

懸垂橋의 비틀림振動에 관한 研究

A Study of Torsional Vibrations of Suspended Bridges

閔	昌	植*
Min,	Chang	Shik
金	生	彬**
Kim,	Saeng	Bin
孫	承	堯***
Son,	Seong	Yo

Abstract

A method of dynamic analysis is developed for torsional free vibrations of elliptical-box girder type or stiffening truss system suspension bridge. In this study, the method based on a finite element technique using a digital computer, is illustrated by two numerical examples, the Namhae Bridge which is located in Kyungsang nam-do opened on June, 1973, and the Mt. Chunma Bridge is simple span pedestrian's suspension bridge with lateral bracing system in Mt. Chunma, Kyungki-do, are used.

In general, dynamic modes of complex suspension bridges are three-dimensional in form, i.e., coupling between vertical and torsional motions. However, introduced that amplitudes of oscillation are infinitesimal for coincidence with the purpose of it's use, thereupon, the torsional vibration analyses are treated without coupling terms.

A sufficient number of natural frequencies and mode shapes for torsional free vibration are presented in this paper. In the case of Mt. Chunma Bridge, the natural frequencies and periods are computed with and without reinforcement, respectively, and compared their discrepancies. The influence of the auxiliary reinforcing cables is prevailing in the first few modes, namely, 1st and 2nd in symmetric and 1st, 2nd and 3rd in antisymmetric vibration, and conspicuous in the symmetric compared with the antisymmetric motion, but in the higher modes, this kind of simple accessory elucidates rather converse effects. In the Namhae Bridge, the results are compared with the Manual's obtained by wind tunnel test. It reveals commendable agreement.

要 旨

本 研究는 京畿道 設計審議委에서 天馬山 靑少年 心身修練場 懸垂橋 設計審議時 懸垂橋의 動的 舉動에 대한 設計未備의 原因이 아직 體系化되지 못한 우리 나라 懸垂橋의 設計資料와 指

*東國大學校 大學院

**正會員·東國大學校 工科大學 土木工學科 教授

***正會員·亞洲大學校 機械工學科 副教授

針의 不備함에 그 動機를 얻어, 有限要素法을 適用하여 懸垂橋의 비틀림 振動에 대한 固有振動數와 이에 相應하는 固有振動形을 求하였다.

實際로 懸垂橋의 一般的 舉動은 垂直·水平面 內에서의 連成된 運動으로 表示되지만 使用目的에 符合하여 그 振幅을 微小하도록 制限하면 垂直·비틀림 振動은 單獨으로 非連成化할 수 있으며, 이에 따라 해석하였다.

1973년 6월에 개통된 Streamlined Box-Girder Type 인 南海大橋와 Lateral Bracing 으로 이루어진 단경간의 天馬山 懸垂橋의 設計資料를 이용하여 數値解를 얻었으며, 天馬山 懸垂橋의 境遇 補助 補強케이블의 有無에 따른 固有振動數와 振動形을 求하여 比較 檢討하였다. 補強케이블의 有無에 따라 초기의 振動數 등에서는 그 영향이 매우 뚜렷하였으나, 振動形이 복잡해짐에 따라 補強케이블의 영향은 미약했거나 또는 오히려 역효과를 가져왔다. 南海大橋에 있어서 有限要素 技法과 전자계산기에 의해 本 研究에서 구한 固有振動數와 南海大橋 建設誌에 있는 Frequency Equation 으로 구한 값 또는 風洞實驗에 의한 結果 등과 比較 檢討하였으며, 比較 結果 좋은 一致를 보여주었다.

1. 序 論

懸垂橋는 河川이나 溪谷과 같은 長徑間을 効率의 經濟的으로 連結할 수 있는, 그러면서도 自然景觀과 調和를 이루며 美的 效果를 劇的으로 達成할 수 있는 構造物이다. 그러나 1940年 美國 Tacoma Narrow Bridge 崩壞를 契機로 懸垂橋의 動特性에 관한 究明에 많은 構造工學者들이 關心을 기울이게 되었다. 懸垂橋의 動的 應答은 橋樑의 固有振動數와 그 振動形에 관한 情報로부터 豫測될 수 있다.

Bleich⁽¹⁾은 橋樑의 自由振動을 解析的 方法으로 接近하였으며 近來에 와서 Abdel-Ghaffar 등^(5,7,8,9,13)은 有限要素法을 利用한 自由振動解析例를 提示하고 있다.

現在 우리 나라에 設置된⁽¹⁰⁾ 懸垂橋의 數는 極小數에 不過하며 이에 관한 解析·設計도 略算法을 動員하고 있다. 本 研究는 懸垂橋의 비틀림 진동에 대한 固有振動數와 振動形計算에 有限要素法을 適用하므로써 解析 및 設計段階에서의 融通性을 높이도록 하였다. 本 研究에서 導入한 假定은 다음과 같다.

1) 懸垂材(Hanger)는 振動中 늘어나지 않고 垂直狀態를 維持한다.

2) 振幅은 微小하며 主케이블의 굽힘剛性은 無視한다.

3) 初期荷重은 全部 主케이블에 걸리고 構造

物의 內部摩擦로 因한 減衰는 無視한다.

4) 床板은 圖心에 關하여 對稱이다.

5) 支點 및 支持塔은 完全固定 및 剛體로 본다.

6) 床板荷重은 懸垂材間隔을 작게 하므로써 케이블에 等分布된 것으로 본다.

7) 케이블은 초기하중에 의해 다음과 같이 拋物線으로 假定한다.

$$y_i = d \left(\frac{\delta_i}{l_i} \right) \left(x_i - \frac{x_i^2}{l_i} \right), \quad i=1, 2, 3 \quad (1)$$

여기서 l_i 는 徑間이고 $\delta_i=i$ 번째 徑間의 처짐

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{w_i l_i^2}{8H_w} \right) \quad (2)$$

但, $w_i=i$ 번째 徑間의 等分布荷重

H_w =케이블의 初期 水平張力成分

8) 振動으로 因한 케이블의 追加의 水平張力成分은 初期張力에 比해 無視할 만큼 작다.

이러한 假定들은 懸垂橋振動에 있어서 垂直振動과 비틀림振動을 非連成化하게 해주며 비틀림 진동을 獨立的으로 解析할 수 있는 바탕이 된다.

2. 解析節次

그림 1에 本 研究에서 取扱한 懸垂橋를 圖示하였다. 그림 1(b)의 경우는 비교적 작은 徑間에 적합한 形態이며 補助케이블은 狀況에 따라 省略될 수도 있다.

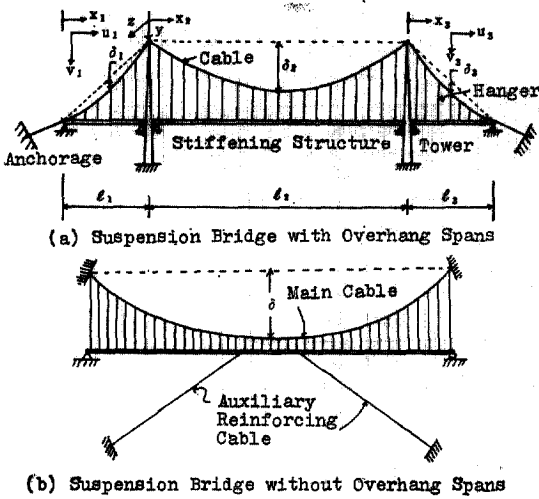


그림 1. 일반적 현수교의 概略圖

이러한 橋樑의 運動方程式은 다음과 같은 Hamilton의 原理로부터 誘導한다.

$$\int_t \delta(T-U)dt=0 \quad (3)$$

여기서 δ 는 變分을 表示하며 T 는 運動에너지, U 는 포텐셜에너지를 나타낸다.

2.1. 에너지 관계식

懸垂橋의 비틀림진동시 考慮하여야 할 에너지는 케이블과 床板의 운동에너지 T 와 포텐셜 에너지 U 이다. 케이블은 垂直平面內에서 180°의 位相差를 갖고 垂直運動을 하며 床板은 비틀림진동을 한다. i 번째 徑間의 운동에너지와 포텐셜 에너지를 구하여 식 (3)에 대입하면 다음과 같은 비틀림진동 방정식을 얻는다(부록 참조).

$$I_{m1} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} + E_{si} A_{si} \frac{\partial^4 \theta_i}{\partial x_i^4} - G_{si} I_{pi} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_i^2} - H_w \frac{b_i^2}{2} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x_i^2} + H_s(t) \frac{w_i b_i}{H_w} = 0 \quad (4)$$

단 $H_s(t) \approx \frac{A_c E_c}{2L_E} \sum_i \frac{w_i b_i}{4H_w} \left(\int_0^{l_i} \theta_i dx_i \right)^2$

윗 식에서 L_E =케이블의 명목상 길이

$$I_{m1} = \frac{w_{si} r_{yi}^2}{g} + \frac{w_c}{g} \frac{b_i^2}{4}$$

=케이블 질량을 포함한 i 번째 徑間 상판의 질량극관성 모우멘트

$E_{si} A_{si}$ =床板의 warping 강성(트리스型)

$G_{si} I_{pi}$ =床板의 비틀림강성

b_i =床板의 케이블 幅을 나타낸다.

2.2. 有限要素法の 適用

식 (4)에 부록 B의 假定變位式(B 4)를 모든 有限要素에 대하여 적용하면 다음과 같은 식으로 정리된다.

$$[I] \{f\} + [K] \{r\} = \{0\} \quad (5)$$

여기서 $\{f\}$ 는 系の 加速度 벡터이고 $[I]$ 는 組合後의 質量慣性 모우멘트 行列이며 $\{r\}$ 은 系の 變位 벡터, $[K]$ 는 組合後의 剛性行列이다.

2.3. 自由振動의 解析

自由振動은 바로 식(5)와 같은 齊次方程式의 解에 該當된다. 이때의 解는 振動이 調和的이라 假定하므로서 식 (5)는 다음과 같은 代數方程式으로 變換하여 얻어진다.

$$([K] - \omega^2 [I]) \{f\} = \{0\} \quad (6)$$

여기서 ω^2 은 조화운동시의 圓振動數이며 $\{f\}$ 은 節點變位振幅 벡터이다.

節點變位가 零이 아니기 爲한 조건, 즉

$$|[K] - \omega^2 [I]| = 0 \quad (7)$$

을 展開하면 이는 ω^2 에 대하여 全體 節點變位數에 해당하는 N 次의 多項式이 되며 이로부터 $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2$ 의 固有圓振動數를 얻을 수 있고 이를 다시 식 (6)에 代入하면 $[N \times N]$ 의 相對振動變位를 表示하는 振動形行列을 얻을 수 있다.

3. 數值解

3.1. 南海大橋

南海大橋의 數值解를 위한 諸數値는 다음과 같다⁽¹⁰⁾.

$$H_w = 1531.68 \text{ ton}$$

有限要素의 길이-경간 L_1 과 L_3 에서는

$$21.333 \text{ m}, L_2 \text{에서는 } 23.765 \text{ m}$$

床板幅 $b = 10 \text{ m}$

床板 탄성계수 $E_s = 2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$

床板 전단탄성계수 $G_s = 8.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$

케이블 단면적 $A_c = 0.04178 \text{ m}^2/\text{cable}$

케이블 탄성계수 $E_c = 2.0 \times 10^7 \text{ t/m}^2$

각 경간의 케이블 길이 $L_{E2} = 426 \text{ m}$

$$L_{E1} = L_{E3} = 142.7 \text{ m}$$

表 1. Namhae Bridge—Torsional Symmetric Vibration and Comparison with Wind Tunnel Test's

Mode Order (1)	Circular Frequency (rad/sec) (2)	Natural Frequency (cyc/sec) (3)	Period (sec) (4)	Design Manual Period (sec) (5)
1	20.6254	3.2826	0.3046	$T_1=0.300$
2	58.7939	9.3573	0.1068	
3	61.5200	9.7912	0.1021	
4	102.3212	16.2849	0.0614	
5	117.7316	18.7375	0.0533	
6	143.3206	22.8101	0.0438	
7	176.3629	28.0690	0.0356	
8	184.5643	29.3743	0.0340	
9	225.0218	35.8133	0.0279	
10	235.9498	37.5525	0.0266	
11	266.4817	42.4118	0.0235	

表 2. Namhae Bridge—Torsional Antisymmetric Vibration and Comparison with Wind Tunnel Test's

Mode Order (1)	Circular Frequency (rad/sec) (2)	Natural Frequency (cyc/sec) (3)	Period (sec) (4)	Design Manual Period (sec) (5)
1	40.9384	6.5155	0.1534	$T_2=0.100$
2	58.8551	9.3670	0.1067	
3	81.8923	13.0335	0.0767	
4	117.5369	18.7065	0.0534	
5	123.0138	19.5782	0.0510	
6	163.6709	26.0490	0.0383	
7	176.7067	28.1237	0.0355	
8	204.8079	32.5961	0.0306	
9	235.3489	37.4569	0.0266	
10	246.2802	39.1967	0.0255	
11	286.4301	45.5867	0.0219	

床板 단위 길이당 질량

$$m_s = w_s/g = 0.4322 \text{ t} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$$

케이블 단위 길이당 질량

$$m_c = w_c/g = 0.07747 \text{ t} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$$

床板 극관성 모멘트 $I_p = 0.4399 \text{ m}^4$

회전반경 $r_s = 3.3665 \text{ m}$

主徑間은 17개의 要素로, 兩側 徑間은 各各 6개의 要素로 分割하여 總 結點수 $N=31$ 로 하였다.

表 1과 2에는 비틀림진동시의 고유진동수와 주기의 계산결과를 실었다. 이들 계산결과는 風筒實驗結果와 對比하였으며 그림 3과 4에는 對稱 및 逆對稱진동형을 圖示하였다. 表 1과 2로부터 最低固有振動數는 對稱形에서 얻어짐을 알 수 있으며 그림 3과 4는 主徑間과 兩側 徑間의 連成運動形態를 보여주고 있다. 垂直振動에 對한 最低固有振動數⁽¹⁴⁾와 비틀림진동에 대한 것을 比較해 보면 對稱·逆對稱진동형에 따라 비틀림진동의 경우가 13배 및 29배로 높은 것을 알 수 있으며 이는 床板構造를 Box-Girder 형으

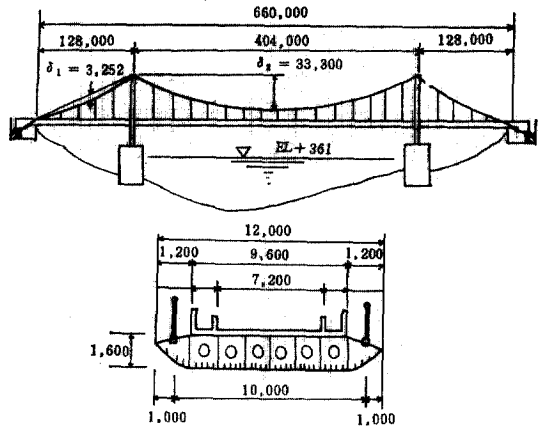


그림 2. 남해대교

로 하여 비틀림剛性を 向上시킨 때문에로 생각 된다.

3.2. 天馬山 懸垂橋

그림 5에 天馬山 懸垂橋의 概略圖를 表示하였는데 고유진동수 계산은 補助 케이블이 있는 경우와 없는 경우에 대하여 따로 계산하고 그 결

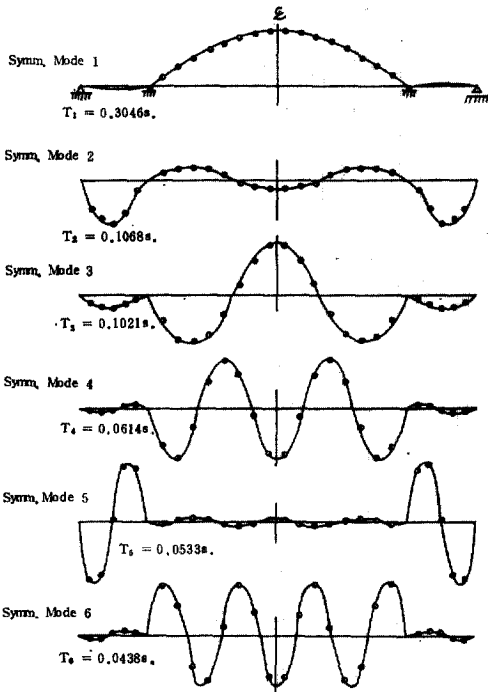


그림 3. 南海大橋-Symmetric Modes of Torsional Vibration

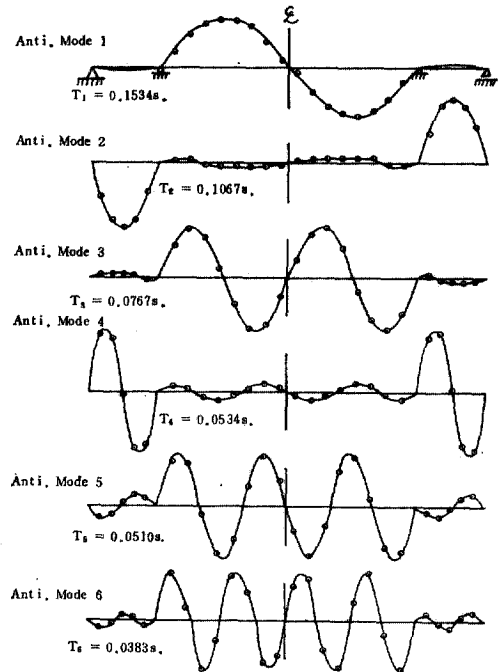


그림 4. 南海大橋-Antisymmetric Modes of Torsional Vibration

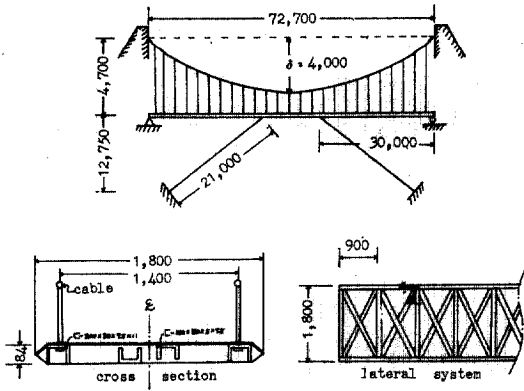


그림 5. 天馬山 懸垂橋

과를 비교하므로써 補助 케이블의 補強效果를 判斷토록 하였다.

天馬山 懸垂橋의 諸數値는 다음과 같다. (11)

$$H_w = 49.55 \text{ ton}$$

$$\text{有限要素 길이 } L_2 = 3.635 \text{ m}$$

$$\text{床板幅 } b = 1.4 \text{ m,}$$

$$\text{床板탄성계수 } E_s = 2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$$

$$\text{床板전단탄성계수 } G_s = 8.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$\text{케이블 길이 } L_B = 74.461 \text{ m}$$

$$\text{주케이블 단면적 } A_c = 19.635 \text{ cm}^2$$

$$\text{케이블 탄성계수 } E_c = 2.0 \times 10^7 \text{ t/m}^2$$

$$\text{補助케이블 단면적 } A_a = A_c/4$$

$$\text{補助케이블의 等價 탄성계수}^{(12)}$$

$$E_{e_s} = E_c / \{1 + [(wH)^2 AE_c / 12T^2]\}$$

여기서 T 는 補助케이블의 初期張力으로 主케이블의 1/6로 보았다. 主케이블의 【단위 길이당 질량 $m_c = 0.06116 \text{ t} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^2$ 】

床板의 단위 길이당 질량

$$m_s = 0.05831 \text{ t} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^2$$

$$\text{床板의 回轉半徑 } r_s = 0.57057 \text{ m}$$

全體 徑間을 20개의 有限要素로 分割하여 對稱 및 逆對稱 고유진동수와 진동형을 求하였다. 表 3과 4에는 固有振動數와 週期를 補助케이블이 있는 경우와 없는 경우를 對比하여 실었으며 그림 6과 7에는 이에 相當한 振動形을 圖示하였다. 最低의 固有振動數는 對稱形에서 얻어졌으

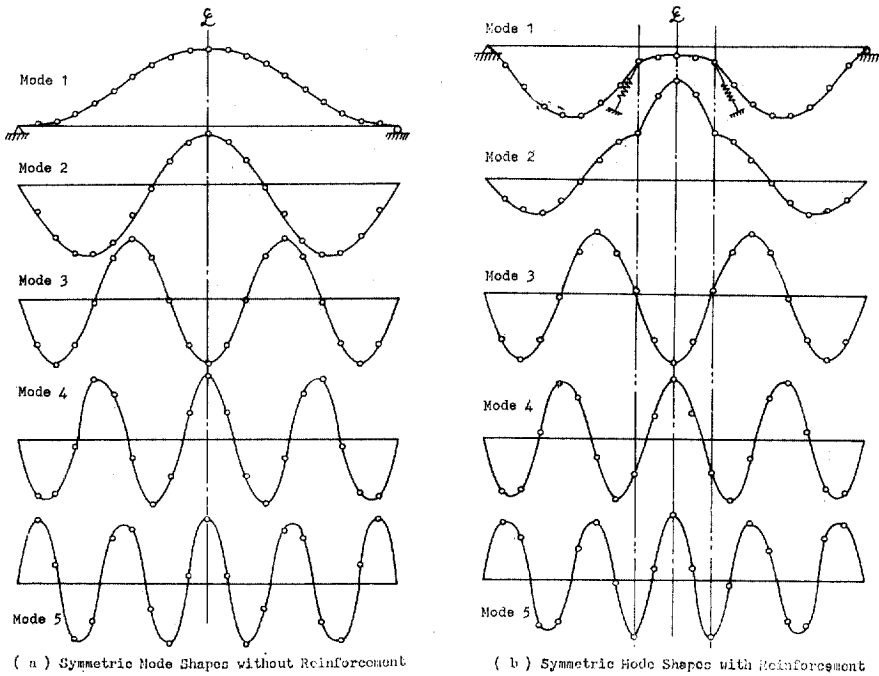


그림 6. 天馬山 懸垂橋——Comparison between with and without Reinforcement——Torsional Symmetric Vibration

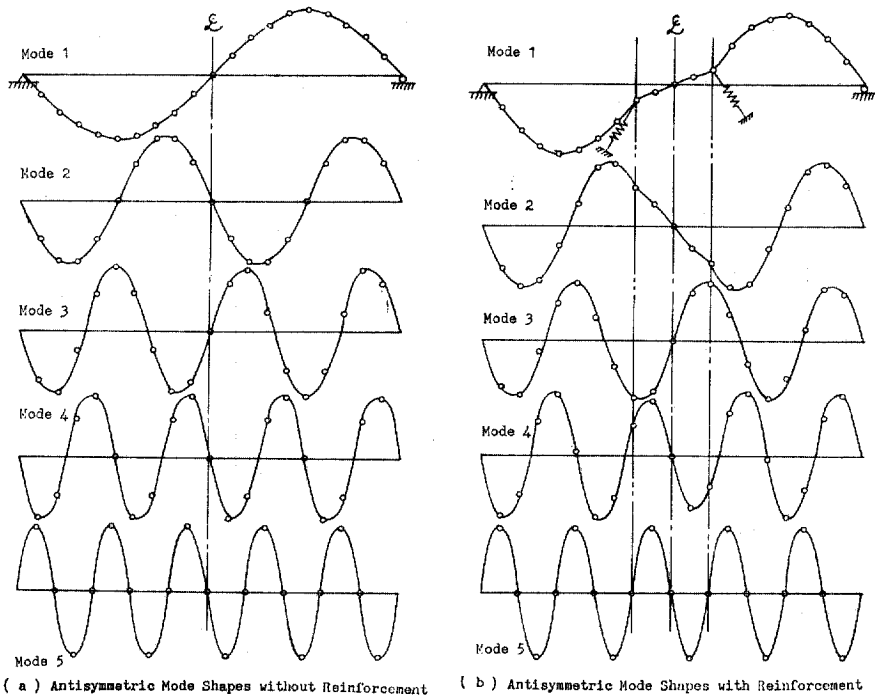


그림 7. 天馬山 懸垂橋——Comparison with and without Reinforcement——Torsional Antisymmetric Vibration

表 3. Mt. Chunma Bridge——Comparison between with and without Reinforcement——Torsional Symmetric Vibration

order (1)	with reinforcement		without reinforcement		
	natural freq. (cyc/sec) (2)	period (sec) (3)	natural freq. (cyc/sec) (4)	period (sec) (5)	% (6)
1	2.103	0.476	1.491	0.671	+41
2	2.604	0.384	2.228	0.448	+17
3	3.592	0.278	3.592	0.278	0
4	5.020	0.199	5.018	0.199	0
5	6.230	0.160	6.455	0.155	-3
6	7.587	0.132	7.900	0.127	-4
7	9.206	0.109	9.354	0.107	-2
8	10.818	0.092	10.818	0.092	0
9	11.904	0.084	12.299	0.081	-4
10	13.104	0.076	13.798	0.072	-6
11	14.908	0.067	15.333	0.065	-3

表 4. Mt. Chunma Bridge—Comparison between with and without Reinforcement—Torsional Antisymmetric Vibration.

with reinforcement			without reinforcement		
order (1)	natural freq. (cyc/sec) (2)	period (sec) (3)	natural freq. (cyc/sec) (4)	period (sec) (5)	% (6)
1	1.672	0.598	1.430	0.699	+17
2	3.227	0.310	2.862	0.349	+13
3	4.440	0.225	4.295	0.233	+4
4	5.689	0.176	5.733	0.174	-1
5	7.175	0.139	7.175	0.139	0
6	8.377	0.119	8.624	0.115	-3
7	9.514	0.105	10.084	0.099	-6
8	11.119	0.090	11.556	0.087	-3
9	12.864	0.078	13.045	0.077	-1
10	14.623	0.068	14.623	0.068	0
11	15.723	0.064	16.111	0.062	-3

며 補助케이블의 影響은 처음 몇개의 낮은 진동수에서 두드러지게 나타남을 알 수 있다. 반면 高次の 진동형에서는 큰 效果가 없음을 볼 수 있다.

4. 結 論

現在 國內에 建設되어 있는 2개의 懸垂橋의 비틀림自由振動에 對한 有限要素解로부터 다음과 같은 結論을 얻을 수 있다.

1. 對稱 및 逆對稱진동형에 대응하는 固有振動數들은 매우 近接하여 分布되어 있다.

2. 타원 Box-Girder 형 床板은 트리스형에 비하여 비틀림剛性이 커서 높은 固有진동수를 갖는다.

3. 南海大橋의 경우 主徑間과 兩側徑間에는 固有振動形으로부터 진동응답이 非連成運動으로 생각될 수 있다.

4. 補助케이블의 存在는 最低 固有振動數에 相當한 影響을 주는 것으로 判斷되며 高次로 올라갈수록 그 效果는 減少되는 것으로 생각된다. 特히 設計時에 留意해야 할 低次の 固有振動數가 向上되는 것은 이와 같은 單純補強이 橋樑의 動特性에는 큰 變化를 招來할 수 있으므로 設計者들에게 좋은 暗示를 준다 할 것이다.

本 研究에서 開發된 電算프로그램은 懸垂橋設

計段階에서 基礎的 解析目的으로 有用히 使用될 수 있을 것이다.

附 錄 1 <參 考 文 獻>

1. Bleich F., McCullough C.B., Rosecrans R., and Vincent G.S., *The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges*, U.S. Government Printing Office, Washington D.C., 1950.
2. McLamore V.R., Hart G.C. and Stubbs I.R., "Ambient Vibration of Two Suspension Bridges", *Journal of the Structural Div., ASCE, Vol. 97, No. ST10, Oct. 1971.*
3. Abdel-Ghaffar A.M. and Housner G.W., "Ambient Vibration Tests of Suspension Bridge", *Journal of Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 104, No. EM5, Oct. 1978.*
4. Buckland P.G., Hooley R., Morgenstern B.D., Rainer J.H. and Selst A.M., "Suspension Bridge Vibrations: Computed and Measured", *Journal of the Struct. Div., Vol. 105, No. ST5, May 1979.*
5. Abdel-Ghaffar A.M., "Free Lateral Vibrations of Suspension Bridges", *Journal of the Struct. Div., ASCE, Vol. 104, No. ST3, March 1978.*
6. Irvine H.M., "Torsional Analysis of Boxgirder

Suspension Bridges”, *Journal of the Struct. Div.*, ASCE, Vol. 100, No. ST4, April 1974.

7. Abdel-Ghaffar A.M., “Free Torsional Vibrations of Suspension Bridges”, *Journal of the Struct. Div.*, ASCE, Vol. 105, No. ST4, April 1979.
8. Abdel-Ghaffar A.M., “Vertical Vibration Analysis of Suspension Bridges”, *Journal of the Struct. Div.*, ASCE, Vol. 106, No. ST10, Oct. 1980.
9. Woude F.V., “Natural Oscillations of Suspension Bridges”, *Journal of the Struct. Div.*, ASCE, Vol. 108, No. ST8, Aug. 1982.
10. 南海大橋—建設誌, 建設部, 1973. 12.
11. 天馬山懸垂橋構造計算書, 유중종합기술(주), 1981.
12. Fleming J.F. and Egeseli E.A., “Dynamic Behavior of a Cablestayed Bridge”, *Earthquake Eng. and Struct. Dynamics*, Vol. 8, 1980.
13. Abdel-Ghaffar A.M., “Suspension Bridge Vibration: Continuum Formulation”, *Journal of the Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. 108, No. EM6, 1982.
14. 閔昌植, “Free Vibration Analysis of Suspension Bridge”, 碩士學位論文, 東國大學校 大學院, 1983.
15. Bathe K.J., *Finite Element procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., 1982.
16. Timoshenko S.P. and Young D.H., *Theory of Structures*, 2nd ed. McGraw-Hill Co. 1965.
17. Roark R.J. and Young W.C., *Formulas for Stress and Strain*, 5th ed., McGraw-Hill, 1975.

附錄 II <비틀림진동에 관한 에너지 관계식>

II. A. 포텐셜 에너지

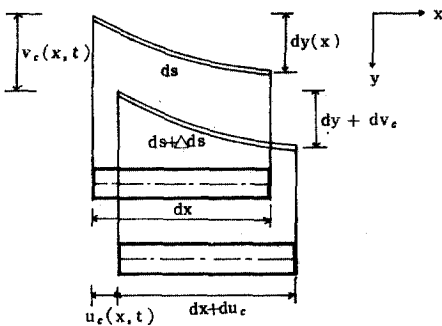


그림 A 1. Displaced Configuration of an Infinitesimal Element

微小케이블 要素 Δds 의 늘어난 길이를 2차의 미소항 까지 취하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta ds \approx \frac{\partial u_c}{\partial x} \frac{dx}{ds} dx + \frac{\partial v_c}{\partial x} \frac{dy_c}{ds} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_c}{\partial x} \right)^2 \frac{dx}{ds} dx \quad (A1)$$

振動으로 인한 케이블 張力の 水平成分 $H(t)$ 는 垂直成分 v_c 項으로 다음과 같이 쓸 수 있다.⁽¹⁶⁾

$$\frac{H(t)}{A_c E_c} \int_0^l \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 dx = \int_0^l \frac{\partial v_c}{\partial x} \frac{dy_c}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial v_c}{\partial x} \right)^2 dx \quad (A2)$$

케이블의 名目上 길이를 다음과 같이 假定한다.

$$L_E = \int_0^l \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 dx = l \left[1 + 8 \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 \right] \quad (A3)$$

式 (1)을 이용하고 케이블 兩端에서의 v_c 가 零임을 고려하여 식 (A2)의 첫항을 적분하면 다음과 같다.

$$\int_0^l \frac{\partial v_c}{\partial x} \frac{dy_c}{dx} dx = - \int_0^l \frac{d^2 y_c}{dx^2} v_c dx = - \frac{1}{2H_w} \int_0^l w v_c dx \quad (A4)$$

비틀림主振動形은 垂直主振動形에 相應하나 두 케이블의 位相은 正反對인 $\pm v$ 로 표시되며 여기서 $v \approx \frac{b}{2} \theta$ 인 관계가 成立한다.

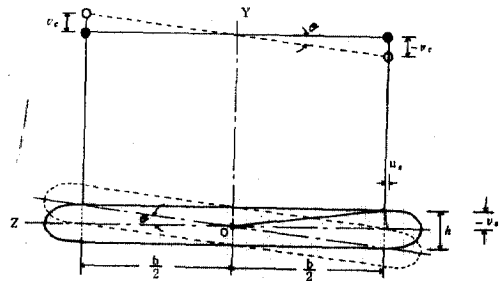


그림 A 2. Torsional Displacement of a Cross Section

II. A. 1. 케이블

케이블의 포텐셜 에너지 U_c 는 上昇케이블의 포텐셜 에너지와 下降케이블의 포텐셜 에너지의 합으로서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_c(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{H_w b^2}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx + H(t) b \int_0^l \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{dy_c}{dx} dx \right] \quad (A5)$$

式 (A4)를 式 (A5)에 代入하고 整理하면 全 포텐셜 에너지 U_c 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_c(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{H_w b^2}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{A_s E_c}{2L_F} \left[\frac{wb}{2H_w} \int_0^l \theta dx \right]^2 \right\} \quad (A6)$$

II. A. 2. 타원형 Box-Girder 床板

床板의 비틀림으로 인한 變形 에너지 $U_{..}$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_{..}(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^l G_s I_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx \quad (A7)$$

여기서 $G_s I_p$ 는 床板의 비틀림剛性이며 極慣性모우멘트 I_p 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_p = \frac{4\pi^2 t \left(\frac{b'}{2} - \frac{t}{2} \right)^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)^2}{r} \quad (A8)$$

$$\text{단, } R = \pi \left(\frac{b'}{2} + \frac{h}{2} - t \right) \left[1 + 0.27 \frac{\left(\frac{b'}{2} - \frac{h}{2} \right)^2}{\left(\frac{b'}{2} + \frac{h}{2} \right)^2} \right]$$

b = 床板幅, h = 床板高, t = 均一價床板高

II. A. 3. 트러스形 床板

트러스形 床板의 變形에너지 $U_{..}$ 는 斷面內의 warping 으로 인한 에너지와 Web 部分의 せん断變形 에너지의 합으로 다음과 같이 쓸 수 있다 (1, 7, 13).

$$U_{..}(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^l 4E_s A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^l \left[2 \frac{\mu_v}{G_s} \tau_v^2 + 2 \frac{\mu_h}{G_s} \tau_h^2 \right] dx \right\} \quad (A9)$$

여기서, μ_v, μ_h 는 Web 部分의 剪斷抵抗係數이고 τ_v, τ_h 는 剪斷應力이며 天馬山 懸垂橋의 경우 $\mu_h = 2 \frac{E}{G} Ad \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ 를 사용하였다.

式 (A9)를 應力-變形度, 應力平衡 및 힘-變位關係를 考慮하여 整理하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_{..}(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^l E_s A_s \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

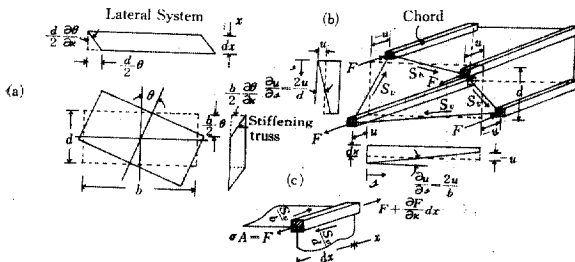


그림 A 3. Type of Vibration Displacement

- (a) Torsional Deformation
- (b) Warping Deformation
- (c) Equilibrium of a Corner Element

$$+ \int_0^l G_s I_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx \quad (A10)$$

여기서, $\beta = \frac{bd\mu_v\mu_h}{b^2\mu_v + d^2\mu_h}$

$$A_s = \frac{A}{2} \left\{ d^2 \left(\frac{\beta d}{\mu_v} - \frac{b}{2} \right)^2 + b^2 \left(\frac{d}{2} - \frac{\beta d}{\mu_h} \right)^2 \right\} \quad (A11)$$

$$I_p = 2\beta b d \quad (A12)$$

II. B. 運動에너지

全 운동에너지 T 는 床板의 운동에너지와 케이블의 운동에너지의 합으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^l \frac{w_s}{g} r_s^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{w_c}{g} \frac{b^2}{4} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx \right\} \quad (A13)$$

附錄 III <有限要素法の諸關係式>

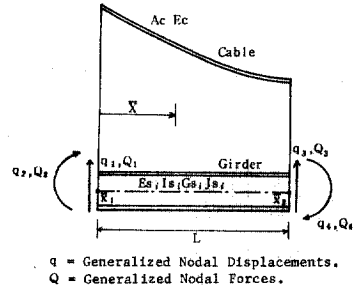


그림 B 1. Discretized Element Configuration

有限要素 e 의 垂直變位函數를 다음과 같이 假定한다.

$$v_e(x, t) = \{h(\bar{x})\}_e^T \{q(t)\}_e \quad (B1)$$

여기서, $\{h(\bar{x})\}_e^T = \{H_{01}(\bar{x}) H_{11}(\bar{x}) H_{02}(\bar{x}) H_{12}(\bar{x})\}$

= Cubic Hermitian polynomial 벡터

$$\{q(t)\}_e^T = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4\}$$

= 절점 변위 벡터

한편 床板의 비틀림 각 $\theta(\bar{x}, t)$ 와 수직변위 $v(\bar{x}, t)$ 와의 관계는 다음과 같은 근사식을 사용한다.

$$\theta_e(\bar{x}, t) = \frac{2}{b} v_e(\bar{x}, t) = \frac{2}{b} \{h(\bar{x})\}_e^T \{q(t)\}_e \quad (B2)$$

III. A. 케이블剛性行列

式 (B2)를 式 (A6)에 代入하고 전체 길이에 걸쳐 적분한 후 정리하면 다음 식이 얻어진다.

$$\int_L U_c(x, t) dx = U_c(t)$$

$$= \frac{1}{2} \{r\}^T ([K_{c,e}] + [K_{c,r}]) \{r\} \quad (B3)$$

여기서, $\{r\}$ =全體 節點變位벡터 = $\sum_{e=1}^N \{q\}_e$.

$$[K_{c,e}] = \frac{A_e E_e}{2L_e} \left[\left(\frac{w}{H_w} \{\hat{h}\}_N \right)^T \left(\frac{w}{H_w} \{\hat{h}\}_N \right)^T \right] \quad (B4)$$

$\{\hat{h}\}_N = \sum_{e=1}^N \{\hat{h}\}_e$, N = 전체 유한요소수

$$\{\hat{h}\}_e^T = \int_0^l \{h\}_e^T d\bar{x} = \{l/2, l^2/12, l/2, -l^2/12\}$$

$$[K_{c,r}] = \sum_{e=1}^N [K_{c,e}] \quad (B5)$$

$$[K_{c,e}]_e = 2H_w \int_0^l \{h'\}_e \{h'\}_e^T d\bar{x} \\ = \frac{H_w}{15l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ \text{sym.} & & 36 & -3l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (B6)$$

$\{h'\}_e$ = 要素 e 의 \bar{x} 에 관한 식 (B2)의 導函數벡터
 $[K_{c,e}] + [K_{c,r}]$ = 組合後의 케이블 剛性行列

III. B. 타원형 Box-Girder 床板의 강성행렬

式 (B2)를 式 (A7)에 代入하고 전체 길이에 걸쳐 적분한 후 정리하면 다음 식이 얻어진다.

$$\int_L U_{ii}(x, t) dx = U_{ii}(t) \\ = \frac{1}{2} \{r\}^T [K_{ii}] \{r\} \quad (B7)$$

여기서 $[K_{ii}] = \sum_{e=1}^N [K_{ii}]_e$ = 組合後의 床板 강성행렬

$$[K_{ii}]_e = \frac{4}{b^2} \int_0^l G_e I_p [\{h'\}_e \{h'\}_e^T] dx \\ = \frac{2G_e I_p}{15b^2 l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ \text{sym.} & & 36 & -3l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (B8)$$

III. C. 트러스형 床板의 剛性行列

式 (B2)를 式 (A10)에 代入하고 전체 길이에 걸쳐 적분한 후 정리하면 다음과 같다.

$$\int_L U_{ii}(x, t) dx = U_{ii}(t) \\ = \frac{1}{2} \{r\}^T ([K_{ii}] + [K_{ii,d}]) \{r\} \quad (B9)$$

여기서 $[K_{ii}] + [K_{ii,d}] = \sum_{e=1}^N ([K_{ii}]_e + [K_{ii,d}]_e)$

= 組合後의 床板 剛性行列

$$[K_{ii,e}] = \frac{4}{b^2} \int_0^l E_e A_e [\{h''\}_e \{h''\}_e^T] d\bar{x} \\ = \frac{4E_e A_e}{b^2 l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{sym.} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (B10)$$

$$[K_{ii,d}]_e = \frac{4}{b^2} \int_0^l G_e I_p [\{h'\}_e \{h'\}_e^T] d\bar{x} \\ = \frac{2G_e I_p}{15b^2 l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ \text{sym.} & & 36 & -3l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (B11)$$

III. D. 慣性行列

式 (B2)를 式 (A13)에 代入하고 전체 길이에 걸쳐 적분한 후 정리하면 다음과 같다.

$$\int_L T(x, t) dx = T(t) \\ = \frac{1}{2} \{\dot{r}\}^T [J] \{\dot{r}\} \quad (B12)$$

여기서, $\{\dot{r}\} = \sum_{e=1}^N \{\dot{q}\}_e$ = 節點變位の 時間 t 에 관한 導函數벡터

$$[J] = \sum_{e=1}^N [J]_e = \text{組合後의 慣性行列} \\ [J]_e = \frac{4I_m}{b^2} \int_0^l \{h\}_e \{h\}_e^T d\bar{x} \\ = \frac{I_m l}{15b^2} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ \text{sym.} & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (B13)$$

이제 式 (B3), (B7), (B9) 및 (B12)를 式 (3) Hamilton의 原理에 代入하고 운동량보존을 고려하여 운동에 내지항을 부분적분하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\int_L \{\delta r\}^T [-[J] \{\dot{r}\} - ([K_{ii}] + [K_{ii,r}] + [K_{ii,d}] + [K_{ii,d}]) \{r\}] dt = 0 \quad (B14)$$

여기서 $\{\delta r\}$ 의 任意性을 고려하면 위 식은 다음과 같은 운동 방정식을 쓸 수 있다.

$$[J] \{\dot{r}\} + ([K_{ii}] + [K_{ii,r}] + [K_{ii,d}] + [K_{ii,d}]) \{r\} = \{0\} \quad (B15)$$

위 式에서 床板이 타원형이나 트러스형이냐에 따라 $[K_{ii,r}]$ 項과 $([K_{ii}] + [K_{ii,d}])$ 項을 取捨選擇하면 되고 이 는 式 (5)와 同等한 表現이다.

(接受 : 1983. 5. 3)