多變數 ARMA模型의 推定

——最小 AIC節次——

朴　埈　卿
李　鎬　彰

▷ 目　次 ◁

Ⅰ. 序

經濟時系列의 循環變動을 分析·豫測하기 위하여 時系列模型이 推定된다. 趨勢와 季節變動이 제거된 時系列은 共分散定常性(covariance stationarity)을 나타내며, 共分散系列(covariance sequence)은 循環變動에 관련된 모든 情報를 함축한다. 時系列模型의 推定은 사실상 共分散系列을 推定하는 것이다. 時系列模型의 推定에서는 模型의 構造識別(identification)이 가장 어려운 問題이다. 推定에 앞서 模型의 構造가 任意로 決定되는 경우가 있으나 構造에 대한 事前制約(a priori restriction)이 共分散系列의 推定을 歪曲시키므로 構造도 推定되어야 한다. 일반적으로 假定된 模型(構造의 集合)內의 여러 構造가 推定되고 推定된 構造들 중에서 推定適合度(goodness of fit)가 높고 推定된 係數의 數가 적은 構造가 選擇된다. AR模型(autoregressive model)이나 單變數 ARMA模型(autoregressive movingaverage model)의 構造識別은 階數(order)의 決定으로 充分하므로 階數가 다른 여러 構造가 推定되어 比較된다. 多變數 ARMA模型의 경우에는 觀測上 同一한(observationally equivalent) 構造가 無數히 많기 때문에 階數決定이 構造識別의 充分條件이 될 수 없으며, 이로 인하여 ARMA模型이 널리 利用되지 못하였다[1]. 그러나 AR模型을 推定하는 경우에도 普遍妥當한 構造識別基準이 있었던 것은 아니다.

최근에 Akaike(1974 b)는 時系列模型의 構

筆者 : 朴埈卿—韓國開發硏究院 副硏究委員, 李鎬彰—韓國開發硏究院 硏究員

1) 2個의 構造가 觀測上 同一하다는 것은 두 構造에 의하여 決定되는 共分散系列이 同一하다는 것을 의미한다. 計量模型에서는 두 構造에 의하여 決定되는 內生變數의 確率分布가 同一하다는 것을 의미한다.

造識別基準, AIC(Akaike Information Criterion)와 AIC를 利用한 推定節次, 最小 AIC 節次(Minimum AIC Procedure)를 제시하였다. 平均對數尤度(average log likelihood)의 極限分布에서 導出되는 AIC는 {−2(對數最尤度)+2(推定된 係數의 數)}로 定義되며, 情報理論(information theory)의 觀點에서 보면 實際構造(true structure)와 假定된 構造間의 乖離를 測定하는 測度(measure)의 漸近的 不偏推定(asymptotically unbiased estimate)이 된다. 最小 AIC 節次는 最尤推定法에 의해서 推定된 여러 構造中에서 AIC가 最小인 構造를 最適推定으로 決定한다. Akaike(1974 a)는 多變數 ARMA 模型의 構造識別問題가 標準狀態空間模型(canonical state space model)의 利用으로 解決될 수 있음을 제시하였다. 주어진 共分散系列로부터 決定되는 標準狀態空間模型의 構造는 唯一하며, 過去觀測群(set of past observations)과 未來觀測群間의 標準相關分析(canonical correlation analysis)을 통하여 構造의 近似推定이 可能하다. 推定된 標準狀態空間模型은 ARMA 模型으로 變換된다. 이러한 研究結果가 綜合되어 構造에 事前制約을 加하지 않고 自動的으로 ARMA 模型을 推定하는 컴퓨터「프로그램」이 開發되었다[2].

構造識別基準 AIC와 標準狀態 空間概念은 時系列模型의 構造識別에서 經濟性原理(principle of parsimony)가 갖는 意味를 明確하게 說明한다. 經濟性原理에서 보면, AR 模型에 비하여 經濟性이 높은 ARMA 模型의 有用性이 分明해진다. 實證的 研究結果가 많이 蓄積된 段階는 아니지만, 最小 AIC 節次에 의하여 推定된 ARMA 模型의 有用性을 뒷받침하는 研究結果들이 報告되고 있다. Akaike(1978)는 理論的 定常確率過程(stationary stochastic process)에서 產出된 時系列을 使用한 「스펙트랄」密度函數(spectral density function)의 推定에서 ARMA 模型을 利用한 推定이 移動平均節次(window procedure)에 의한 推定보다 理論的「스펙트랄」密度函數에 近接함을 報告하고 있다. Oritani(1979)는 先物市場價格, 專門家意見調査資料 및 巨視計量模型의 豫測과 ARMA 模型의 豫測을 比較하고 ARMA 模型의 豫測誤差가 相對的으로 작은 경우가 많았음을 報告하고 있다. Oritani는 이같은 豫測能力이 AIC의 利用으로 經濟性原理가 適切히 反映된 結果라는 結論을 내리고 있다.

時系列模型이 제공할 수 있는 豫測은 몇 개의 變數에 限定되므로 豫測需要者의 要求를 充足시키지 못할 수 있다. 수십 개 이상의 變數에 대한 豫測이나 多樣한 政策手段의 效果分析이 必要한 경우에 巨視計量模型이 推定되는데, 構造式(structural equation)을 設定하는 過程에서 많은 事前制約이 加해진다. 그러나 採擇된 事前制約을 뒷받침할 수 있는 事前知識이 不充分하며 設定된 構造式은 識別되지 않는 경우가 많다[3]. 이러한 경우에 構造式體系는 誘導式體系(reduced form equation system)의 變形에 지나지 않으며 서로 競合하는 理論的 假說들은 觀測上 同一하다. 豫測이나 政策效果分析은 사실상 構造式體系의 識別과는 無關하여 誘導式體系의 推定만으로 充分하다. 그러나 構造式의 設定을 위하여 採擇된 事前制約들이 誘導式體系의 推定을 歪曲시키게 된다. 특히 變數間의 因果方向이나 時差分

2) H. Akaike, E. Arahata and T. Ozaki (1975) 參照.
3) C. Sims (1980) 參照.

布(lag distribution)의 形態에 관한 事前制約은 計量模型의 安定性(stability)과 直結되므로 推定된 模型의 非現實的 動學擬態分析結果(dynamic simulation results)를 招來하는 主要原因이 된다. 그릇된 事前制約은 檢索되고 再推定過程에서 是正되지만, 이러한 過程은 不必要한 時間과 計算費用의 浪費를 隨伴하게 된다. 이같은 浪費를 피하기 위하여, 大規模計量模型의 推定에 先行하여 部門別로 部門內의 모든 變數를 內生變數로 取扱하고 時差分布에 대하여 事前制約을 加하지 않는 時系列模型을 推定함으로써, 時系列資料에 함축되어 있는 變數間의 動態的 關係에 관한 事前知識을 求할 수 있다.

本報告書는 Akaike의 最小 AIC 節次를 紹介하기 위한 것이다. Ⅱ節에서는 最小 AIC節次의 理解에 必要한 定常確率過程의 確率的特性(probabilistic characteristics)과 線型模型을 要約하여 說明하고, Ⅲ節에서는 最小 AIC節次의 槪要와 主要要素인 構造識別基準 AIC와 標準狀態空間模型의 初期推定(initial estimate)에 대하여 說明하고자 한다[4]. 끝으로 Ⅳ節에서는 分期別 經常 GNP 增加率, 物價上昇率 및 通貨增加率의 3變數 ARMA 模型의 推定結果를 例示한다.

Ⅱ. 定常確率過程의 線型模型

共分散定常性은 定常確率過程의 確率的 特性이다. $\{y_t\}$를 m 次元 確率「벡터」 y_t로 構成되는 定常確率過程이라 하자. $\{y_t\}$는 다음과 같은 確率的 特性을 갖는다. 모든 時點(整數) t에 대하여 期待値 $E[y_t]$는 零「벡터」이며 共分散行列 $E[y_t y'_{t+\theta}]$은 時差 θ만의 函數이다. $E[y_t y'_{t+\theta}]$을 $\Lambda(\theta)$로 表記한다. 定義에 의하여 $\Lambda(\theta)=\Lambda(-\theta)$이다. 時系列 $\{y_1, y_2, \cdots, y_T\}$을 定常確率過程 $\{y_t\}$의 實現(realization)이라 하자. 時系列의 平均과 共分散行列을 $\bar{y}$와 $C(\theta)$로 表記한다.

$$\bar{y}=T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T} y_t,$$
$$C(\theta)=T^{-1}\Sigma_{t=1}^{T-\theta}(y_t-\bar{y})(y_{t+\theta}-\bar{y})'$$

定常確率過程 $\{y_t\}$의 共分散行列 $\Lambda(\theta)$이 零行列로 收斂할 때, $\bar{y}$와 $C(\theta)$는 $E[y_t]$와 $\Lambda(\theta)$의 一致推定(consistent estimate)이 된다.

定常確率過程 $\{\varepsilon_t\}$를 構成하는 確率變數들 ε_t가 서로 獨立的이며 同一한 確率分布를 갖고 期待値 $E[\varepsilon_t]$가 零「벡터」일 때, $\{\varepsilon_t\}$를 純粹確率過程(purely random process)이라 한다. 定義에 의하여 共分散行列 $E[\varepsilon_t \varepsilon'_{t+\theta}]$는 零이 아닌 모든 θ에 대하여 零行列이다. 共分散行列 $E[\varepsilon_t \varepsilon'_t]$은 Σ로 表記한다. 定常確率過程 $\{y_t\}$가 (1)과 같이 純粹確率過程 $\{\varepsilon_t\}$의 移動平均으로 表現되며 級數行列 $\Sigma_{\theta=1}^{T} W'_\theta W_\theta$이 收斂할 때, $\{y_t\}$를 線型過程(linear process)이라 한다.

$$y_t=\varepsilon_t+W_1\varepsilon_{t-1}+W_2\varepsilon_{t-2}+\cdots+W_\theta\varepsilon_{t-\theta}+\cdots$$
$$=W(L)\varepsilon_t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

線型過程 $\{y_t\}$의 共分散行列 $\Lambda(\theta)$는 收斂하며 따라서 時系列의 平均 $\bar{y}$와 共分散行列 $C(\theta)$은 $E(y_t)$와 $\Lambda(\theta)$의 一致推定이 된다. 線型過程 $\{y_t\}$는 (1)의 行列多項式(matrix

4) Ⅱ節의 內容은 最小 AIC 節次의 理解에 必要한 最小限의 內容으로 具體的인 說明은 Breiman(1968), Dhrymes(1970), Malinvaud(1970), Nerlove(1979)를 參考하기 바란다.

polynomial) $W(L)$의 모든 根(zero)이 複素數平面에서 單位圓(unit circle)의 外部에 위치할 때, (2)와 같이 自己回歸表現(autoregressive representation)을 갖는다[5]. (2)의 行列多項式 $B(L)$은 $W(L)$의 逆行列이다.

$$y_t+B_1y_{t-1}+B_2y_{t-2}+\cdots+B_\theta y_{t-\theta}+\cdots$$
$$=B(L)y_t=\varepsilon_t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

確率線型定差方程式(stochastic linear difference equation system) (3)의 解인 確率過程 $\{x_t\}$를 AR 過程(autoregressive process)이라 한다. (3)의 行列多項式 $\Phi(L)$의 모든 根이 單位圓의 外部나 單位圓上에 위치할 때, (3)의 解 $\{x_t\}$는 定常確率過程이 된다[6].

$$x_t+\Phi_1x_{t-1}+\Phi_2x_{t-2}+\cdots+\Phi_\theta x_{t-\theta}+\cdots$$
$$=\Phi(L)x_t=\varepsilon_t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$\Phi(L)$의 모든 根이 單位圓의 外部에 위치할 때 $\{x_t\}$는 線型過程이 된다. (3)의 解로 定義되는 定常確率過程 $\{x_t\}$은 일반적으로 서로 確率的으로 無關한 (uncorrelated) 두 定常確率過程 $\{y_t\}$와 $\{z_t\}$의 合으로 表現된다. 定常確率過程 $\{y_t\}$는 (1)의 表現을 갖는 線型過程이다. 定常確率過程 $\{z_t\}$는 (3)의 同次定差方程式(homogeneous difference equation)을 만족하는 定常確率過程으로 定義되며 (3)의 特性方程式(characteristic equation)의 單位圓上의 根, $e^{i\lambda_k t}(k=1, 2, \cdots)$들의 線型結合(linear combination)으로 표시된다. 分明히 $\{z_t\}$의 共分散行列은 收斂하지 않으며 따라서 時系列의 平均 $\bar{z}$는 $E[z_t]$의 一致推定이 아니다. 이하에서는 線型過程 $\{y_t\}$만을 고려하기로 한다.

定常確率過程 $\{y_t\}$가 線型過程이면, (2)로부터 條件附 期待値(conditional expectation), $E[y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots]$는 過去實現(past realization), $y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots$의 線型結合으로 표시된다.

$$E[y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots]=B_1y_{t-1}$$
$$+B_2y_{t-2}+\cdots+B_\theta y_{t-\theta}+\cdots$$

(1)과 (2)로부터, 모든 $\theta\geq0$에 대하여, $y_{t+\theta}$는

---

5) L은 lag operator 이며, $L^\theta x_t=x_{t-\theta}$이다. (1)은 L을 이용하여 다음과 같이 표시된다.

$$y_t=(I+W_1L+W_2L^2+\cdots+W_\theta L^\theta+\cdots)\varepsilon_t$$
$$=W(L)\varepsilon_t$$

$W(L)$은 L의 多項式을 元素로 갖는 行列이며, $W(L)$의 根(zeros)은 方程式 $|W(r)|=0$의 根(root)이다. $W(r)$의 元素는 일반적으로 無限級數이므로 $[W(r)]^{-1}$이 存在하기 위해서는 $W(r)$이 單位圓을 包含하는 複素數平面의 圓形開集合(open annulus)에서 分析可能하다는 條件이 必要하다.

6) $\Phi(L)$의 單位圓上의 根이 複素數인 경우를 말하며 實數根 1인 경우는 제외된다. Wold(1938)에 의하면, 모든 定常確率過程 $\{x_t\}$는 서로 確率的으로 無關한 두 確率過程, 즉 線型過程 $\{y_t\}$와 非確率過程(deterministic process) $\{z_t\}$의 合으로 表示된다. $x_t=y_t+z_t$, $E[\{y_t-E[y_t]\}\{z_t-E[z_t]\}]=0$. 非確率過程 $\{z_t\}$는 (3)의 同次定差方程式 (3′)를 만족하는 定常確率過程이다.

$$x_t+\Phi_1x_{t-1}+\Phi_2x_{t-2}+\cdots+\Phi_\theta x_{t-\theta}+\cdots=0 \quad \cdots\cdots(3')$$

$\{z_t\}$가 (3′)를 만족하는 定常確率過程일 때, z_t는 絶對値가 1인 特性根 $e^{i\lambda_k t}(k=1, 2, \cdots)$들의 線型結合으로 표시된다.

$$z_t=\sum_{k=1}^{\infty}u_k e^{i(\lambda_k t+\phi_k)}$$

周波數 λ_k는 (3′)의 解로부터 결정되며 振幅 u_k와 位相 ϕ_k는 確率變數이다. $\{z_t\}$가 非確率過程(deterministic process)이라 함은 $\{z_t\}$의 未來實現(future realization)이, (3′)로부터, 過去實現(past realization)에 의하여 確率 1로 決定됨을 의미한다. 線型過程 $\{y_t\}$는 purely nondeterministic process라 불리운다.

確率定差方程式體系 (3)는 同次定差方程式 (3′)의 一般解가 收斂할 때 安定的(stable)이다. (3′)의 一般解가 收斂하기 위한 充分條件은 特性方程式의 모든 根(root)이 單位圓의 內部에 위치하는 것이다. 설명의 편의를 위하여 (3)이 m次元 變數 x_t에 관한 p階 定差方程式이라 하면, 同次定差方程式(3′)의 一般解는 特性方程式 $|Ir^p+\Phi_1r^{p-1}+\Phi_2r^{p-2}+\cdots+\Phi_p|=0$의 K個의 根 $r_k(k=1, 2, \cdots, K, K\leq mp)$의 線型結合 $\sum_{k=1}^{K}a_kr_k^t$로 표시된다. a_k는 未定係數로서 初期條件에 의하여 결정된다. 이제 모든 k에 대하여 $|r_k|<1$이면, 同次式의 一般解는 收斂하며 (3)은 安定的이다. 絶對値 1인(單位圓上의) 特性根 $e^{i\lambda_k t}=\cos\lambda_k t+i\sin\lambda_k t$이 있으면 一般解는 振動한다. 特性方程式이 重根이나 絶對値가 1보다 큰 根을 가질 때 一般解는 發散한다. 行列多項式 $\Phi(L)$의 根(zero)은 方程式 $|I+\Phi_1\rho+\Phi_2\rho^2+\cdots+\Phi_p\rho^p|=0$의 根을 뜻한다. $\rho_k(k=1, 2, \cdots, K)$가 $\Phi(L)$의 zero라 하면 $\rho_k=\frac{1}{r_k}$이다.

다음과 같이 表示된다.

$$y_{t+\theta}=E[y_{t+\theta}|y_t,y_{t-1},\cdots]+\varepsilon_{t+\theta}+W_1\varepsilon_{t+\theta-1}+\cdots+W_{\theta-1}\varepsilon_{t+1}$$

$(t+1)$時點 이후의 攪亂要因(innovation) $\varepsilon_{t+\theta}$ $(\theta\geq 1)$은 t 時點 이전의 實現 $y_t, y_{t-1},\cdots$과 確率的으로 無關하므로 $E[y_{t+\theta}|y_t,y_{t-1},\cdots]$은 豫測誤差의 分散을 最小化하는 最適豫測(optimal forecast), $\hat{y}_t(\theta)$와 同一하다[7]. (2)로부터 $\hat{y}_t(\theta)$는 다음의 關係를 만족한다.

$$\begin{aligned}\hat{y}_t(\theta)=&B_1\hat{y}_t(\theta-1)+B_2\hat{y}_t(\theta-2)+\cdots\\&+B_{\theta-1}\hat{y}_t(1)\\&+B_\theta y_t+B_{\theta+1}y_{t-1}+\cdots\end{aligned}\qquad\cdots(4)$$

條件附 期待値 $\hat{y}_t(1),\hat{y}_t(2),\cdots,\hat{y}_t(\theta),\cdots$는 循環公式(recurrent formula) (4)에 의하여 逐次的으로 求해진다. $\{y_t\}$가 線型過程이면, AR 係數行列 B_θ가 零行列로 收斂하므로, θ가 無限히 커짐에 따라 $\hat{y}_t(\theta)$는 期待値 $E(y_t)$로 收斂하며 豫測誤差의 分散 $|\Sigma+\Sigma_{k=1}^{\theta}W_k\Sigma W_k'|$은 增加하여 $|E[y_t y_t']|$로 收斂한다.

Y는 定常確率過程 $\{y_t\}$를 構成하는 確率變數들 y_t에 의하여 形成(span)되는 「벡터」空間(vector space)이며, E는 確率變數들 ε_t로 形成되는 「벡터」空間이라 하자. Y와 E는 Hilbert 空間이다. Y의 部分空間(subspace)인 Y_t^-와 Y_t^+를 다음과 같이 定義한다.

$$Y_t^-=\{y_{t+\theta}\ ;\ \theta\leq 0\},\quad Y_t^+=\{y_{t+\theta}\ ;\ \theta\geq 0\}$$

Y_t^+의 元素인 $y_{t+\theta}$의 t 時點에서의 條件附 期待値 $E[y_{t+\theta}|y_t,y_{t-1},\cdots]$은 $y_{t+\theta}$의 Y_t^- 上의 投影(orthogonal projection), $y_{t+\theta}|Y_t^-$와 同一하며, 攪亂要因 ε_t는 $y_t-y_t|Y_{t-1}^-$로 定義된다. E_t를 t 時點의 攪亂要因 ε_t의 定義域(domain of definition)이라 하면,

$$E_t=Y_t^-|Y_{t-1}^-,\quad Y_t^-=E_t\oplus Y_{t-1}^-\ \cdots\cdots(5)$$

이제 모든 條件附 期待値들 $E[y_{t+\theta}|y_t,y_{t-1},\cdots]$, $\theta\geq 0$로 形成되는 Hilbert 空間 V_t는 Y_t^+의 Y_t^- 上의 投影, $Y_t^+|Y_t^-$이다. V_t를 確率過程 $\{y_t\}$의 t 時點에서의 狀態空間(state space)이라 한다. 狀態空間 V_t는 일반적으로 無限次元空間이다. V_t의 次元은 다음 式에서 定義되는 Hankel 行列 $\varLambda$의 階數(rank)와 同一하다.

$$\varLambda=E[y_t^+\cdot y_t^{-\prime}]=\begin{bmatrix}\varLambda(1), & \varLambda(2), & \varLambda(3),\cdots\\ \varLambda(2), & \varLambda(3),\cdots\cdots & \\ \varLambda(3), & \vdots\cdots\cdots & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

$$y_t^{+\prime}=(y_t',y_{t+1}',\cdots),\quad y_t^{-\prime}=(y_{t-1}',y_{t-2}',\cdots)\qquad\cdots\cdots(6)$$

狀態空間 V_t는 確率過程 $\{y_t\}$의 未來實現(future realization)에 관하여 過去實現이 함축하고 있는 情報의 總體를 數學的으로 表現한 것이다. 狀態空間 V_t가 有限次元(finite dimension)이면, 有限個數의 過去實現이 未來實現에 관한 모든 情報를 함축한다.

---

7) $y_{t+\theta}^p$를 t時點에서의 $y_{t+\theta}$의 豫測이라 하면, 豫測誤差의 分散行列은 $E[(y_{t+\theta}^p-y_{t+\theta})(y_{t+\theta}^p-y_{t+\theta})']$이다. $y_{t+\theta}$를 $E[y_{t+\theta}|y_t,y_{t-1},\cdots]+\varepsilon_{t+\theta}+W_1\varepsilon_{t+\theta-1}+\cdots+W_{\theta-1}\varepsilon_{t+1}$으로 代置하면,

$$\begin{aligned}&E[(y_{t+\theta}^p-y_{t+\theta})(y_{t+\theta}^p-y_{t+\theta})']\\&=E[(y_t^p-E[y_{t+\theta}|y_t,y_{t-1},\cdots])(y_t^p-E[y_{t+\theta}|y_t,y_{t-1},\cdots])']\\&\quad-E[(y_t^p-E[y_{t+\theta}|y_t,y_{t-1},\cdots])(\varepsilon_{t+\theta}+W_1\varepsilon_{t+\theta-1}+\cdots+W_{\theta-1}\varepsilon_{t+1})']\\&\quad-E[(\varepsilon_{t+\theta}+W_1\varepsilon_{t+\theta-1}+\cdots+W_{\theta-1}\varepsilon_{t+1})(y_t^p-E[y_{t+\theta}|y_t,y_{t-1},\cdots])']\\&\quad-E[(\varepsilon_{t+\theta}+W_1\varepsilon_{t+\theta-1}+\cdots+W_{\theta-1}\varepsilon_{t+1})(\varepsilon_{t+\theta}+W_1\varepsilon_{t+\theta-1}+\cdots+W_{\theta-1}\varepsilon_{t+1})']\end{aligned}$$

豫測誤差의 分散 $|E[(y_{t+\theta}^p-y_{t+\theta})(y_{t+\theta}^p-y_{t+\theta})']|$은 $y_{t+\theta}^p=E[y_{t+\theta}|y_t,y_{t-1}\cdots]$일 때 最小化되며 최소값은 $|I+\sum W_k\Sigma W_k'|$이다. Σ는 ε_t의 共分散行列 $E[\varepsilon_t\varepsilon_t']$이다.

定常確率過程 $\{y_t\}$의 Hankel 行列의 階數 n이 有限하면 모든 時點 t에서 $\{y_t\}$의 狀態空間 V_t는 n次元 Hilbert 空間이다. V_t의 基底「벡터」(basis vector) v_t를 $\{y_t\}$의 t時點에서의 狀態「벡터」라 한다. v_t는 $(t+1)$時點 이후의 $\{y_t\}$의 實現을 豫測하는 데 必要한 모든 情報를 함축한다. 이제 v_t와 v_{t+1} 간의 관계로부터 $\{y_t\}$의 狀態空間表現(state space representation)을 導出할 수 있다. $\{y_t\}$가 線型過程이면, (5)와 投影의 特性에 의하여 다음 관계가 성립한다.

$$Y^+_{t+1}|Y^-_{t+1}=Y^+_{t+1}|Y^-_t \oplus Y^+_{t+1}|E_{t+1} \cdots(7)$$

$Y^+_{t+1}|Y^-_t$는 $Y^+_t|Y^-_t$의 部分空間이므로, v_{t+1}와 v_t를 각기 V_{t+1}와 V_t의 基底「벡터」라 하면, (7)과 (5)를 (8)로 表現하는 係數行列들 F, G 및 H를 決定할 수 있다[8]. 確率變數 y_t가 m次元「벡터」라면, F는 $(n\times n)$ 轉移行列(transition matrix)이고, G는 $(n\times m)$ 衝擊反應行列(impulse response matrix)이며, H는 $(m\times n)$行列이다.

$$v_{t+1}=Fv_t+G\varepsilon_{t+1},\ \ y_t=Hv_t \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

(8)을 定常確率過程 $\{y_t\}$의 狀態空間表現 또는「마코비안」表現(Markovian representation)이라 한다. (8)은 $\{y_t\}$의 ARMA表現(autoregressive moving-average representation)으로 變換된다. 定常確率過程의 狀態空間表現과 ARMA 表現間에는 1 對 1의 對應이 있다. (8)의 轉移行列 F의 特性方程式 $|\lambda I-F|=0$이 $\lambda^n+\Sigma_{i=1}^n b_i\lambda^{n-i}=0$로 展開된다면, Cayley-Hamilton 定理에 의하여, $F^n+\Sigma_{i=1}^n b_iF^{n-i}=0$가 成立하며 따라서 $\{y_t\}$는 다음과 같은 ARMA 表現을 갖는다.

$$\begin{aligned}y_{t+n}+b_1y_{t+n-1}+\cdots+b_ny_t&=\varepsilon_{t+n}\\&+C_1\varepsilon_{t+n-1}+\cdots+C_{n-1}\varepsilon_{t+1},\\C_i=H(F^i+b_1F^{i-1}+\cdots+b_iI)G.\end{aligned}$$

逆으로, 定常確率過程의 ARMA 表現은 狀態空間表現으로 變換된다. 定常確率過程 $\{y_t\}$가 다음 式과 같은 階數 (p,q)의 ARMA 表現을 갖는다고 하자.

$$\begin{aligned}y_t+B_1y_{t-1}+\cdots+B_py_{t-p}&=\varepsilon_t\\&+A_1\varepsilon_{t-1}+\cdots+A_q\varepsilon_{t-q}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)\end{aligned}$$

$B_i(i=1,2,\cdots,p)$와 $A_j(j=1,2,\cdots,q)$는 $(m\times m)$係數行列이며, 攪亂要因 $\{\varepsilon_t\}$는 純粹確率過程이다. $\{y_t\}$가 線型過程이면 行列多項式 $B(L)$의 모든 根은 單位圓의 外部에 위치하며 (9)는 (1)의 MA 表現(moving-average representation)으로 變換될 수 있다. 攪亂要因 $\{\varepsilon_t\}$의 共分散行列 $\Sigma=E[\varepsilon_t\varepsilon_t']$이 正則行列(nonsingular matrix)이면, (1)의 MA 係數行列들 W_θ는 唯一하게 決定되며, 다음의 관계를 만족한다.

$$A_j=W_j+B_1W_{j-1}+\cdots+B_pW_{j-p}$$

(9)의 MA 部分의 行列多項式 $A(L)$의 모든 根이 單位圓의 外部에 위치하면, (9)는 (2)의 AR 表現으로 變換될 수 있다. (9)로부터, 條件附 期待値들 $\hat{y}_t(\theta)$는 다음의 관계를 만족한다.

$$\begin{aligned}\hat{y}_t(\theta)+B_1\hat{y}_t(\theta-1)+\cdots+B_p\hat{y}_t(\theta-p)\\=\hat{\varepsilon}_t(\theta)+A_1\hat{\varepsilon}_t(\theta-1)+\cdots\\+A_q\hat{\varepsilon}_t(\theta-q).\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)\end{aligned}$$

定義에 의하여, $\theta\leq 0$일 때 $\hat{y}_t(\theta)=y_{t+\theta}$이고

8) J. Rissanen(1971) 參照.

$\hat{\varepsilon}_t(\theta)=\varepsilon_{t+\theta}$이며, $\theta>0$일 때 $\hat{\varepsilon}_t(\theta)=0$이다. $\theta\geq q+1$일 때 (10)의 右邊은 消滅한다. 따라서, $K=\max(p, q+1)$이라면, 다음의 관계가 성립한다.

$$\hat{y}_t(K)=-B_1\hat{y}_t(K-1)$$
$$-B_2\hat{y}_t(K-2)-\cdots-B_K y_t \cdots\cdots\cdots(11)$$

定義에 의하여, $i\geq p+1$일 때 $B_i=0$이다. (1)로부터, 다음의 관계가 성립한다.

$$\hat{y}_{t+1}(\theta)=\hat{y}_t(\theta)+W_\theta\varepsilon_{t+1}. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

이제 (11)과 (12)로부터, $(y_t', \hat{y}_t(1)', \cdots, \hat{y}_t(K-1)')$를 狀態「벡터」 v_t로 사용하여 (9)의 ARMA 表現을 (13)의 狀態空間表現으로 變換할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} y_{t+1} \\ \hat{y}_{t+1}(1) \\ \vdots \\ \hat{y}_{t+1}(K-2) \\ \hat{y}_{t+1}(K-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -B_K & -B_{K-1} & -B_{K-2} & \cdots & -B_1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} y_t \\ \hat{y}_t(1) \\ \vdots \\ \hat{y}_t(K-2) \\ \hat{y}_t(K-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ \vdots \\ W_{K-2} \\ W_{K-1} \end{bmatrix} \varepsilon_{t+1}$$
$$y_t=(I, 0, \cdots 0)\begin{bmatrix} y_t \\ \hat{y}_t(1) \\ \vdots \\ \hat{y}_t(K-1) \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

모든 $\theta\geq 0$에 대하여, 條件附 期待値들 $\hat{y}_t(\theta)$는 v_t의 構成要素(component)들의 線型結合으로 표시된다.

$$\hat{y}_t(\theta)=HF^\theta v_t$$

狀態空間表現의 構造, (v, F, G, H)는 狀態「벡터」 v의 構造에 의하여 決定된다. v의 構造가 決定되면, (F, G, H)가 唯一하게 決定된다. 狀態空間의 基底「벡터」는 어느 것이나 狀態「벡터」로 사용될 수 있으므로 한 定常確率過程의 狀態空間表現은 無數히 많다. 換言하면, 狀態空間表現의 無數히 많은 構造가 觀測上 同一하다. (v, F, G, H)가 定常確率過程 $\{y_t\}$의 狀態空間表現이면, 任意의 $(n\times n)$ 正則行列 P에 대하여, $u=Pv$는 狀態空間의 基底「벡터」가 될 수 있으며, $(u, P^{-1}FP, P^{-1}G, HP)$도 $\{y_t\}$의 狀態空間表現이 된다. 모든 $\theta\geq 0$에 대하여, $\hat{y}_t(\theta)=HP\cdot P^{-1}F^\theta Pu_t=HF^\theta Pu_t$이며, 두 狀態空間表現은 同一한 共分散系列을 표시한다. 모든 $\theta\geq 0$에 대하여

$$E[y_{t+\theta}y_t']=E[HF^\theta v_t\cdot(Hv_t)']=HF^\theta G\Sigma,$$
$$E[y_{t+\theta}y_t']=E[HF^\theta Pu_t\cdot(HPu_t)']=HF^\theta G\Sigma$$

Σ는 $\{y_t\}$의 攪亂要因 $\{\varepsilon_t\}$의 共分散行列 $E[\varepsilon_t\varepsilon_t']$이다.

Ⅲ. 最小 AIC 節次

1. 推定節次의 槪要

時系列分析은 觀測된 時系列資料를 利用하여 確率過程의 確率的 特性을 推測하는 節次이다. 定常時系列(stationary time series)의 時系列分析에서는 주어진 時系列資料를 未知의 定常確率過程의 實現인 것으로 假定한다. 實際應用에 有用한 定常確率過程의 確率的 特性은 共分散系列 $\{X(\theta);\theta=0, 1, 2, \cdots\}$과 관련이 있다. 定常確率過程의 線型模型의 階數와 係數는 共分散系列에 의하여 결정되며, 時系列模型의 推定은 주어진 定常時系列을 産出한

定常確率過程의 共分散系列을 推定하는 節次라 할 수 있다. 따라서 模型의 構造에 대한 事前制約은 共分散系列의 推定을 歪曲시키게 된다. Ⅱ節에서 본 바와 같이 定常確率過程의 線型模型은 일반적으로 無限級數의 形態를 취하며, 有限階數의 ARMA 模型으로 表現되는 경우는 Hankel 行列의 階數가 有限한 경우이다. 이는 共分散系列이 急速히 零行列로 收斂하는 경우이다. 따라서 時系列模型의 推定은 有限한 時系列資料로부터 實際構造를 近似推定(statistical approximation)하는 것으로 理解될 수도 있다.

Akaike(1974 b)는 時系列模型의 構造識別問題를 實際構造의 近似推定問題로 認識하고 構造識別節次를 最適推定基準下에서 주어진 時系列資料에 대한 推定適合度가 가장 높은 構造를 推定하는 節次로 定義하였다. 構造識別基準 AIC는 이러한 動機에서 제시된 最適推定基準이다. 最小 AIC 節次는 假定된 模型內에서 選擇可能한 多數의 構造를 最尤推定法에 의하여 推定한 후, 推定된 構造들 중에서 AIC가 最小인 構造를 最適推定(best estimate)으로 決定한다. 情報理論의 觀點에서 보면, 이러한 推定節次는 實際構造와의 差異가 最小인 構造를 選擇한다는 意味를 갖는다.

最小 AIC 節次는 狀態空間模型을 推定한다. Ⅱ節에서 본 바와 같이 推定된 狀態空間模型은 ARMA 模型으로 變換될 수 있다. 換言하면 狀態空間模型의 構造가 識別되면 따라서 그에 對應하는 ARMA 模型의 構造가 識別된다. 最小 AIC 節次에서 狀態空間模型이 推定되는 이유는 定常確率過程의 標準狀態空間表現이 唯一하다는 점에 있다. 理論的으로 標準狀態空間表現만이 時系列資料로부터 構造識別이 可能하다는 점이다. 標準狀態空間表現은 構成要素(component)의 數가 가장 적은, 즉 最低次元(minimal dimension)의 狀態「벡터」를 사용한 狀態空間表現이다. 標準狀態空間模型의 推定은 實際 推定問題에서도 利點을 갖는다. 推定의 前提條件이 되는 狀態「벡터」의 構造識別이 可能하다. 過去觀測群과 未來觀測群間의 標準相關分析을 통하여 最低次元 狀態「벡터」의 構造를 推定할 수 있다. 이와 같이 推定된 最低次元 狀態「벡터」의 構造는 實際構造의 近似推定일 수 있으므로, 最小 AIC節次는 이에 近似한 多數의 構造를 最尤推定法에 의하여 推定하고 推定된 構造中에서 AIC가 最小인 構造를 最適推定으로 決定한다.

最小 AIC 節次를 要約하면,

가. 標準相關分析에서 過去觀測群과 未來觀測群에 몇 개의 觀測을 포함시킬 것인가를 결정하기 위하여 AR 模型內에서 階數가 다른 多數의 構造를 推定하고 推定된 構造들 중에서 AIC가 最小인 構造를 最適推定으로 결정한다[9].

나. AIC가 最小인 構造의 階數를 p라 하면, $(p+1)$個의 觀測으로 構成되는 過去觀測群$(y'_t, y'_{t-1}, \cdots, y'_{t-p})$과 未來觀測群$(y'_t, y'_{t+1}, \cdots, y'_{t+p})$ 간의 標準相關分析을 통하여 最低次元 狀態「벡터」의 構造를 推定하고, 이에 對應하는 標準狀態空間模型을 推定한다. 推定된 構造의 AIC를 계산한다.

다. 標準相關分析을 통하여 推定된 最低次元 狀態「벡터」의 構造에 近似한 多數의 構造를 選定하여, 이들에 對應하는 狀態空間

9) AR模型의 推定에 관해서는 R.H. Jones(1978) 參照.

模型의 構造들을 推定한 후, AIC가 最小인 構造를 最適推定으로 결정한다.

라. 必要한 경우 「다」에서 결정된 標準狀態空間模型의 最適推定을 ARMA 模型으로 變換한다. 變換된 ARMA 模型은 다시 AR 模型이나 MA 模型으로 變換될 수 있으나 一般的으로 無限級數의 형태로 나타난다.

2. 構造識別基準 AIC

構造識別問題의 실제적인 重要性은 推定된 模型의 豫測能力과 관련된다. 일반적으로 階數의 增加와 더불어 1期豫測誤差(one-step ahead forecast error)의 分散이 標本期間(sample period)內에서는 減少하나, 標本期間外에서는 減少하다 反轉하여 增加하는 傾向을 보인다. 이는 階數가 增加함에 따라 時系列資料에 대한 推定適合度는 改善되나 觀測의 數에 비하여 過多한 係數가 推定됨으로써 共分散系列의 推定이 歪曲되기 때문이다. AIC의 變化를 보면, 階數의 증가와 더불어 처음에는 감소하나 階數가 어느 수준을 넘어서 계속 증가하면 反轉하여 증가하기 시작한다. 이는 AIC 定義式의 첫째 項인 最尤度의 增加率은 階數의 증가와 더불어 遞減하나 둘째 項인 推定된 係數의 數는 一定率로 증가함을 反映하는 것이다.

AIC의 理論的 意味는 最尤推定法을 統計模型의 確率構造를 識別하는 節次로 再解釋함으로써 明確해진다. 일반적으로 最尤推定法은 假定된 構造가 實際構造와 同一하다는 전제하에 가정된 構造의 母數를 推定하는 節次로 이해되고 있다. 그러나 가정된 構造와 實際構造간에 乖離가 있음을 인정하면, 情報理論의 「엔트로피」(entropy)概念을 이용하여 最尤推定法이 實際構造와의 差異가 最小인 構造를 識別・推定하는 節次라는 解釋이 가능하다[10].

$(x_1, x_2, \cdots, x_N)$을 確率密度函數 $g(x)$를 갖는 母集團에서 抽出한 크기 N의 標本이라 하자. 最尤推定法은 母集團의 確率分布를 確率密度函數 $f(x|\theta)$로 나타낼 수 있다는 가정하에, 가정된 確率分布 $f(x|\theta)$의 母數 θ의 最適推定으로서 平均對數尤度(average log likelihood),

$$N^{-1}\Sigma_{n=1}^{N} \log f(x_n|\theta)$$

를 最大로 하는 $\hat{\theta}$를 選定한다. 平均對數尤度는 對數尤度의 期待値(mean log likelihood), $B[g\,;f(x|\theta)]$의 一致推定이 된다. $B[g\,;f(x|\theta)]$는 다음과 같이 定義된다.

$$B[g\,;f(x|\theta)]=\int \log f(x|\theta)\cdot g(x)dx$$

이제 $B[g\,;g]$와 $B[g\,;f(\cdot|\theta)]$의 差異로 定義되는 $I[g\,;f(\cdot|\theta)]$는 實際確率構造 $g(x)$의 가정된 確率構造 $f(x|\theta)$에 관한 負「엔트로피」(neg-entropy)로서 $g(x)$의 $f(x|\theta)$로부터의 乖離(deviation)을 測定하는 測度(measure)라 할 수 있다[11]. $I[g\,;f(x|\theta)]$는 다음과 같이 定義된다.

$$I[g\,;f(\cdot|\theta)]=B[g\,;g]-B[g\,;f(\cdot|\theta)]$$

10) AIC의 導出過程에 관해서는 S. Neftci(1978) 參照.

11) $-I[g\,;f(x|\theta)]$는 $g(x)$의 $f(x|\theta)$에 관한 一般化「엔트로피」(generalized entropy), $S[g\,;f(x|\theta)]$와 同一하다. $S[g\,;f(x|\theta)]$의 定義는 다음과 같다.

$$S[g\,;f(x|\theta)]=-\int\left\{\frac{g(x)}{f(x|\theta)}\right\}\log\left\{\frac{g(x)}{f(x|\theta)}\right\} f(x|\theta)dx$$

$S[g\,;f(\cdot|\theta)]$는 Boltzmann(1877)의 「엔트로피」概念의 確率的 解釋과 直結되며 $g(x)$와 $f(x|\theta)$의 類似性을 測定하는 測度라 할 수 있다.

$$=\int \log\left\{\frac{g(x)}{f(x|\theta)}\right\} g(x)dx$$

實際構造 $g(x)$와 가정된 構造 $f(x|\theta)$ 間의 差異를 最小化하는 것은 $I[g\,;f(\cdot|\theta)]$를 最小化하는 것이며, 이는 사실상 $B[g\,;f(\cdot|\theta)]$를 最大化하는 것이다. 따라서 最尤推定法에서 平均對數尤度를 最大化하는 것은 $I[g\,;f(\cdot|\theta)]$의 最小化, 즉 實際構造와 가정된 構造間의 差異를 最小化한다는 意味를 갖는다.

위의 論議에서 $g(x)$가 $f(x|\theta)$의 函數群(family)에 속할 필요는 없다. 最尤推定値의 漸近的 特性(asymptotic property)의 分析은 $g(x)=f(x|\theta_0)$인 θ_0가 存在한다는 假定만으로 充分하다. 最尤推定値의 漸近的 特性으로부터, $I[g\,;f(\cdot|\theta)]$를 最小化하는 θ^*에 대하여 $f(x|\theta^*)$가 $g(x)$에 충분히 近接해 있으면, AIC를 $-2N\cdot B[g\,;f(\cdot|\theta^*)]$의 推定値로 사용할 수 있음을 알 수 있다. AIC의 첫째 項인 -2(對數最尤度)는 $-2N\cdot B[g\,;f(\cdot|\theta^*)]$의 推定値로서 둘째 項, -2(推定된 係數의 數)와 동일한 크기의 漸近的 下向偏倚(asymptotic downward bias)를 나타낸다. AIC의 둘째 項은 이러한 漸近的 下向偏倚를 矯正하기 위한 것이다. $f(x|\theta^*)$와 $g(x)$ 간의 乖離가 큰 경우에는, 이러한 乖離가 AIC의 첫째 項에 反映되므로 다른 構造들과의 比較를 통하여 쉽게 檢索될 수 있다. 따라서 假定된 模型內의 여러 構造가 推定되어 AIC가 계산되고, AIC를 비교하여 AIC가 最小인 構造가 最適推定으로 결정되는 것이다.

時系列模型의 推定에 最小 AIC 節次를 사용할 때 어려운 점은 尤度函數의 分析이 複雜하다는 것이다. 定常時系列 $(y_1, y_2, \cdots, y_T)$가 有限次元 周邊確率密度函數 (finite-dimensional marginal probability density function), $g(y_1, y_2, \cdots, y_T)$를 갖는 定常確率過程의 實現이라 하면, 對數尤度의 期待値의 極限値(limit of expected log likelihood),

$$\begin{aligned}K[g\,;f(\cdot|\theta)] &= \lim_{T\to\infty} T^{-1}\int \log f(y_1, y_2, \cdots, y_T|\theta)\\ &\quad\times g(y_1, y_2, \cdots, y_T)dy_1 dy_2\cdots dy_T\end{aligned}$$

를 最適推定基準으로 사용함이 妥當하다. 一定條件(regularity condition)下에서 平均對數尤度, $T^{-1}\log f(y_1, y_2, \cdots, y_T|\theta)$는 $K[g\,;f(\cdot|\theta)]$의 一致推定이 된다. 그러나 分析이 複雜한 對數尤度를 代替할 수 있는 $K[g\,;f(\cdot|\theta)]$의 다른 一致推定量(consistent estimator)을 고려할 수 있다. 正規分布 $N(0,\sigma^2)$를 갖는 確率變數 ε_t로 構成되는 純粹確率過程 $\{\varepsilon_t\}$를 攪亂要因으로 갖는 單變數 p階 AR 過程 $\{y_t\}$의 尤度函數, $f(y_1, y_2, \cdots, y_T|\theta)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}f(y_1, y_2, \cdots, y_T|\theta) &= \Pi_{t=p+1}^{T} f(y_t, y_{t-1}, \cdots,\\ &\quad y_{t-p}|\theta)\\ f(y_t, y_{t-1}, \cdots, y_{t-p}|\theta)&\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_t+a_1y_{t-1}+\cdots\right.\\ &\qquad\left.+a_py_{t-p})^2\right\}\end{aligned}$$

$y_t+a_1y_{t-1}+\cdots+a_py_{t-p}=\varepsilon_t$이며, θ는 $(a_1, a_2, \cdots, a_p, \sigma)$를 표시한다. 이 경우에 $K[g\,;f(\cdot|\theta)]$는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}K[g\,;f(\cdot|\theta)] &= -\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\\ &\quad -\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma_{i=0}^{p}\,\Sigma_{j=0}^{p} E[y_iy_j]\end{aligned}$$

$E[y_iy_j]$은 時差 $(i-j)$의 共分散이며, 期待値는 實際確率分布 $g(y_t, y_{t-1}, \cdots, y_{t-i+j})$에 관하

여 취한 것이다. 이제 $K[g\,;f(\cdot|\theta)]$의 共分散 $E[y_t y_{t+k}]$를 時系列의 共分散 $c(k)$로 代置하여 求해지는 $\hat{K}[g\,;f(\cdot|\theta)]$는 $K[g\,;f(\cdot|\theta)]$의 推定値로서 最適推定基準으로 사용될 수 있다. $\hat{K}[g\,;f(\cdot|\theta)]$를 最大化하는 AR係數 $\hat{a}_i$와 分散 $\hat{\sigma}^2$은 아래의 關係式들로부터 推定된다.

$$c(k)=-\Sigma_{i=1}^{p}\hat{a}_i c(k-i),\quad k=1,2,\cdots,p$$
$$\hat{\sigma}^2=c(0)+\Sigma_{k=1}^{p}\hat{a}_k c(-k)$$

時系列의 共分散 $c(k)$들의 漸近的 確率分布로부터 最尤推定値 $\hat{a}_k$와 $\hat{\sigma}^2$의 漸近的 確率分布가 導出되며, 이로부터 아래와 같이 定義되는 AIC의 漸近的 特性이 앞서 설명한 標本의 경우와 同一함을 보일 수 있다. AIC는 다음과 같이 定義된다.

$$\mathrm{AIC}=-2T\cdot\hat{K}[g\,;f(\cdot|\theta)]+2(p+1)$$

또는

$$\mathrm{AIC}=T\log\hat{\sigma}^2+2p$$

多變數 AR模型의 경우에도 同一한 결과를 얻을 수 있다. $\{y_t\}$가 p階 m變數 AR過程이고 攪亂要因 $\{\varepsilon_t\}$는 m變數 正規分布 $N(0,\Sigma)$를 갖는 確率「벡터」ε_t로 構成되는 純粹確率過程이라 하자.

$$y_t+A_1y_{t-1}+\cdots+A_py_{t-p}=\varepsilon_t$$

A_k는 $m\times m$ 係數行列이며 Σ는 $m\times m$ 共分散行列이다. 最適推定基準 $\hat{K}[g\,;f(\cdot|\theta)]$를 最大化하는 最尤推定値 $\hat{A}_k$와 $\hat{\Sigma}$는 다음의 關係式들로부터 推定된다.

$$C(k)=-\Sigma_{i=1}^{p}\hat{A}_kC(k-i),\quad k=1,2,\cdots,p,$$
$$\hat{\Sigma}=C(0)+\Sigma_{k=1}^{p}\hat{A}_kC(-k)$$

AIC는 다음과 같이 定義된다. $|\hat{\Sigma}|$는 推定된 共分散行列 $\hat{\Sigma}$의 行列式이다.

$$\mathrm{AIC}=T\log|\hat{\Sigma}|+2pm^2$$

3. 標準狀態空間模型의 初期推定

定常確率過程 $\{y_t\}$의 狀態空間 V_t가 有限次元이면 (11)이 成立하는 整數 K가 存在하며 $\{y_t\}$는 (13)의 狀態空間表現을 갖는다. (13)이 識別될 수 있으려면, 共分散行列 $E[v_tv_t']$와 $E[\varepsilon_t\varepsilon_t']$가 正則行列이어야 한다. $E[v_tv_t']$가 正則行列이면, 狀態「벡터」 v_t의 mK개의 構成要素들 $y_t^1, y_t^2,\cdots, y_t^m, \hat{y}_t^1(1), \hat{y}_t^2(1),\cdots, \hat{y}_t^m(1), \hat{y}_t^1(2),\cdots, \hat{y}_t^i(k),\cdots, \hat{y}_t^m(K-1)$은 1次獨立(linearly independent)이다. 換言하면, 狀態空間의 次元이 mK일 때 (13)은 標準狀態空間表現이고 따라서 識別이 可能하다. 일반적으로 狀態空間의 次元이 m의 整數倍인 경우는 드물다. 共分散行列 $E[\varepsilon_t\varepsilon_t']$가 正則行列이고 狀態空間의 次元이 $n<Km$이라면, 標準狀態空間表現을 決定하는 狀態「벡터」의 構造는 다음과 같이 정해진다. Km개의 條件附 期待値 $\hat{y}_t^i(k)\,(i=1,2,\cdots,m,\ k=0,1,\cdots,K-1)$ 중에서 $s=km+i$가 작은 순서에 따라서 1次獨立인 n개를 選擇한다. $s=m+1$에서 시작하여 逐次的으로 $\hat{y}_t^i(k)$가 先行하는 期待値들 $\hat{y}_t^{i-1}(k), \hat{y}_t^{i-2}(k),\cdots,\hat{y}_t^1(k),\hat{y}_t^m(k-1),\cdots,y_t^1$과 1次獨立인가를 조사하고, 1次從屬(linearly dependent)이면 제거한다. 제거되지 않고 남아 있는 期待値의 數가 n이 될 때까지 진행한다. 이 과정에서, 各各의 $i(i=1,2,\cdots,m)$에 대하여, $y_t^i,\hat{y}_t^i(1),\cdots,\hat{y}_t^i(k_i)$들은 先行하는 期待値들과 1次獨立이나 $\hat{y}_t^i(k_i+1),\ \hat{y}_t^i(k_i+2),$

$\cdots, \hat{y}_t^i(K-1)$들은 先行하는 期待値들과 一次從屬인 整數 k_i가 있음을 알게 된다. m개의 整數로 構成되는 「벡터」, $k'=(k_1, k_2, \cdots, k_m)$은 標準狀態空間表現을 결정하는 狀態「벡터」의 構造를 나타낸다. $\Sigma_{i=1}^m k_i = n$이다. 이제 共分散系列 $\{\Lambda(\theta)\,;\,\theta=0,1,2,\cdots\}$과 標準狀態空間表現 (k, F, G, H, Σ)間에는 1 對 1의 對應이 있다. $\hat{y}_t^i(k)\,(i=1,2,\cdots,m,\; k=0,1,2,\cdots,K-1)$間의 1次獨立關係는 過去觀測群 $y_t^{-\prime}=(y_t', y_{t-1}', \cdots)$과 未來觀測群 $y_t^{+\prime}=(y_t', y_{t+1}', \cdots)$ 間의 標準相關分析을 통하여 조사할 수 있다. $\hat{y}_t^i(k)$는 $y_{t+k}^i|Y_t^-$와 同一하며 y_t^-의 構成要素들의 線型結合으로 表示된다. 線型結合은 y_t^-에 대한 y_{t+k}^i의 回歸式이며, 1次獨立인 $\hat{y}_t^i(k)$들의 數는 回歸係數行列의 階數로 결정된다. 1次獨立인 $\hat{y}_t^i(k)$들의 數는 零이 아닌 y_t^+와 y_t^-間의 標準相關係數(canonical correlation coefficient)의 數와 同一하다. 이와 같이 적어도 理論的으로는 y_t^+와 y_t^- 間의 標準相關分析을 통하여 標準狀態空間表現을 결정하는 狀態「벡터」의 構造를 識別할 수 있다.

그러나 實際의 時系列資料들의 標準相關係數들은 理論에서와 같이 規則的인 行態를 보이지 않는다. 이러한 不規則的인 行態의 原因은 觀測誤差(measurement error)나 時系列의 非定常性(nonstationarity)일 수도 있고 無限階數의 實際構造를 有限階數의 構造로 近似推定하는 데 따른 誤差일 수도 있다. 실제의 標準相關分析에서는 推定基準이 되는 統計量(statistic) DIC가 사용된다. DIC의 定義는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{DIC}(s) &= \mathrm{AIC}(s)-\mathrm{AIC}(n)\\ &= -T\log \Pi_{i=s+1}^{n}(1-c_i^2)\\ &\quad -2(n^+-s)(n^--s)\end{aligned}$$

n^+와 n^-는 각각 y_t^+와 y_t^-의 構成要素들의 數이며, c_i는 i번째로 큰 標準相關係數이다. 統計量 DIC(s)의 行態는 다음과 같다. s^*를 零이 아닌 標準相關係數의 數라 하면, $(n^- - s)$가 充分히 클 때, (1) $s \geq s^*$이면 DIC$(s)<0$이며, (2) $n^- \geq s \geq s^*$의 範圍內에서 DIC $(s^*)=\min\limits_s$ DIC(s)인 경우가 일반적이다. 觀測의 數, T가 充分히 클 때, DIC(s)를 最小化하는 s가 s^*보다 작지 않은 것은 분명하다. DIC(s)를 最小化하는 s가 s^*보다 클 可能性은 있으나 $(n^- - s)$가 充分히 크면 이러한 가능성은 작다.

標準相關分析의 節次를 要約하면,

가. 最小 AIC 節次에 의하여 AR 模型을 推定하여 階數 p를 결정한다.

나. $y_t^{+\prime}=(y_t', y_{t+1}', \cdots, y_{t+p}')$와 $y_t^{-\prime}=(y_t', y_{t-1}', \cdots, y_{t-p}')$를 결정한다. $n^+=n^-=(p+1)m$이다.

다. v가 n개의 y_t^+의 構成要素들로 구성되는 「벡터」라 하자. $v'=(v_1, v_2, \cdots, v_n)$으로 표시한다. $n=m+1$ 부터 시작하여 v와 y_t^- 間의 標準相關分析을 한다.

라. DIC$(n)<0$이면, $v_n|Y_t^-$이 先行하는 $v_i|Y_t^-(i=1,2,\cdots,n-1)$들과 1次從屬인 것으로 判斷한다. n번째 標準變數(canonical variable)가 $b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n$으로 주어졌다면, 最小標準相關係數를 零이라 判斷하므로 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}v_n|Y_t^- &= -\frac{b_1}{b_n}v_1|Y_t^- - \frac{b_2}{b_n}v_2|Y_t^- - \cdots\\ &\quad -\frac{b_{n-1}}{b_n}v_{n-1}|Y_t^-\end{aligned}$$

$v_i|Y_t^-$는 標準狀態空間表現을 결정하는 狀

態「벡터」 v_t의 i번째 構成要素이다. v_n이 狀態「벡터」 v_{t+1}의 j번째$(1 \leq j \leq n-1)$ 構成要素라면, 위의 式으로부터 轉移行列 F의 j번째 行이 다음과 같이 결정된다.

$$F_{ji} = -\frac{b_i}{b_n}, \quad i=1, 2, \cdots, n-1$$

$v_n = y^j_{t+kj}$이면, n을 增加시켜갈 때 y^j_{t+kj}, $y^j_{t+kj+1}, \cdots, y^j_{t+K-1}$들은 v에 포함시키지 않는다. 모든 $j(j=1, 2, \cdots, m)$에 대하여 k_j가 결정되었으면, 標準狀態空間表現을 결정하는 狀態「벡터」는 $v'_t = (v_1 | Y^-_t, v_2 | Y^-_t, \cdots, v_{n-1} | Y^-_t)$이다. 모든 k_j가 결정되지 않았으면 「다」로 돌아가서 n을 하나 증가시킨다.

마. DIC$(n)>0$이면, $v_n | Y^-_t$는 先行하는 $v_1 | Y^-_t, v_2 | Y^-_t, \cdots, v_{n-1} | Y^-_t$들과 1次獨立인 것으로 判斷하고, 「다」로 돌아가서 n을 하나 증가시킨다.

共分散行列 $\Sigma = E[\varepsilon_t \varepsilon'_t]$는 AR模型의 推定에서 이미 推定되었고, 標準相關分析이 완료되면 轉移行列 F가 결정된다. 衝擊反應行列 G를 構成하는 MA係數行列들 W_k도 推定된 AR模型을 이용하여 구할 수 있다. W_k는 아래의 循環公式에서 逐次的으로 求해진다.

$$W_k + \hat{A}_1 W_{k-1} + \cdots + \hat{A}_p W_{k-p} = 0$$

$\hat{A}_k$는 推定된 AR模型의 係數行列들이며, $W_0 = I$이고, $k<0$일 때 W_k는 零行列이다. 標準相關分析을 통하여 구해진 標準狀態空間表現의 初期推定 (k, F, G, Σ)에 近似한 構造들을 最尤推定法으로 推定한다. 對數尤度의 最大化는 計算量이 방대하므로, 수정된 對數尤度 $\hat{K}[g; f(\cdot|\theta)]$를 最大化한다. $\{y_t\}$가 線型過程일 때, $\hat{K}[g; f(\cdot|\theta)]$는 다음과 같이 定義된다.

$$-\frac{mT}{2}\log 2\pi - \frac{T}{2}\log|C| - \frac{T}{2} tr\, C^{-1} E[\varepsilon_t \varepsilon'_t]$$

C는 時系列의 共分散行列이고, $\varepsilon_t = y_t - HFv_{t-1}$이며, 期待値 E는 y_t의 確率分布에 관하여 취한 것이다. $\{y_t\}$는 「가우시안」分布(Gaussian distribution)을 가지며, $E[y_t]$는 零「벡터」이고, 共分散系列은 時系列의 共分散系列 $\{C(k); k=0, 1, \cdots\}$과 同一하다고 假定된다. 計算節次에 관한 具體的인 說明은 Akaike (1976)에 收錄되어 있다.

IV. 推 定 例

本節에서는 經常 GNP增加率, 物價上昇率 및 通貨增加率의 3變數 ARMA模型의 推定結果를 例示한다. 推定에 사용된 時系列資料는 1967年 1/4分期에서 1982年 4/4分期까지의 分期別 經常 GNP, GNP換價指數 및 通貨量(M_1)의 時系列資料이다. 사용된 컴퓨터「프로그램」은 SAS/ETS(Statistical Analysis System /Econometrics and Time Series)의 STATE-SPACE procedure이다. 使用된 變數들은 다음과 같이 定義된다. 모든 增加率은 對前分期增加率이다.

y_t : t分期의 經常 GNP增加率

p_t : t分期의 物價上昇率

m_t : t分期의 通貨增加率

$\hat{y}_t(k)$: t 分期에 豫測한 y_{t+k}

$\hat{p}_t(k)$: t 分期에 豫測한 p_{t+k}

$\hat{m}_t(k)$: t 分期에 豫測한 m_{t+k}

ε_t^y : y_t의 攪亂要因

ε_t^p : p_t의 攪亂要因

ε_t^m : m_t의 攪亂要因

$$x_t'=(y_t, p_t, m_t)$$

$$\varepsilon_t'=(\varepsilon_t^y, \varepsilon_t^p, \varepsilon_t^m)$$

最小 AIC節次에 의하여 推定된 標準狀態空間表現, $v_{t+1}=Fv_t+G\varepsilon_{t+1}$의 推定結果는 다음과 같다.

$$v_t'=(y_t, p_t, m_t, \hat{y}_t(1), \hat{p}_t(1), \hat{y}_t(2)),$$

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.039 & -0.522 & -0.072 & -0.086 & -1.822 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.075 & -0.003 & 0.027 & 0.043 & -0.282 & -0.102 \\ -0.550 & 2.784 & -0.189 & 0.890 & 9.980 & -0.194 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.843 & -0.652 & 0.149 \\ 0.071 & -0.262 & 0.038 \\ 0.467 & 1.162 & 0.439 \end{pmatrix} \qquad \Sigma=\begin{bmatrix} 0.0133, & -0.0025, & 0.0019 \\ -0.0025, & 0.0081, & -0.0006 \\ 0.0019, & -0.0006, & 0.0039 \end{bmatrix}$$

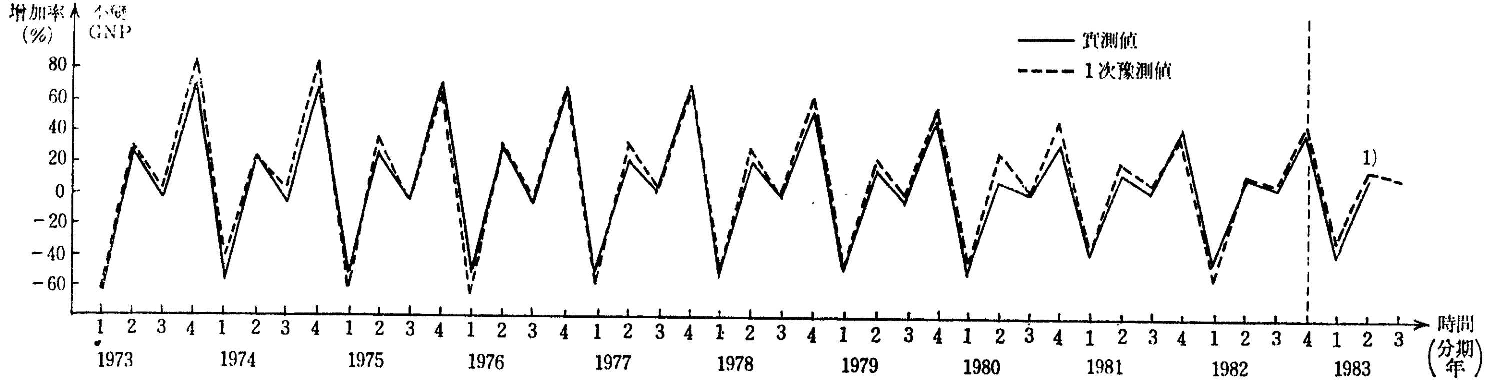
Σ는 攪亂要因 ε_t의 共分散行列이다. 推定된 狀態空間表現을 ARMA模型, $B(L)x_t=A(L)\varepsilon_t$으로 變換한 結果는 다음과 같다.

$$B(L)=\begin{bmatrix} 1+0.149L-0.890L^2+0.550L^3, & -9.980L^2-2.784L^3, & 0.189L^3 \\ 0.102-0.043L-0.075L^2, & 1+0.282L+0.003L^2, & -0.027L^2 \\ 0.086-0.039L, & 1.822+0.522L, & 1+0.072L \end{bmatrix}$$

$$A(L)=\begin{bmatrix} 1-0.649L-0.587L^2, & -0.652L-8.9L^2, & 0.149L+0.468L^2 \\ 0.102-0.058L, & 1-0.0465L, & 0.053L \\ 0.086, & 1.822, & 1 \end{bmatrix}$$

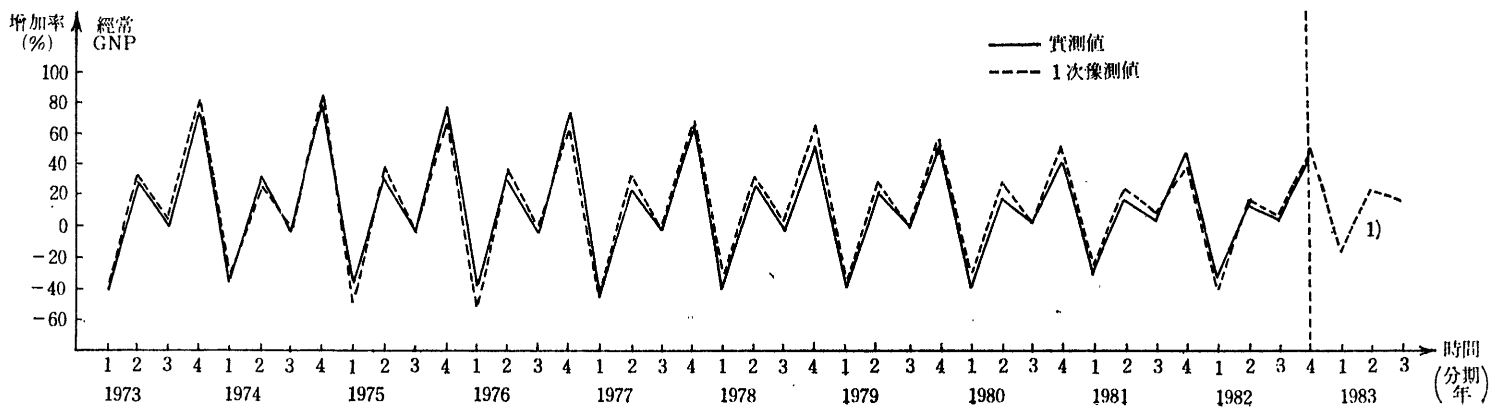
ARMA表現의 AR部分의 行列多項式 $B(L)$은 한 쌍의 複素數根과 4개의 實數根을 가지며, 6개의 根 모두가 單位圓의 外部에 위치하고 있다. 따라서 $\{x_t\}$는 線型過程이라 할 수 있으며, ARMA表現은 다시 MA表現, $x_t=[B(L)]^{-1}\cdot A(L)\varepsilon_t$으로 變換될 수 있다. 行列多項式 $W(L)=[B(L)]^{-1}\cdot A(L)$의 元素는 L에 관한 無限次數의 多項式이다. $W(L)$의 各 元素의 零次項부터 44次項까지의 係數를 計算한 것이 〈表 2〉이다. 計算된 MA係數들은 零으로 收斂하는 傾向을 分明히 나타내지 않고 있다. $\{x_t\}$가 季節變動을 包含하고 있으므로, 絶對値가 1에 가까운 $B(L)$의 3개의 根은 사실상 絶對値가 1일 것으로 判斷되어 嚴格히 말하면 $\{x_t\}$는 線型過程이라 할 수 없다. $B(L)$의 6개의 根은 다음과 같다.

〔圖 1〕 實質 GNP 增加率의 實測值와 1次豫測值



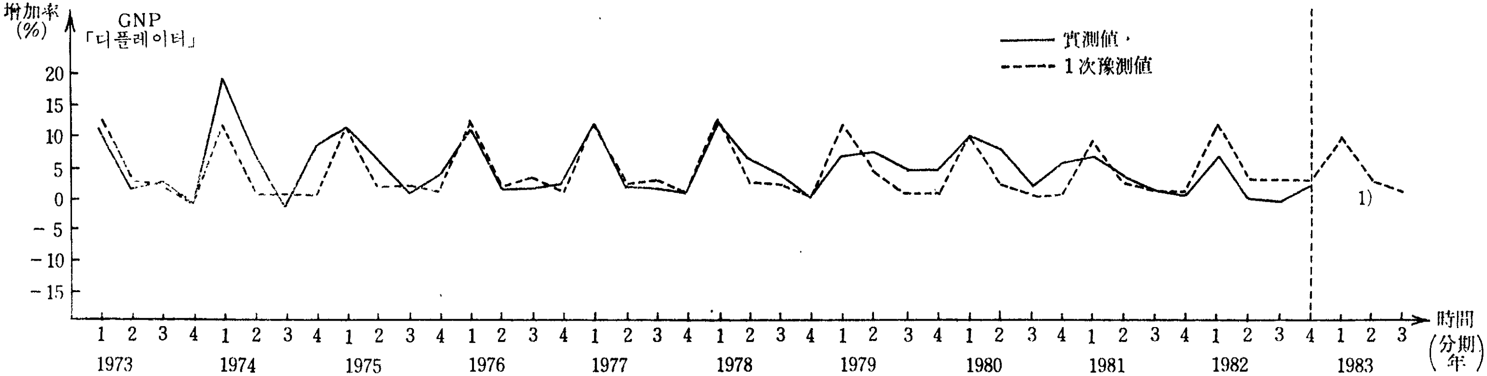
註 : 1) 1983年 2, 3分期 豫測值는 각각 2次, 3次 豫測值를 나타냄.

〔圖 2〕 y_t의 實測值와 1次豫測值



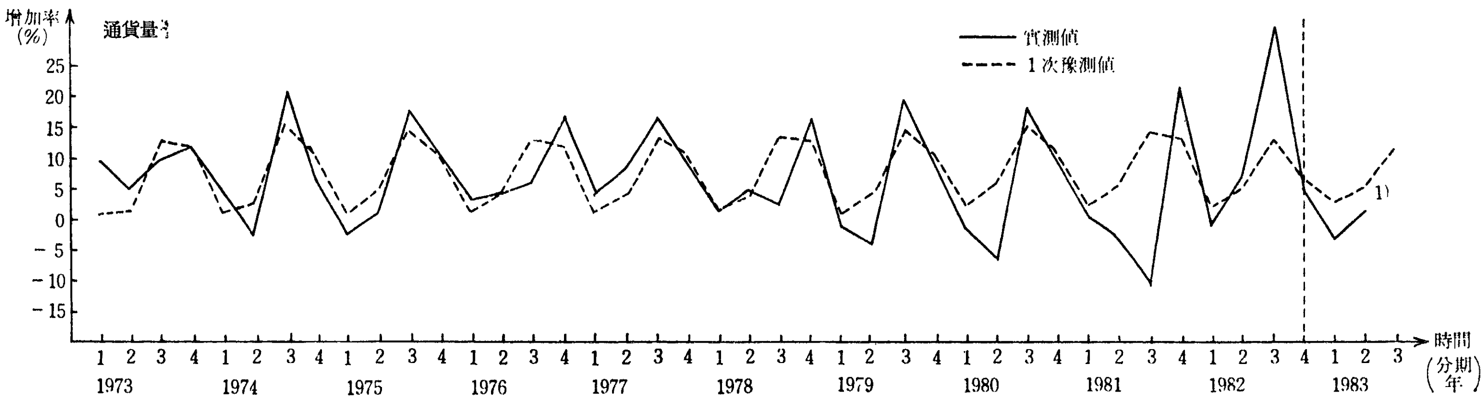
註 : 1) 1983年 2, 3分期 豫測值는 각각 2次, 3次 豫測值를 나타냄.

〔圖 3〕 p_t의 實測值와 1次豫測值



註：1) 1983年 2,3分期 豫測值는 각각 2次, 3次 豫測值를 나타냄.

〔圖 4〕 m_t의 實測值와 1次豫測值



註：1) 1983年 2,3分期 豫測值는 각각 2次, 3次 豫測值를 나타냄.

〈表 1〉 變數들의 實測値와 豫測値

	t	y_t	$\hat{y}_t$ (1)	$\hat{y}_t$ (2)	p_t	$\hat{p}_t$ (1)	$\hat{p}_t$ (2)	m_t	m_t (1)	m_t (2)
1968	1	−0.4663	−0.4491	−0.0577	0.2594	0.1451	0.0538	0.0927	0.0512	0.0752
	2	0.3884	0.4860	0.5401	0.0094	−0.0212	0.0084	0.0432	0.0165	0.0217
	3	−0.0758	−0.1451	−0.2119	0.0254	0.0504	0.0642	0.0999	0.1088	0.1104
	4	0.7994	0.7962	0.8402	−0.0978	−0.0157	−0.0268	0.1537	0.1175	0.1173
1969	1	−0.4579	−0.3195	−0.3757	0.1728	0.1461	0.1230	0.0107	0.0130	0.0196
	2	0.3598	0.3504	0.2516	0.0287	0.0159	0.0329	0.0745	0.0120	0.0094
	3	−0.0065	−0.0452	−0.0385	0.0073	0.0287	0.0289	0.1724	0.1262	0.1355
	4	0.8652	0.8586	0.8709	−0.0015	−0.0108	−0.0209	0.1126	0.1102	0.1179
1970	1	−0.4889	−0.4426	−0.4311	0.1687	0.1352	0.1372	−0.0492	−0.0015	−0.0011
	2	0.3171	0.3672	0.3570	−0.0321	0.0096	0.0234	0.0584	0.0275	0.0194
	3	−0.0227	0.0685	−0.0056	0.0845	0.0328	0.0242	0.0990	0.1403	0.1442
	4	0.8802	0.7640	0.7274	−0.0915	−0.0276	−0.0059	0.1037	0.1132	0.1043
1971	1	−0.4728	−0.4762	−0.4185	0.1348	0.1577	0.1331	−0.0358	0.0087	0.0101
	2	0.3179	0.3072	0.3019	0.0218	0.0270	0.0224	0.0233	0.0181	0.0122
	3	−0.0403	−0.1034	−0.0988	0.0418	0.0302	0.0278	0.1341	0.1340	0.1348
	4	0.7500	0.7592	0.8202	−0.0575	−0.0217	−0.0231	0.0401	0.1221	0.1227
1972	1	−0.4611	−0.3956	−0.4143	0.1279	0.1362	0.1306	−0.0042	0.0228	0.0104
	2	0.3624	0.2381	0.1816	0.0541	0.0291	0.0326	0.0727	0.0220	0.0173
	3	−0.0541	−0.1613	−0.0480	0.0225	0.0251	0.0208	0.2244	0.1296	0.1391
	4	0.7776	0.7718	0.8468	−0.0412	−0.0105	−0.0223	0.1094	0.1035	0.1197
1973	1	−0.4147	−0.4042	−0.4201	0.1076	0.1387	0.1300	0.0943	0.0066	0.0079
	2	0.2880	0.3365	0.2943	0.0200	0.0347	0.0240	0.0516	0.0088	0.0229
	3	0.0007	0.0707	0.0138	0.0295	0.0255	0.0234	0.0940	0.1255	0.1310
	4	0.6949	0.7977	0.7464	−0.0118	−0.0155	−0.0082	0.1163	0.1184	0.1119
1974	1	−0.3499	−0.2874	−0.3713	0.1966	0.1198	0.1282	0.0293	0.0118	0.0097
	2	0.3068	0.2628	0.2577	0.0685	0.0080	0.0319	−0.0279	0.0245	0.0256
	3	−0.0704	0.0486	0.1328	−0.0225	0.0038	0.0184	0.2113	0.1481	0.1397
	4	0.7759	0.8314	0.7049	0.0882	0.0011	0.0003	0.0685	0.1012	0.1087
1975	1	−0.4070	−0.4915	−0.4764	0.1095	0.1056	0.1336	−0.0316	0.0096	0.0027
	2	0.3297	0.3711	0.4509	0.0553	0.0154	0.0119	0.0050	0.0496	0.0450
	3	−0.0172	−0.0245	−0.0267	0.0055	0.0166	0.0316	0.1655	0.1363	0.1280
	4	0.7542	0.6498	0.6447	0.0342	0.0068	0.0023	0.1016	0.0970	0.1015
1976	1	−0.3948	−0.5006	−0.3953	0.1068	0.1190	0.1186	0.0277	0.0109	0.0133
	2	0.3160	0.3314	0.4102	0.0188	0.0227	0.0113	0.0362	0.0372	0.0422
	3	−0.0174	−0.0057	−0.0210	0.0107	0.0298	0.0298	0.0550	0.1270	0.1263
	4	0.6883	0.6480	0.6367	0.0202	0.0015	0.0001	0.1631	0.1120	0.1007
1977	1	−0.4109	−0.4470	−0.4084	0.1160	0.1182	0.1183	0.0476	0.0080	0.0165
	2	0.2444	0.3515	0.3745	0.0145	0.0190	0.0142	0.0731	0.0356	0.0426
	3	0.0500	0.0994	0.0005	0.0117	0.0239	0.0288	0.1526	0.1256	0.1291
	4	0.7027	0.6698	0.6165	0.0069	0.0047	0.0040	0.0860	0.0995	0.1026
1978	1	−0.3931	−0.3469	−0.3156	0.1160	0.1178	0.1166	0.0077	0.0133	0.0118
	2	0.2957	0.3424	0.3032	0.0600	0.0220	0.0250	0.0477	0.0342	0.0329
	3	0.0405	0.0280	0.0114	0.0280	0.0141	0.0267	0.0225	0.1297	0.1301
	4	0.5689	0.6662	0.7021	0.0062	−0.0088	−0.0020	0.1571	0.1250	0.1083
1979	1	−0.3746	−0.3133	−0.3901	0.0624	0.1139	0.1236	−0.0187	0.0074	0.0106
	2	0.2550	0.3101	0.2287	0.0672	0.0352	0.0270	−0.0469	0.0437	0.0394
	3	0.0229	0.0136	0.0015	0.0413	0.0078	0.0235	0.1858	0.1437	0.1281
	4	0.5455	0.5719	0.5956	0.0406	−0.0022	0.0044	0.0879	0.1015	0.1075
1980	1	−0.3680	−0.3048	−0.2969	0.0962	0.0976	0.1112	−0.0227	0.0227	0.0197
	2	0.1967	0.3023	0.2549	0.0723	0.0198	0.0256	−0.0748	0.0554	0.0475
	3	0.0427	0.0463	0.0109	0.0183	0.0007	0.0268	0.1777	0.15.9	0.1281
	4	0.4067	0.5022	0.5069	0.0531	0.0078	0.0117	0.0918	0.1026	0.1063
1981	1	−0.3015	−0.2525	−0.3017	0.0597	0.0881	0.1072	0.0048	0.0232	0.0193
	2	0.1871	0.2491	0.1920	0.0331	0.0299	0.0266	−0.0297	0.0613	0.0580
	3	0.0517	0.1094	0.0729	0.0148	0.0126	0.0212	−0.1147	0.1407	0.1258
	4	0.4446	0.3938	0.3848	0.0009	0.0097	0.0241	0.2120	0.1316	0.0911
1982	1	−0.3438	−0.4077	−0.3826	0.0682	0.1120	0.1030	−0.0100	0.0129	0.0265
	2	0.1263	0.1878	0.2166	−0.0063	0.0321	0.0169	0.0687	0.0575	0.0558
	3	0.0590	0.0918	0.0132	−0.0068	0.0266	0.0204	0.3178	0.1277	0.1285
	4	0.4428	0.4880	0.4105	0.0218	0.0286	0.0150	0.0444	0.0696	0.0984
1983	1	n.a.	−0.1534		n.a.	0.0922		−0.0300	0.0284	
	2	n.a.	0.2168*		n.a.	0.0288*		0.0116	0.0531*	
	3	n.a.	0.1625**		n.a.	0.0225**		n.a.	0.1151**	

註 : * 는 2次 豫測値임.
**는 3次 豫測値임.
n.a.: not available

〈表 2〉 **MA 表現의 係數**

k	y_t			p_t			m_t		
	ε^y_{t-k}	ε^p_{t-k}	ε^m_{t-k}	ε^y_{t-k}	ε^p_{t-k}	ε^m_{t-k}	ε^y_{t-k}	ε^p_{t-k}	ε^m_{t-k}
0	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
1	−0.7980	−0.6520	0.1490	0.0664	−0.2620	0.0378	−0.0133	0.0114	−0.1537
2	0.4219	1.1771	0.4458	−0.0211	−0.0772	−0.0227	−0.0627	0.1499	0.0002
3	−0.6605	−0.5864	0.2544	0.0310	0.0844	0.0065	0.0322	−0.0279	−0.0046
4	0.8899	−0.0086	0.1844	−0.0979	0.0444	0.0238	0.0576	−0.1451	−0.0524
5	−0.6895	−0.5691	−0.0443	0.0874	0.0002	0.0247	−0.0184	0.0356	−0.0426
6	0.3612	1.0833	0.2873	−0.0226	−0.1397	−0.0258	−0.0612	0.1365	0.0108
7	−0.5676	−0.5104	0.1388	0.0273	0.0963	0.0009	0.0293	−0.0263	0.0103
8	0.8070	−0.0474	0.0784	−0.0889	0.0411	0.0196	0.0541	−0.1391	−0.0383
9	−0.6026	0.4965	−0.1108	0.0794	−0.0023	0.0198	−0.0188	0.0335	−0.0310
10	0.3033	0.9956	0.2065	−0.0170	−0.1297	−0.0266	−0.0587	0.1301	0.0183
11	−0.4909	−0.4461	0.0872	0.0220	0.0886	−0.0017	0.0271	−0.0258	0.0163
12	0.7296	−0.0814	0.0270	−0.0805	0.0427	0.0175	0.0514	−0.1326	−0.0312
13	−0.5295	−0.4343	−0.1347	0.0719	−0.0057	0.0169	−0.0187	0.0318	−0.0251
14	0.2508	0.9154	0.1633	−0.0123	−0.1203	−0.0261	−0.0564	0.1241	0.0212
15	−0.4259	−0.3907	0.0647	0.0173	0.0814	−0.0030	0.0254	−0.0252	0.0184
16	0.6591	−0.1102	0.0013	−0.0731	0.0438	0.0164	0.0490	−0.1263	−0.0272
17	−0.4666	−0.3804	−0.1395	0.0652	−0.0085	0.0150	−0.0184	0.0302	−0.0219
18	0.2043	0,8425	0.1382	−0.0083	−0.1117	−0.0250	−0.0533	0.1185	0.0220
19	−0.3699	−0.3427	0.0552	0.0132	0.0750	−0.0037	0.0240	−0.0245	0.0189
20	0.5956	−0.1340	−0.0122	−0.0665	0.0445	0.0157	0.0468	−0.1203	−0.0248
21	−0.4119	−0.3333	−0.1361	0.0592	−0.0109	0.0136	−0.0179	0.0287	−0.0199
22	0.1637	0.7765	0.1218	−0.0050	−0.1039	−0.0237	−0.0507	0.1131	0.0218
23	−0.3213	−0.3008	0.0515	0.0097	0.0692	−0.0041	0.0227	−0.0238	0.0186
24	0.5387	−0.1534	−0.0198	−0.0606	0.4048	0.0152	0.0448	−0.1146	−0.0232
25	−0.3641	−0.2921	−0.1294	0.0539	−0.0128	0.0124	−0.0174	0.0274	−0.0186
26	0.1286	0.7167	0.1100	−0.0022	−0.0968	−0.0224	−0.0482	0.1080	0.0212
27	−0.2790	−0.2642	0.0502	0.0067	0.0639	−0.0043	0.0215	−0.0231	0.0180
28	0.4879	−0.1689	−0.0243	−0.0553	0.0448	0.0147	0.0429	−0.1091	−0.0216
29	−0.3222	−0.2560	−0.1217	0.0491	−0.0144	0.0115	−0.0169	0.0262	−0.0175
30	0.0984	0.6626	0.1006	0.0002	−0.0903	−0.0212	−0.0458	0.1031	0.0205
31	−0.2421	−0.2323	0.0497	0.0041	0.0592	−0.0044	0.0204	−0.0223	0.0173
32	0.4425	−0.1809	−0.0271	−0.0506	0.0445	0.0143	0.0410	−0.1039	−0.0207
33	−0.2854	−0.2243	−0.1139	0.0448	−0.0156	0.0106	−0.0164	0.0250	−0.0166
34	0.0725	0.6135	0.0927	0.0022	−0.0843	−0.0200	−0.0435	0.0985	0.0196
35	−0.2098	−0.2041	0.0495	0.0019	0.0549	−0.0044	0.0194	−0.0216	0.0165
36	0.4020	−0.1900	−0.0290	−0.0463	0.0440	0.0139	0.0392	−0.0990	−0.0197
37	−0.2530	−0.1965	−0.1063	0.0409	−0.0166	0.0099	−0.0158	0.0239	−0.0158
38	0.0504	0.5689	0.0859	0.0038	−0.0788	−0.0189	−0.0413	0.0940	0.0188
39	−0.1816	−0.1796	0.0493	0.0001	0.0510	−0.0044	0.0184	−0.0209	0.0157
40	0.3658	−0.1965	−0.0302	−0.0425	0.0434	0.0135	0.0375	−0.0943	−0.0188
41	−0.2245	−0.1720	−0.0993	0.0375	−0.0173	0.0092	−0.0153	0.0228	−0.0150
42	0.0316	0.5284	0.0798	0.0051	−0.0738	−0.0178	−0.0393	0.0897	0.0180
43	−0.1569	−0.1580	0.0489	−0.0014	0.0474	−0.0044	0.0175	−0.0201	0.0149
44	0.3334	−0.2008	−0.0310	−0.0391	0.0426	0.0130	0.0359	−0.0898	−0.0179

註 : 첫번째 列은 y_t 式의 ε^y_{t-k}項들의 係數들임.

$r_1=-0.004+1.012i$ $r_4=1.213$

$r_2=-0.004-1.012i$ $r_5=-3.603$

$r_3=-1.033$ $r_6=-12.376$

變數間의 動態的 相互作用關係를 보기 쉽게 ARMA 表現을 풀어서 쓰면,

$$
x_t=\begin{bmatrix} -0.387 \\ 0.049 \\ 0.181 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.102 & 0 & 0 \\ -0.086 & -1.822 & 0 \end{bmatrix}x_t
$$
$$
+\begin{bmatrix} -0.194 & 0 & 0 \\ 0.043 & -0.282 & 0 \\ 0.039 & -0.522 & -0.072 \end{bmatrix}x_{t-1}+\begin{bmatrix} 0.890 & 9.980 & 0 \\ 0.075 & -0.003 & 0.027 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}x_{t-2}
$$
$$
+\begin{bmatrix} -0.550 & 2.784 & -0.189 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}x_{t-3}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.102 & 1 & 0 \\ 0.086 & 1.822 & 1 \end{bmatrix}\varepsilon_t
$$
$$
+\begin{bmatrix} -0.649 & -0.652 & 0.149 \\ -0.058 & -0.0465 & 0.053 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\varepsilon_{t-1}+\begin{bmatrix} -0.587 & -8.900 & 0.468 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\varepsilon_{t-2}
$$

推定된 時系列模型의 豫測結果가 〈表 1〉과 아래의 〔圖 1〕에서 〔圖 4〕까지이다. 〔圖 1〕의 實質 GNP成長率은 經常 GNP增加率에서 物價上昇率을 減하여 구한 것이다. 標本期間內에서는 1分期 豫測, $\hat{x}_t(1)$과 2分期 豫測, $\hat{x}_t(2)$를 計算하였고, 標本期間外에서는 3分期 豫測까지 計算하였다.

▷ 參 考 文 獻 ◁

Akaike, H., "Statistical Predictor Identification," *Ann. Inst. Math.*, Vol. 22, 1970, pp. 203-217.

Akaike, H., "Markovian Representation of Stochastic Processes and Its Application to the Analysis of Autoregressive Moving Average Processes," *Ann. Inst. Math.*, Vol. 26, 1974a, pp. 363-387.

Akaike, H., "A New Look at the Statistical Model Identification," *IEEE Trans.*, Automatic Control AC-19, 1974b.

Akaike, H., "Canonical Correlations Analysis of Time Series and the Use of an Information Criterion," in Mehra, R. and Lainiotis, D.G. (eds.), *Advances and Case Studies in System Identification*, Academic Press, New York, 1976.

Akaike, H., "Time Series Analysis and Control through Parametric Models," *Applied Time Series Analysis*, Academic Press, New York, 1978.

Akaike, H., E. Arahata, and T. Ozaki, "TIMSAC-74-A Time Series Analysis and Control Program Package-(1)," *Computer Science Monographs*, No. 5, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, 1975.

Boltzmann, L., "Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht," *Wiener Berichte*, Vol. 76, 1877, pp. 373–435.

Box, G.E.P. and G.M. Jenkins, *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, 1970.

Breiman, L., *Probability*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1968.

Dhrymes, P. J., *Econometrics: Statistical Foundations and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1970.

Granger, C.W.J. and M. Hatanaka, *Spectral Analysis of Economic Time Series*, Princeton University Press, Princeton, New York, 1964.

Jones, R.H., "Multivariate Autoregression Estimation using Residuals," *Applied Time Series Analysis*, Academic Press, New York, 1978.

Malinvaud, E., *Statistical Methods in Econometrics*, North-Holland, Amsterdam, 1970.

Neftci, S.N., "Specification of Economic Time Series Models Using Akaike's Information Criterion," Dept. of Economics, George Washington Univ., 1970.

Nerlove, M., D.M. Grether, and J.L. Garvalho, *Analysis of Economic Time Series*, Academic Press, New York, 1979.

Oritani, Y., "Application of Akaike's Method to Economic Time Series," presented at the Econometric Society Summer Meeting, Quebec, June, 1979.

Rissanen, J., "Recursive Identification of Linear System," *J. SIAM Control*, Vol. 9, No. 3, 1971.

SAS Institute Inc., *SAS/ETS User's Guide*, 1982.

Sims, C.A., "Macroeconomics and Reality," *Econometrica*, Vol. 48, No. 1, 1980.

Wold, H.O.A., *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, Almqvist and Wiksell, Uppsala, 1938.