여야 한다. (2) 의 方法을 사용할 경우 t_{N-2} 이후의 生産始點 t_{N-1} 은 (t_i, q_i)政策에 의해 구해질 수 있으며 t_{N-2} 이후의 生産回數가 2 回로 고정되므로 비교적 간단히 最適 生産始點 t_{N-1} 이 구하여지게 된다. 구체적인 節次로는 $T = H - t_{N-2}$ 로 하고 a 는 t_{N-2} 에서의 수요율로 놓은 후 식(11)을 만족하는 $N-1$ 번째 週期의 길이 T^*_{N-1} 을 구한 후 이 값을 t_{N-2} 와 더하면 t_{N-1} 이 구해진다.

$$\frac{b}{P} T^3_{N-1} + \left(\frac{3ab}{P} - \frac{3}{2} b \right) T^2_{N-1} + \left(\frac{2a^2}{P} - 2a - \frac{ab}{P} T - \frac{b^2}{2P} T^2 \right) T_{N-1} + \left(a - \frac{a^2}{P} \right) T + \left(\frac{b}{2} - \frac{ab}{2P} \right) T^2 = 0 \tag{11}$$

위 식에 의해 t_{N-1} 이 결정되면 마지막 두 週期동안의 總費用 $TC2$ 는 식 (5)에 의해 구해질 수 있으며 $TC1$ 과 $TC2$ 를 비교하여 더 적은 費用을 주는 方法을 택하면 된다. 수정된 (t_i, q_i)政策의 解를 구하는 과정을 흐름도로 표시하면 〈그림 1〉과 같다.



〔그림 1〕수정된(t_i, q_i) 정책의 흐름도

4. (t, q_t)政策

$((t_i, q_i)$政策이나 수정된 (t_i, q_i)政策은 在庫費用은 줄여주지만 每回 生産始點의 변화로 인해 일괄성있는 生産計劃을 세우기가 힘들다는 결함이 있다. 따라서 管理效率的인 면을 위해서는 在庫費用은 더드나, 各 生産週期를 一定하게 하여줌으로써 규칙성있는 生産計劃을 가능하게 하는 (t, q_t)政策이 유리할 수도 있다. 費用면에서도 여러 경우의 例題를 적용

시켜 본 結果 (t_i, q_i)政策 사용시와 비교한 (t, q_i)政策 사용시의 費用增加는 무시할 수 있을 정도로 적은 경우가 많았다.

(t, q_i)政策에서는 生産週期가 一定하므로 한 生産週期의 길이는 計劃期間을 生産回數로 나눈 값이 된다. 또한 각 生産週期에서의 生産量은 그 生産週期에서의 總需要量이 되므로 生産回數만 결정되면 각 生産始點과 生産量은 부수적으로 결정된다. 따라서 本 政策은 總 生産準備費用과 在庫維持費用의 合을 最小化해주는 生産回數를 決定해 주는 문제로 귀착된다. 本 模型에서 사용되는 假定과 記號는 (t_i, q_i)政策에서와 同一하며, 구체적인 模型樹立 및 解의 算出過程은 다음과 같다.

本 模型에서는 每生産週期의 길이가 一定 하므로 生産回數를 N回로 固定할 경우 單位 生産週期의 길이는 $\frac{H}{N}$가 된다. 따라서 $\frac{H}{N}$를 K라 하면 i번째 生産始點 t_{i-1}은 $(i-1)K$가 되고 計劃期間의 끝 H는 NK가 된다.

이상의 사실로 부터 計劃期間중의 生産回數를 N回로 한다면 i번째 生産週期중의 時點$[(i-1)K, (i-1)K+t_i^*]$에서의 在庫水準은 $I(t)=P\{t-(i-1)K\}-D(t)+D\{(i-1)K\}$로 표시되고, 時點$[(i-1)K+t_i^*, iK]$에서의 在庫水準 $I(t)$는 $D(iK)-D(t)$로 표시된다. 따라서 生産回數를 N으로 했을 때의 計劃期間중의 總費用은 식 (12)가 된다.

$$TC(N)=NC_1+C_2\sum_{i=1}^{N}\int_{(i-1)K}^{iK} I(t)dt$$

$$=NC_1+C_2 I(N) \tag{12}$$

단, $I(N)=\sum_{i=1}^{N}\int_{(i-1)K}^{iK} I(t)dt$

$$=\sum_{i=1}^{N}\Big[\int_{(i-1)K}^{(i-1)K+t_i^*}\{P(t-(i-1)K)-D(t)+D((i-1)K)\}dt + \int_{(i-1)K+t_i^*}^{iK}\{D(iK)-D(t)\}dt\Big] \tag{13}$$

$\bar{D}(t)=\int_0^t D(x)dx$라 하고, $t_i^*=\frac{D(iK)-D\{(i-1)k\}}{P}$ 관계를 식 (13)에 대입하여 정리하면

$$I(N)=\sum_{i=1}^{N}\Big[-\frac{\{D(iK)\}^2}{2P}-\frac{[D\{(i-1)k\}]^2}{2P}+\bar{D}\{(i-1)k\}-\bar{D}(iK)+KD(iK)+\frac{D(iK)D\{(i-1)K\}}{P}\Big] \tag{14}$$

가 되고, $d(t)=a+bt$, $D(t)=at+\frac{b}{2}t^2$, $\bar{D}(t)=\frac{a}{2}t^2+\frac{b}{6}t^3$, $K=\frac{T}{N}$의 제 관계를 식 (14)에 대입하여 정리하면,

$$I(N)=\sum_{i=1}^{N}\Big\{-\frac{b^2K^4}{2P}i^2+\Big(\frac{b^2K^4-2abK^3+bK^3P}{2P}\Big)i+\frac{4abK^3-b^2K^4-4a^2K^2}{8P}+\frac{3aK^2-bK^3}{6}\Big\}$$

$$=\frac{b^2H^4}{24PN^3}+\frac{bH^3}{12N^2}-\frac{b^2H^4+3abH^3+3a^2H^2}{6PN}+\frac{bH^3+2aH^2}{4N} \tag{15}$$

이 되고 식 (15)를 식 (12)에 대입하면 계획기간 중의 總費用 $TC(N)$은 식 (16)이 된다.

$$TC(N)=NC_1+C_2\Big(\frac{b^2H^4}{24PN^3}+\frac{bH^3}{12N^2}-\frac{b^2H^4+3abH^3+3a^2H^2}{6PN}+\frac{bH^3+2aH^2}{4N}\Big) \tag{16}$$

$TC(N)$의 最小값을 구하기 위해 $TC(N)$을 N에 대해 미분하여 0로 놓으면

$$\frac{dTC(N)}{dN}=C_1+C_2\Big(-\frac{b^2H^4}{8PN^4}-\frac{bH^3}{6N^3}+\frac{b^2H^4+3abH^3+3a^2H^2}{6PN^2}-\frac{bH^3+2aH^2}{4N^2}\Big)=0 \tag{17}$$

가 되며, $TC(N)$을 N에 대해 2차 미분하면

$$\frac{d^2TC(N)}{dN^2}=C_2\Big(\frac{b^2H^4}{2PN^5}+\frac{bH^3}{2N^4}-\frac{b^2H^4+3abH^3+3a^2H^2}{3PN^3}+\frac{bH^3+2aH^2}{2N^3}\Big) \tag{18}$$

이 된다. 식 (17)을 만족하는 N^*을 식 (18)에 대입한 후 $P\geq a+bH$의 관계를 이용하면 $\frac{d^2TC(N^*)}{dN^2}\geq 0$의 부등식이 쉽게 증명된다. 따라서 식 (17)을 만족하는 N은 식 (16)의 最小값을 산출해줌이 입증되며, $TC(N)$을 最小化해주는 最適生産回數 N^*는 다음과 같은 2가지 접근방법을 이용하여 구할 수 있다.

첫째 : $N \geq 0$ 인 정수중에서 $TC(N+1) > TC(N)$ 의 부등식을 만족시키는 最小 정수 N을 探査技法을 이용하여 구한다.

둘째 : $\frac{dTC(N)}{dN} = 0$ 을 만족하는 解를 구하고 이 解의 양편에 존재하는 N에 대해 $TC(N)$의 값을 구한후 보다 적은 값을 산출하는 N을 구한다.

最適生産回數 N^*가 구해지면 i 번째 生産週期에서의 生産量 Q_i는 그 週期중의 總需要量에 해당하므로 $K=\frac{H}{N}$의 관계를 이용하여 $Q_i = \int_{(i-1)k}^{ik} atdt = \frac{aH}{2} + (i-\frac{1}{2})\frac{bH^2}{N^2}$ 의 식으로 부터 구할 수 있다. 위 식을 살펴보면 (t, q_i)政策에서는 需要가 線型的으로 增加할 경우 每週期의 生産量이 등차가 $\frac{bH^2}{N^2}$인 등차수열 형태로 增加되고 生産期間도 每週期 $\frac{bH^2}{N^2 P}$ 씩 增加됨을 알 수 있다.

5. 適用例題 및 結果分析

$d(t)=20t$, $H=4$ (년), $P=100$, $C1=20$(만원), $C_2=10$(만원)으로 주어진 문제를 (1) (t, q_i)정책 (2) 수정된 (t_i, q_i)政策 (3) (t_i, q_i)정책에 의해 각각 풀어 본다.

(1) (t, q_i) 政策에 의한 풀이과정 및 結果

本 例題의 수치를 식 (16)에 대입하면 $TC(N) = 20N+10\left(\frac{149.33}{N}+\frac{106.67}{N^2}+\frac{42.67}{N^3}\right)$ 이 되며 $TC(N+1) > TC(N)$ 의 부등식을 최초로 만족하는 정수 N을 探査技法을 이용하여 구하면 最適生産回數는 $N^*=9$가 나온다. 또한 計劃期間 중의 總 在庫管理費用은 $TC(9)=359.68$(만원)이 되며 한 生産期週의 길이는 $K=\frac{H}{N}=0.445$(년)이 된다. i 번째 生産週期에서의 生産量은 $Q_i = \frac{aH}{2} + (i-\frac{1}{2})\frac{bH^2}{N^2} = 3.96i - 1.98$이며 生産量은 每 週期마다 3.96씩 增加된다.

(2) 수정된 (t_i, q_i)政策에 의한 풀이과정 및 結果

식 (10)에 의해 첫번째 週期의 길이를 결정하기위해 M, A, B 의 값을 살펴보면 $M=\frac{C_1}{C_2}=2$, $A=-\frac{3b^2}{8P}=-1.5$, $B=\frac{2b}{3}-\frac{ab}{P}=\frac{40}{3}$, $C=\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2P}=0$ 이 된다. 이 값을 식 (10)에 대입하면 $T_{(k)} = \left(\frac{2}{-1.5T^2_{(k-1)}+\frac{40}{3}T_{(k-1)}}\right)^{\frac{1}{2}}$의 형태가 되며, T_0에 0.1을 대입하여 수회의 반복을 거듭하면 T_1^* 는 0.543부근에서 수렴됨을 알 수 있다. 따라서 $t_1=0.543$이 되며 $a=20\times0.543=10.86$를 대입하여 B, C의 값을 수정한 후 위 순환식을 다시 이용하면, 두번째 주기의 길이 T_2^*는 0.456이 되고 세번째 週期의 초는 $t_2=t_1+T_2^*=0.999$이 된다. 이러한 과정을 반복하면 $t_8=3.357$, $t_9=3.789$이 되고 처음으로 t_{10}에서 計劃期間 H를 초과하게 된다. 따라서 t_8 이후의 生産을 한번만 해 줄 경우와 두번해 줄 경우의 費用을 비교하여야 하며 한번만 해 줄 경우의 費用은 식 (5)에 의해 $TC1=64.703$으로 계산된다. t_8 이후의 생산을 두번해 줄 경우는 식 (11)에 의해 $t_9=3.658$이 되며, t_8이후의 費用은 $TC2=61.132$이 된다. 따라서 生産은 총 10回를 하여야 하며 이 때의 費用은 357.920이 된다. 이 경우의 最適生産始點 t_i는 표〈1〉과 같다.

〈표 1〉 수정된 (t_i, q_i)정책에서의 최적해

t_i	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	Total Cost
Value of t_i	0.000	0.543	0.999	1.414	1.807	2.190	2.570	2.956	3.357	3.658	4.000	357.920

(3) (t_i, q_i)政策에 의한 풀이과정 및 結果

(t, q_i) 政策에서의 最適生産回數 $N=9$를 초기해로 이용하여 식 (2)의 點化方式程을 풀면 $t_0=0.000$, $t_1=0.630$, $t_2=1.118$, $t_3=1.552$, $t_4=1.959$, $t_5=2.354$, $t_6=2.746$, $t_7=3.144$, $t_8=3.556$, $t_9=4.000$ 이 된다. 수정된 (t_i, q_i) 政策에서의 비용식 (5)를 이용하여 이 경우의 計劃期間중 總 費用을 계산하면 $TC(9)=354.979$가 된다. $N=10$의 경우에 대해서 같은 방식으로 식 (2)를 풀고 이때의 總費用을 계산하면 355.992가 되며 $N=8$의 경우에는 總費用이 359

.511이 된다. 따라서 $TC(N+1)>TC(N)$을 최초로 만족시키는 N의 값은 9이며 이때의 點化 方程式의 解 $t_i\,(i=0,1,\cdots,8)$가 最適生産始點이 된다. 위 세 政策의 最適解를 마이크로 컴퓨터(기종 : Zeus-3)에 의해 구하는데 걸린 시간은 (t_i, q_i)政策의 경우 1분 가량이었고 그 밖의 두 政策—특히 (t, q_i) 政策—은 무시할 수 있을 정도로 짧았다. 그밖의 다양한 例題에 대하여 위 세가지 政策을 각기 적용시킨 結果는 〈표 2〉와 같다.

〈표 2〉 적용 예제 및 결과

문 제	(t_i, q_i)정 책		수정된(t_i, q_i)정책		(t_c, q_i)정 책	
	총 비 용	최적생산 회수(N^*)	총 비 용	최적생산 회수(N^*)	총 비 용	최적생산 회수(N^*)
$P=100,\ C_1=20,\ C_2=10$ $d(t)=20t,\ H=4$	354.979	9	357.919	10	359.680	9
$P=200,\ C_1=30,\ C_2=10$ $d(t)=15t,\ H=10$	1488.699	25	1491.779	26	1519.912	26
$P=200,\ C_1=20,\ C_2=10$ $d(t)=10+20t,\ H=5$	615.396	16	615.791	16	623.838	16
$P=300,\ C_1=50,\ C_2=20$ $d(t)=10+15t,\ H=10$	3266.588	32	3273.472	33	3329.231	34
$P=300,\ C_1=50,\ C_2=10$ $d(t)=10+20t,\ H=10$	2413.787	25	2415.555	25	2448.134	25

〈표 2〉의 結果는 다음과 같이 정리 分析될 수 있다.

첫째 : (t_i, q_i)政策이나 수정된 (t_i, q_i)政策은 生産量과 生産週期의 길이에 모두 제한이 없기 때문에 生産週期의 길이에 제약이 가해지는 (t, q_i)政策에 비해 경제적인 면에서 우수한 경우가 많다.

둘째: (t_i, q_i)政策과 他 政策들과의 費用차액은 計劃期間 H가 길어 짐에 따라 더욱 커지는 경우가 많다.

셋째 : 세 政策들에 있어서 最適生産回數 N^*는 모두 비슷한 값을 나타낸다.

네째 : 그러므로 計劃期間이 길은 문제에서는 (t_i, q_i)政策이나 수정된 (t_i, q_i)政策을 사용함이 유리하며, (t_i, q_i)政策 사용시에는 N의 초기값으로 (t, q_i) 政策에서의 最適生産回數를 이용하면 계산이 용이하여 진다.

6. 結 論

本 硏究에서는 需要가 線型的으로 增加하고 生産은 一定率에 의해 연속적으로 이루어지는 製品에 대한 最適生産始點과 生産量을 결정해 주는 數學的 模型을 제시하였다. 計劃期間은 유한하다고 전제하였으며 生産時點의 간격과 生産量에 대한 제한에 따라 政策을 (t_i, q_i)政策, 수정된 (t_i, q_i)政策, (t, q_i) 政策의 셋으로 분류하고 각 政策에 대해 最適解를 算出해 주는 數學的 模型을 수립하였다.

本 硏究에서 제시한 세가지 政策중 (t_i, q_i) 政策은 費用節減이 극히 중요한 상황에 적용시켜 효과를 볼 수 있고, 계산과정이 비교적 간단한(t, q_i) 政策이나 수정된(t_i, q_i)政策은 현장의 실무자 들에 의해 쉽게 이용될 수 있다. 本 硏究의 結果 (t_i, q_i)政策이나 수정된 (t_i, q_i)政策이 (t, q_i)政策에 비해 經濟的으로 유리함을 알 수 있었고 이러한 현상은 대부분의 경우 計劃期間이 길어짐에 따라 더욱 뚜렷하게 나타남을 예증하였다. 특히 수정된(t_i, q_i)政策은 發見的 技法을 이용한 방식으로서 적은 계산량으로 最適 解에 근사한 우수한 解를 제공해 주며 計劃期間이 길거나 불분명할 때 유효하게 적용 될 수 있는 政策이다. 또한 經濟的으로 가장 열등하다고 생각되는(t, q_i)政策도 매 生産週期의 길이가 일정하여 일괄성있는 生産計劃의 수립을 가능케하므로 管理效率的인 면에서는 他 政策에 비해 유리할 수도 있게된다. 따라서

세정책중 어느 한 政策을 선택, 운용하기 위해서는 費用과 管理效率上의 問題, 計算時間 및 計劃期間의 길이등 모든 면을 고려한 신중한 결정이 필요하다.

本 硏究에서서는 品切이 발생하는 경우와 需要가 非線型的인 경향을 취하는 경우에 대해서는 고려하지 못하였다. 需要가 비록 확정적이라도 需要函數의 特性이 달라지거나 注文殘高(back-log)가 許容되는 등 品切의 발생이 可能해지면 이에 따라 模型樹立이 전혀 달라지게 된다. 따라서 이러한 점들을 고려한 후속 연구가 本 硏究의 연장으로 계속 수행되어야 하겠다.

參 考 文 獻

〔1〕Donaldson, W. A., "Inventory Replenishment Policy for a Linear Trend in Demand-an analytical solution," *Opl Res. Q.*, Vol. 28, pp. 663-670, 1977.

〔2〕Henery, R. J., "Inventory Replenishment Policy for Increasing Demand," *J. Opl. Res. Soc.*, Vol. 30, pp. 611-617, 1979.

〔3〕Johnson, L. A., and Montgomery, D. C., *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control*, John wiley & Sons Inc., New York, 1974.

〔4〕Naddor, Eliezer, *Inventory System*, Ch. 7, John Wiley & Sons Inc., New York, 1966.

〔5〕Phelps, R. I., "Optimal Inventory Rule for a Linear Trend in Demand with a Constant Replenishment Period," *J. Opl Res. Soc.*, Vol. 31, pp. 439-442, 1980.

〔6〕Silver, E. A., "A Simple Inventory Replenishment Decision Rule for a Linear Trend in Demand," *J. Opl Res. Soc.*, Vol. 30, pp. 71-75, 1979.