Journal of the KSQC
Vol. 11, No. 2, 1983

選別型 検査의 經濟性에 관한 硏究
—The Cost Breakeven Points in Rectifying Inspection Plans—

趙 忠 鎬*
金 成 寅**

ABSTRACT

Nine different rectification inspection policies are considered. For each variation, the cost breakeven points between acceptance without inspection, 100% inspection and sampling inspection are evaluated in both cases where process average is constant and varies as a beta distribution.

I. 序 論

全數檢査, 샘플링檢査, 無檢査간의 檢査方式의 선택 또는 샘플링檢査方式의 결정은 그 經濟性 즉 檢査費用, 불량품 混入으로 인한 損失, 製造原價, 불량품의 再作業費用, 폐기처분시의 殘存價値등을 종합하여 이루어진다. 經濟性은 모델이 가정하는 費用의 種類, 檢査의 性質(破壞檢査, 非破壞檢査), 檢査의 적용방법 및 절차(샘플과 로트의 처리방법, 검사중 발견되는 불량품의 처리방법 등)에 따라 달라진다.

非破壞檢査에 적용되는 選別型 샘플링檢査인 Dodge-Romig 샘플링檢査[2]는 샘플(크기 n)의 검사결과 不合格(확률 $1-P_a$)되는 로트(크기 N)의全數檢査를 규정하고 있다. 모든 검사방식이 平均總檢査數(ATI) 즉

$$n+(N-n)(1-P_a)$$

를 최소화하는 것이므로 經濟性으로는 檢査費用만을 고려한다고 볼 수 있다.

Mendelson[6]의 모델은 破壞檢査의 1回 샘플링檢査에서 不合格된 로트의 廢棄處分을 가정하고 있다. 샘플에 대하여 檢査費用 $C_i n$과 破壞費用(제조원가) $C_t n$을, 不合格시에는 로트의 廢棄處分費用(제조원가－잔존가치) $(C_t-C_u)(N-n)=C_v(N-n)$을 고려하여 비용은

$$(C_i+C_t)n+[(C_t-C_u)(N-n)](1-P_a)$$

가 된다.

Martin[5]의 모델은 非破壞檢査의 1回 샘플링檢査에서 발견되는 불량품의 再作業을 가정하고 있다. 샘플에 대하여 檢査費用 $C_i n$, 이중 발견되는 불량품(기대갯수 np)의 再作業費用 $C_r np$, 合格시에는 샘플을 제외한 로트내의 불량품(기대갯수 $(N-n)p$) 혼입으로 인한 損失費用 $C_a(N-n)p$를, 不合格시에는 나머지 로트의 檢査費用 $C_i(N-n)$, 이중 발견되는 불량품의 再作業費用 $C_r(N-n)p$를 고려하여 비용은

$$C_i n+C_r np+C_a(N-n)p\cdot P_a +[C_i(N-n)+C_r(N-n)p](1-P_a)$$

* 高麗大學校 大學院
** 高麗大學校 工科大學 産業工學科 副敎授

가 된다.

Hald[3]의 모델은 非破壞檢査의 1回 샘플링檢査에서 不合格된 로트를 잔존가치없이 廢棄處分함을 가정하고 있다. 그의 모델에서는 工程不良率에 대하여 베타分布를 가정하고 있어 로트내의 불량품수와 샘플내의 불량품수는 確率變數가 되며 그 確率을 각각 $f_N(X)$, $g_n(x)$로 표시하기로 한다. 샘플에 대하여 檢査費用 $C_i n$, 合格시 로트내에 불량품($X-x$개) 혼입으로 인한 損失費用 $C_a(X-x)$, 不合格시 로트의 廢棄處分費用 $C_t(N-n)$을 고려하여 총 비용은

$$C_i n + C_a \sum_{X=0}^{N} \left[\sum_{x=0}^{c} (X-x) g_n(x) \right] f_N(X)$$

$$+ \sum_{x=c+1}^{n} C_t (N-n) g_n(x)$$

가 된다.

본 論文에서는 샘플과 불합격된 로트의 처분방식에 따른 여러 경우의 費用을 정의하고 그 期待値인 費用函數를 유도한다. 이 費用函數는 工程不良率이 常數인 경우와 確率變數인 경우 다 같이 어떤 일정한 형태로 표시될 수 있으며 이로부터 全數檢査, 샘플링檢査, 無檢査간의 費用을 같게하여주는 臨界不良率을 구한다.

Ⅱ. 費用函數

Wortham과 Mogg[7]가 고려한 샘플과 不合格된 로트의 處分方式에 따른 選別型 샘플링 檢査의 9가지 變形은 실제 적용의 많은 경우를 포함한다. 즉 샘플과 不合格된 로트의 處分方式으로 다음의 方法들을 고려한다.

處分方式－1 : 廢棄處分한다.

處分方式－2 : 檢査후 불량품을 除去한다.

處分方式－3 : 檢査후 불량품을 再作業한다.

따라서 이로부터 샘플의 處分方式과 不合格된 로트의 處分方式의 組合에 따라 9가지 경우가 생길 수 있다. 본 論文에서도 이들 경우를 고려하기로 한다.

샘플에 대한 費用은 위의 處分方式에 따라 각각

$C_i n + C_v n$,

$C_i n + C_v n$,

$C_i n + C_r x$,

가 되고, 合格시 費用은 모든 處分方式에 있어서

$C_a(X-x)$

이고, 不合格시 費用은 위의 處分方式에 따라 각각

$C_v(N-n)$,

$C_i(N-n) + C_v(X-x)$,

$C_i(N-n) + C_r(X-x)$

가 된다.

工程不良率이 常數인 경우

工程不良率이 常數 p인 경우, 샘플내의 불량품수는 二項分布 즉

$$g_n(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

를 하고 로트내의 불량품수는 二項分布 즉

$$f_N(X) = \binom{N}{X} p^X (1-p)^{N-X}$$

를 하게 된다.

따라서 샘플에 대한 期待費用은 샘플處分方式에 따라 각각

$C_i n + C_v n$,

$C_i n + C_v np$,

$C_i n + C_r np$

이고 合格으로 인한 期待費用은

$C_a(N-n)p \cdot P_a$

이며 (Hald[3] 참조) 不合格으로 인한 期待費用은 로트處分方式에 따라 각각

$C_v(N-n)(1-P_a)$,

$[C_i(N-n) + C_v(N-n)p](1-P_a)$,

$[C_i(N-n) + C_r(N-n)p](1-P_a)$

가 된다.

이로부터 각 경우의 費用函數는 해당하는 期待費用을 합하면 된다. 예를들어 샘플處分方式－2, 不合格된 로트處分方式－3의 경우, 費用函數 $Z(n, c | 2, 3)$는

$$Z(n, c | 2,3) = C_i n + C_v np + C_a(N-n)p \cdot P_a + [C_i(N-n) + C_r(N-n)p] \cdot (1-P_a) \quad (1)$$

가 된다.

그런데 각 경우의 費用函數는 일반적인 형태

$$Z(n, c | i, j) = (N-n)[m_{ij} + \sum_{x=0}^{c} g_n(x) S_j(p)] + k_i, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

로 표시될 수 있다. 여기에서 샘플의 處分方式－i에 따라 달라지는 常數 k_i는 全數檢査일때의 費用임을 알 수 있으며

$k_1 = C_i N + C_v N$

$k_2 = C_i N + C_v Np$

$k_3 = C_i N + C_r Np$

이다.

不合格된 로트의 處分方式－j에 따라 달라지는

工程不良率 p의 函數인 $S_j(p)$는 로트에 대한 費用중 不合格에 영향을 받는 부분으로

$$S_1(p)=C_a p-C_v$$
$$S_2(p)=(C_a-C_v)p-C_i$$
$$S_3(p)=(C_a-C_r)p-C_i$$

이다.

샘플處分方式$-i$와 로트處分方式$-j$에 따라 달라지는 常數 m_{ij}는 두 방법의 차이에 따른 費用의 차이를 나타내며

$$m_{ij}=-m_i+m_j$$

로 표시되고

$$m_1=C_i+C_v \quad \text{또는} \quad C_v$$
$$m_2=C_i+C_v p$$
$$m_3=C_i+C_r p$$

이다.

이를 종합하여 예를 들면 식(1)의 費用函數는

$$Z(n,c|2,3)=(N-n)\{-C_v p+C_r p+\sum_{x=0}^{c} g_n(x)[(C_a-C_r)p-C_i]\}+C_i N+C_r Np$$

로 표시됨을 알 수 있다.

工程不良率이 確率變數인 경우

한편 工程不良率이 事前分布로 母數가 a, b인 베타分布 즉

$$k(p)=\frac{1}{B(a,b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}, \quad 0\leq p\leq 1$$

이면 로트내의 불량품수는 베타二項分布 즉

$$f_N(X)=\binom{N}{X}\frac{B(a+X,\ b+N-X)}{B(a,\ b)}$$

이고 샘플내의 불량품수는 베타 二項分布 즉

$$g_n(x)=\binom{n}{x}\frac{B(a+x,\ b+n-x)}{B(a,\ b)}$$

이다. (Hald[4] 참조) 여기에서 $B(v,w)$는 베타函數를 나타낸다.

이로부터 크기 n의 샘플에서 x개의 불량품이 발견되었을 때 工程不良率의 事後分布는 母數가 $a+x$, $b+n-x$인 베타分布를 하게되어 그 期待値는

$$E(p|n,x)=\frac{a+x}{a+b+n}$$

가 됨을 유도할 수 있다. 또한 合格으로 인하여 포함되는 불량품수의 期待値는

$$\sum_{X=0}^{N}\left[\sum_{x=0}^{c}[(X-x)g_n(x)]f_N(X)\right]=\sum_{x=0}^{c}(N-n)\ E(p|n,x)g_n(x)$$

가 된다.

따라서 샘플에 대한 期待費用은 샘플處分方式에 따라 각각

$$C_i n+C_r n,$$
$$C_i n+C_v n E(p),$$
$$C_i n+C_r n E(p)$$

이고, 合格으로 인한 期待費用은

$$C_a(N-n)\sum_{x=0}^{c}E(p|n,x)g_n(x)$$

이며 不合格으로 인한 期待費用은 로트 處分方式에 따라 각각

$$C_v(N-n)\sum_{x=c+1}^{n}E(p|n,x)g_n(x),$$
$$[C_i(N-n)+C_v(N-n)][\sum_{x=c+1}^{n}E(p|n,x)g_n(x)],$$
$$[C_i(N-n)+C_r(N-n)][\sum_{x=c+1}^{n}E(p|n,x)g_n(x)]$$

가 된다. 이를 工程不良率이 常數일 때와 비교하여 보면 p대신 그 期待値 $E(p)$ 또는 n, x가 주어졌을 때의 條件附期待値 $E(p|n,x)$로 바뀐 것을 알 수 있다.

이로부터 이때의 費用函數 역시 식(2)의 형태로 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$Z(n,c|i,j)=(N-n)\{m_{ij}+\sum_{x=0}^{c}g_n(x)S_j(E(p|n,x))\}+k_i. \quad (3)$$

단 m_{ij} 및 k_j에서 工程不良率 p는 그 期待値 $E(p)$로 바뀐다.

Ⅲ. 經濟性 檢討

工程不良率이 常數인 경우

費用函數

$$Z(n,c|i,j)=(N-n)\{m_{ij}+\sum_{x=0}^{c}g_n(x)S_j(p)\}+k_i$$

에서 모든 샘플의 크기 n에 대하여 函數 $S_j(p)$의 값이 陽數이면 不合格시키는 것이, 陰數이면 合格시키는 것이 좋음을 알 수 있다.

즉 $\sum_{x=0}^{c}g_n(x)$의 값은 $0\ (c=\phi)$ 또는 $1\ (c=n)$

이 최적이다.

따라서 合格, 不合格의 비용을 같게하여 주는 臨界不良率 p_{rj}는

$$S_j(p_{rj})=0$$

을 만족시키며 로트 處分方式 $-j$에 따라

$$P_{r1}=\frac{C_v}{C_a},$$

$$P_{r2}=\frac{C_i}{C_a-C_v},$$

$$P_{r3}=\frac{C_i}{C_a-C_r}$$

로 주어진다. 이로부터 샘플의 處分方式에 관계없이 로트의 處分方式이 j인 경우

$$p\leq p_{rj} \tag{4}$$

일때는 合格을, 반대일 때는 不合格시키는 것이 최적[4] 이라는 결론을 얻는다.

費用函數의 식 (2)에서 $\sum_{x=0}^{c} g_n(x)$가 0 또는 1일때 대괄호 { } 안의 값이 陽數이면 $n=N$ 즉 全數檢査가 최적이고 陰數이면 $n=0$ 즉 無檢査가 최적임을 알게된다. 즉 샘플링檢査는 항상 全數檢査 또는 無檢査보다 우월하지 못하다.

全數檢査의 費用(k_2)과 無檢査의 費用(費用函數에 $n=0$, $\sum_{x=0}^{c} g_n(x)=1$을 代入)을 같게하여주는 臨界不良率 p_{si}는

$$m_{ij}+S_j(p_{si})=0 \tag{5}$$

을 만족시키며 샘플의 處分方式 $-i$에 따라 각각

$$p_{s1}=\frac{C_v+C_i}{C_a},$$

$$p_{s2}=\frac{C_i}{C_a-C_v} \tag{6}$$

$$p_{s3}=\frac{C_i}{C_a-C_r}$$

로 구하여진다. 이로부터 로트의 處分方式에 관계없이 샘플의 處分方式이 i인 경우 $p\leq p_{si}$ 이면 無檢査가, 반대이면 全數檢査가 최적이라는 결론을 얻는다.

샘플의 處分方式과 로트의 處分方式이 같은 경우(處分方式－1 제외)

즉 $m_{ij}=0$이면

$$p_{ri}=p_{si}, \quad i=1, 2$$

의 관계가 성립되어 全數檢査와 無檢査 또한 모든 샘플링檢査의 費用이 같아지며 이는 Martin[5] 의 결과와 일치한다.

여기에서 부언할 것은 앞에서 언급한 無檢査는 合格을 뜻하였으나 (3)의 기준에 따라 사실 無檢査는 合格, 不合格으로 나뉘게 된다는 것이다. 無檢査 不合格이란 不合格된 로트의 處分方式대로 로트를 처리하는 경우를 뜻한다. 한편 全數檢査란 샘플의 處分方式에 따라 로트를 처리하는 경우를 뜻한다. 따라서 일반적으로 $m_{ij}\neq 0$의 경우

$$m_{ij}=0$$

을 만족시키도록 하여주는 工程不良率 p_{ij}는 로트를 처리하는 處分方式끼리의 우월을 같게하여 주는 臨界不良率이 되며

$$p_{12}=p_{21}=\frac{C_v-C_i}{C_v},$$

$$p_{31}=p_{31}=\frac{C_v-C_i}{C_r}$$

으로 구하여 진다.

<u>工程不良率이 確率變數인 경우</u>

全數檢査와 無檢査의 費用을 같게 하여주는 臨界不良率 p_{si}에 대하여는 식 (3)에 있어서

$$\sum_{x=0}^{n} g_n(x)\{E(p\mid n, x)\}=E(p)$$

임을 이용하면 식 (5)에서 p가 그 期待值 $E(p)$로 대체되었을 뿐이므로 같은 결론을 얻는다. 즉 로트의 處分方式에 관계 없이 샘플의 處分方式이 i인 경우

$$E(p)\leq p_{si}$$

이면 無檢査를, 반대이면 全數檢査가 최적이라는 결론을 얻는다.

그러나 工程不良率이 常數인 경우와는 달리 샘플링檢査方式 (n, c)에 따라

$$\sum_{x=0}^{c} g_n(x)\, S_j(E(p\mid n, x))$$

의 값이 달라지며 이를 0으로 고정시킬 수는 없다. 따라서, 合格, 不合格을 구분하여 주는 기준은 없다. 그러나

$$\frac{a}{a+b+N}\leq E(p\mid n, x)=\frac{a+x}{a+b+n}<\frac{a+N}{a+b+N}$$

에서 식 (6)의 臨界不良率 p_{sj}에 대하여

$$\frac{a+N}{a+b+N}\leq p_{sj}$$

이면 合格이,

$$p_{sj} \leq \frac{a}{a+b+N}$$

이면 不合格이 최적임을 알 수 있다.

한편

$$\frac{a}{a+b+N} < p_{sj} < \frac{a+N}{a+b+N}$$

의 경우

$$\frac{a+m}{a+b+m} \leq p_{sj}, \quad m=1, 2, \cdots, N$$

이면 $n \leq m+1$의 샘플링檢査에서는 合格이,

$$p_{sj} \leq \frac{a}{a+b+m}, \quad m=1, 2, \cdots, N$$

이면 $n \leq m+1$의 샘플링檢査에서는 不合格이 최적이라는 결론을 얻는다. $n > m+1$인 샘플링檢査에서는 合格判定基準 c로

$$S_j\{E(p|n, x)\} \leq 0$$

을 만족시키는 가장 큰 값 x로 정하는 것이 최적이다.

Ⅳ. 結 論

選別型 샘플링檢査의 샘플 또는 로트의 處理方式에 따른 9가지 變形은 Wartham과 Mogg[7] 이외에 Case, Bennett와 Schmidt의 論文[1]에서도 찾아 볼 수 있다. 그러나 샘플의 處理方式과 로트의 處理方式이 다른 경우는 그 適用性이 감소된다고 볼 수 있다.

工程不良率이 베타分布를 하는 경우 全數檢査,無檢査간의 費用을 같게 하여 주는 臨界不良率은 工程不良率이 常數인 경우와 일치하며 다만 그 선택기준으로 그 期待値를 사용할 뿐이다. 그러나 工程不良率이 常數인 경우와는 달리 合格, 不合格에 대한 명확한 기준은 존재하지 않으며 샘플링檢査가 항상 全數檢査 또는 無檢査보다 우월하지 못하다는 결론은 얻을 수 없다. 그러나 각각의 檢査方式에 적용될 수 있는 合格, 不合格의 기준은 얻을 수 있다.

參 考 文 獻

(1) Case, Kenneth E., Bennett, G. Kemble and Schmidt, J.W., "The Effect of Inspection Error on Average Outgoing Quality," *Journal of Quality Technology*, Vol. 7, No. 1. pp. 28-33, 1973.

(2) Dodge, H.F. and Romig, H.G., *Sampling Inspection Tables, 2nd Ed.*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.

(3) Hald, A., "The Compound Hypergeometric Distribution and a System of Single Sampling Inspection Plans Based on Prior Distributions and Test," *Technometrics*, Vol. 2, No. 3, pp. 275-340, 1960.

(4) Hald, A., "The Determination of Single Sampling Attribute Plans with Given Producer's and Consumer's Risk," *Technometrics*, Vol. 9, No. 3, pp. 401-415, 1967.

(5) Martin, C.A., "The Cost Breakeven Point in Attribute Sampling," *Industrial Quality Control*, Vol. 21, No. 3, pp. 137-144, 1964.

(6) Mendelson, J., "Estimation of Optimum Sample Size in Destructive Testing by Attributes," *Industrial Quality Control*, Vol. 3, No. 3 pp. 24-26, 1946.

(7) Wortham, A.W. and Mogg, J.W., "A Technical Note on Average Outgoing Quality," *Journal of Quality Technology*, Vol. 2, No. 1, pp. 30-31, 1970.