

鐵筋콘크리트 平面띠대構造物의 非線型解析

Nonlinear Analysis of Planar Reinforced Concrete Frames

姜 榮 振*
Kang, Young Jin

Abstract

A numerical procedure based on the finite element method for the nonlinear analysis of planar reinforced concrete frames is presented. Material nonlinearities such as cracking of concrete and yielding of steel are incorporated. This method is capable of providing accurate numerical solutions for the response of planar reinforced concrete frames failing primarily in flexure throughout elastic, inelastic and ultimate load ranges. A numerical example is presented to demonstrate the validity and applicability of the present method. The results are compared with experimental results and the analytical results obtained by other investigator.

要 旨

有限要素法에 의한 鐵筋콘크리트 平面띠대構造物의 非線型數值解析法을 提示하였다. 콘크리트의 龜裂, 鐵筋의 降伏等 材料上의 非線型性を 考慮하였다. 이 方法에 의하면 휨에 의해 破壞되는 鐵筋콘크리트 平面띠대構造物의 使用荷重 및 極限荷重 領域을 통한 應答에 대한 正確한 數值解를 얻을 수 있다. 이 方法의 正確성과 有用성을 立證하기 위해 數值解析例를 提示하고 이를 實驗結果와 다른 研究에 의한 解析結果와 比較하였다.

1. 序 言

鐵筋콘크리트構造物은 일반적으로 使用性和 安全性을 만족하도록 設計되고 있다. 使用性を 만족시키기 위해서는 使用荷重에 대한 構造物의 變形과 應力을 精確히 예측할 수 있어야 할 것이고 원하는 安全度를 유지하기 위해서는 破壞荷重을 精確히 계산할 수 있어야 할 것이다. 따라서 彈性, 非彈性 및 極限荷重 領域에 亘한 構造物의 舉動을 精確히 이해하는 것이 바람직하다.

그러나 全荷重領域을 통한 鐵筋콘크리트構造

物의 精確한 解析은 다음에 열거하는 바와 같은 요인때문에 상당히 복잡한 문제이다: 材料의 非物質性; 龜裂로 인한 構造形態의 변화; 콘크리트와 鐵筋의 非線型 應力-變形度 관계; 시간에 따르는 콘크리트 材料性質의 변화 및 크리이프, 乾燥收縮 및 溫度變形과 같은 時間依存性 變形; 鐵筋의 Dowel action, 龜裂部位에서의 Bond slip 및 Aggregate interlock 現象에 대한 解析的 模型化의 어려움; 띠대構造物, 平板 및 曲面板에서의 幾何學的 非線型性的 영향등.

이러한 어려움 때문에 과거의 기술자들은 콘

*正會員, 서울大學校 工科大學 土木工學科 助教授

크리트 構造物을 설계하는데 많은 實驗과 경험에서 도출된 經驗식에 크게 의존하여 왔다. 그러나 電算機의 발달과 有限要素法과 같은 유력한 數值解析法의 개발에 힘입어 최근 10여년간 이러한 실험에 대한 의존성에서 탈피할 수 있는 解析的方法의 개발을 위한 연구가 활발히 진행되어왔다. (1) 本論文은 이러한 계속되는 노력의 一環으로서 鐵筋콘크리트 平面뱀대構造物의 非線型解析法을 제시한다.

本論文의 목적은 콘크리트의 龜裂, 철근의 降伏等 材料上的 非線型性을 고려한 鐵筋콘크리트 平面뱀대構造物의 非線型 數值解析法을 개발하는데 있다. 彈性, 塑性 및 極限荷重 領域을 통한 이들 構造物의 精確한 應答을 구하는 것을 목표로 한다. 變位法을 근거로 한 有限要素法에 의해 非線型 平衡方程式을 導出하고 增分荷重法과 反復法에 의해 解를 구한다. 有限要素內의 材料性質의 변화는 뱀대要素를 콘크리트와 鐵筋의 層으로 분할하고 層積分에 의해 要素行列을 구함으로써 고려한다.

2. 材料性質의 數學的模型

콘크리트 應力-變形度관계의 數學的 模型이 그림 1(a)에 表示되어 있다. 그림 中 上昇部分은 Hognestad(2)에 의해 제안된 拋物線으로서 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\sigma = f_c'' \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \left(2 - \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right); \epsilon_0 = \frac{2f_c''}{E_i} \quad (1)$$

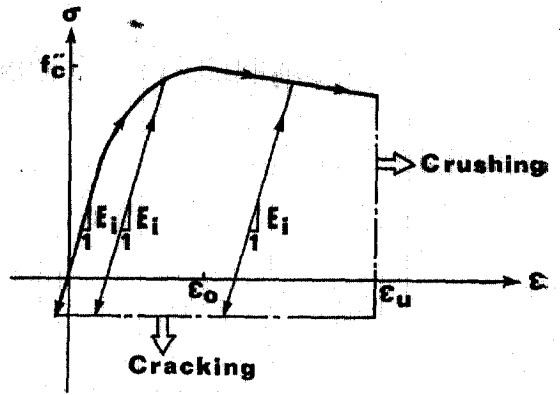
이 식에서 ϵ_0 는 最大應力 f_c'' 에 대응하는 變形度이고 E_i 는 初期彈性係數이다. 식(1)을 ϵ 에 대하여 微分함으로써 接線彈性係數 E_i 를 구할 수 있다.

$$E_i = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = E_i \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) \quad (2)$$

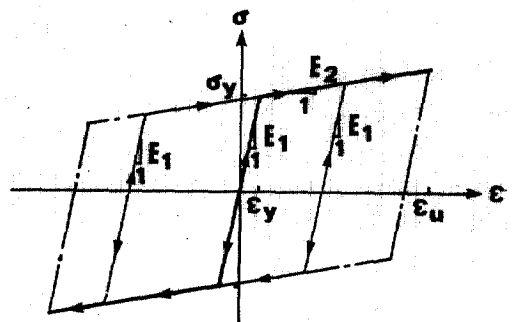
壓縮應力-變形度 曲線中的 下降部分은 다음 식으로 표시되는 直線으로서 이 部分의 彈性係數는 0으로 가정한다.

$$\sigma = -0.15f_c'' \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_u - \epsilon_0} + f_c''; E_i = 0. \quad (3)$$

이식에서 ϵ_u 는 最大壓縮變形度로서 콘크리트의 변형도가 ϵ_u 를 초과하면 壓縮破壞를 일으키는 것으로 본다.



(a) Concrete



(b) Steel

그림 1. Idealization of Stress-strain Curves

引張應力-變形度관계는 다음 식으로 가정한다.

$$\sigma = E_i \epsilon; \sigma_{max} = f_i' \quad (4)$$

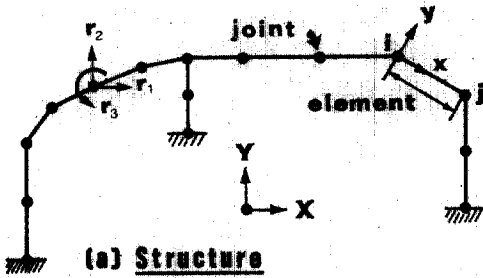
즉 콘크리트의 應力이 最大引張應力 f_i' 에 도달하면 콘크리트는 龜裂되는 것으로 본다. 또한 그림 1(a)에는 荷重을 제거했을 때와 再負荷할 경우의 經路가 표시되어 있다. 一旦 균열이 발생한 部位는 引張應力을 받을 수 없으나 壓縮應力이 작용하면 균열이 닫히지면서 이를 負擔할 수 있다고 가정한다.

鐵筋의 應力-變形度관계는 그림 1(b)에 표시된 바와 같이 두개의 直線으로 가정하였다. 가정된 荷重除去 및 再負荷 時의 經路도 표시되어 있다.

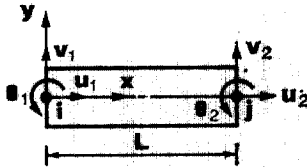
3. 非線型解析過程

3.1 鐵筋콘크리트 平面뱀대構造物의 形態의 變形

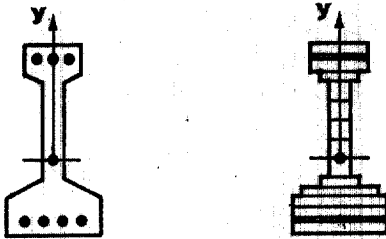
그림 2(a)에는 鐵筋콘크리트 平面뱀대構造物



(a) Structure



(b) Element



(c) Cross Section

그림 2. Geometry and Deformation of Planar Reinforced Concrete Frames

을 節點에서 연결된 뼈대要素들의 集合體로 理想化하여 표시하였다. 各 節點은 그림에 표시한 바와 같이 3개의 自由度를 가지고 있다. 構造物全體의 平衡方程式은 고정되어 있는 構造座標系 X, Y系에서 유도하며 要素의 構造의性質은 各要素의 端部節點으로 규정되는 要素座標系 x, y系에서 기술된다.

그림 2(b)와 2(c)에는 뼈대要素의 立面 및 斷面이 표시되어 있다. 要素內에서 斷面은 일정하다고 가정하며 斷面은 要素座標 y에 대하여 對稱이라고 가정한다. 뼈대要素 內에서의 材料性質의 변화를 고려하기 위하여 단면을 콘크리트와 鐵筋의 層으로 분할하고 各層은 荷重에 의하여 一軸應力狀態에 있다고 가정한다. 各層은 基準面으로부터의 거리 y좌표와 斷面積에 의하여 幾何學的으로 규정된다. 콘크리트와 철근은 완

전히 附着되어 있다고 가정한다.

뼈대要素의 節點變位 벡터 {r}은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{r\} = [u_1, u_2, v_1, v_2, \theta_1, \theta_2]^T \quad (5)$$

이들은 要素端部節點의 x, y 方向變位 및 回轉角을 나타낸다. u_0 및 v_0 를 뼈대要素軸上에 있는 任意點의 x, y 方向의 變位成分이라고 하자. 要素軸을 통하여 u_0 는 線型으로 v_0 는 三次曲線으로 변한다고 가정하면 이들을 다음과 같이 節點變位の 函數로 표시할 수 있다. L을 要素의 길이라고 할때 單位가 없는 媒介變數 p를 $p=x/L$ 로 정의하면

$$u_0(p) = (1-p)u_1 + pu_2 \quad (6)$$

$$v_0(p) = (1-3p^2+2p^3)v_1 + (3p^2-2p^3)v_2 + L(p-2p^2+p^3)\theta_1 + L(-p^2+p^3)\theta_2 \quad (7)$$

Bernoulli-Navier의 平面斷面에 대한 가정을 받아들인다면 뼈대要素內의 任意點의 x 方向變位 $u(x, y)$ 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$u(x, y) = u_0(x) - y \frac{dv_0(x)}{dx} \quad (8)$$

軸方向變形度 $\epsilon(x, y)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\epsilon(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \quad (9)$$

3.2 平衡方程式의 誘導

材料의 非線型性으로 인하여 要素剛度行列 [K]는 線型彈性的인 경우와는 달리 節點變位 {r}의 函數이다. 非線型平衡方程式을 誘導하기 위하여 뼈대要素의 變形된 現狀態를 狀態 A라고 하고 狀態 A에 節點荷重의 增分 {ΔR}이 가해져 節點變位の 增分 {Δr}이 發生한 狀態를 狀態 B라고 하자. 要素內의 任意點에서의 {Δr}에 相應하는 x, y 方向의 變位 및 應력과 變形度의 增分을 각각 Δu, Δv 및 Δσ, Δε이라고 한다면 式 (5) - (9)로부터 다음과 같은 狀態 A에서의 增分形 變形度-變位關係를 유도할 수 있다.

$$\Delta \epsilon = [B] \{\Delta r\} \quad (10)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}, & \frac{1}{L}, & \frac{6}{L^2}y(1-2p), \\ \frac{6}{L^2}y(-1+2p), & \frac{2}{L}y(2-3p), \\ \frac{2}{L}y(1-3p) \end{bmatrix} \quad (11)$$

상태 A에서의 접선형 변형도-변위관계는

$$d\epsilon = [B] \{dr\} \quad (12)$$

상태 A에서 假想變位の 原理를 適用하면

$$\{d\bar{r}\}^T \{R\} = \int_V d\epsilon \sigma dV \quad (13)$$

이식에서 $\{d\bar{r}\}$ 는 微小假想變位벡터, $d\epsilon$ 는 이에 相應하는 微小假想變形度, $\{R\}$ 은 節點荷重벡터이다. 式(12)의 轉置形을 取하면 $d\bar{\epsilon} = \{d\bar{r}\}^T [B]^T$ 로 쓸수 있다. 이것을 式(13)에 代입하고 $\{d\bar{r}\}$ 는 任意의 微小假想變位라는 점을 생각하면 다음과 같은 狀態 A에서의 平衡方程式을 구할 수 있다.

$$\{R\} = \int_V [B]^T \sigma dV \quad (14)$$

다음 狀態 B에서 假想變位の 原理를 적용하면

$$\begin{aligned} \{d\bar{r}\}^T (\{R\} + \{\Delta R\}) \\ = \int_V d\bar{\epsilon} (\sigma + \Delta\sigma) dV \end{aligned} \quad (15)$$

따라서 狀態 B에서의 平衡方程式은

$$\{R\} + \{\Delta R\} = \int_V [B]^T (\sigma + \Delta\sigma) dV \quad (16)$$

式(16)에서 式(14)를 빼면 다음과 같은 狀態 A에서의 増分形 平衡方程式을 구할 수 있다.

$$\{\Delta R\} = \int_V [B]^T \Delta\sigma dV \quad (17)$$

콘크리트와 철근의 接線形 應力變形度관계는 모두 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d\sigma = E_c d\epsilon \quad (18)$$

이식에서 E_c 는 接線彈性係數로서 ϵ 의 函數이다.

式(12)를 式(18)에 代入하면

$$d\sigma = E_c [B] \{dr\} \quad (19)$$

狀態 A에서의 接線形 平衡方程式은 式(17)에서 増分演算子 Δ 를 微分演算子 d 로 置換하고 $d\sigma$ 에 式(19)를 代입하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{\Delta R\} = [K_s] \{dr\} \quad (20)$$

$$[K_s] = \int_V [B]^T E_c [B] dV \quad (21)$$

$[K_s]$ 는 現狀態 A에서 有效한 때대要素의 接線剛度行列이며 接線彈性係數 E_c 를 통하여 現상태 A에서의 재료성질을 나타내고 있다.

다음 節에서 기술하는 바와 같이 反復法에 의해 非線型 平衡方程式을 풀때는 精確한 要素 接線剛度行列 $[K_s]$ 의 값보다는 이의 近似值만 以

으면 足한다.

따라서 $[K_s]$ 는 各要素의 中點에서 層積分에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다. (3)

$$[K_s] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & -\frac{ES}{L} \\ & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & \frac{ES}{L} \\ & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \text{sym.} & & & & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (22)$$

式(22)에서

$$EA = \int_A E_c dA = \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} A_{ci} + \sum_{i=1}^{n_s} E_{si} A_{si} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} ES = - \int_A E_c y dA = - \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} y_{ci} A_{ci} \\ - \sum_{i=1}^{n_s} E_{si} y_{si} A_{si} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} EI = \int_A E_c y^2 dA = \sum_{i=1}^{n_c} E_{ci} y_{ci}^2 A_{ci} \\ + \sum_{i=1}^{n_s} E_{si} y_{si}^2 A_{si} \end{aligned} \quad (25)$$

n_c 와 n_s 는 콘크리트層과 鐵筋層의 數이며 c 와 s 는 각각 콘크리트와 철근을 나타낸다.

그러나 式(14)로 表示되는 內部抵抗力벡터 $\{R\}$ 는 가능한 限 精確히 구하는 것이 重要하다. 따라서 $\{R\}$ 는 斷面에서는 層積分에 의해서, 要素軸方向으로는 3點 Gauss 積分에 의해 구한다. (3)

各 때대要素의 接線形 平衡方程式을 상기와 같이 要素座標系에서 구한다음 이들을 構造物 전체에 공통된 構造座標系로 變換하고 直接剛度法의 과정에 따라 構造物 전체에 대한 平衡方程式을 聚合한다.

3.3 非線型平衡方程式의 解法

非線型方程式은 일반적으로 重疊의 原理가 적용되지 않아 反復法을 사용하여 푸는 것이 보통이다. 反復法에도 荷重-變位曲線의 기울기를 以

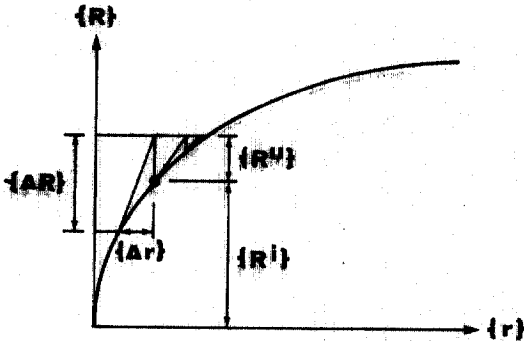


그림 3. Combined Solution Method for Nonlinear Equilibrium Equations

떻게 가정하느냐에 따라서 初期剛度法, 割線剛度法, 接線剛度法 등이 있다. (4)

本研究에서는 그림 3에 표시한 바와 같이 荷重増分法과 接線剛度法을 混用하였다. 그 과정을 약술하면 다음과 같다.

節點荷重 벡터 $\{R\}$ 을 適切히 분할하여 各増分荷重 $\{\Delta R\}$ 에 대하여 다음과 같이 진행한다.

- (1) 各要素마다 現狀態의 재료성질에 상응하는 接線剛度行列을 구한다. 이들을 構造座標系로 變換한 다음 直接剛度法에 의해 聚合하여 構造 接線剛度行列 $[K_i]$ 를 구한다.
- (2) 聯立方程式 $[K_i]\{\Delta r\} = \{\Delta R\}$ 을 풀어 節點變位の 増分 $\{\Delta r\}$ 을 구하고 이를 各要素座標系로 變換하여 部材端部變位の 増分을 구한다.
- (3) 式(10)에 의해 變形度의 増分 $\Delta \epsilon$ 을 구하고 지금까지의 疊에 加산하여 현재의 總變形度 ϵ 을 구한다.
- (4) 節點變位の 増分 $\{\Delta r\}$ 을 지금까지의 疊에 加산하여 현재의 總節點變位 $\{r\}$ 을 계산한다.
- (5) 現狀態에서 有效한 應力-變形度관계에 의해 應力 σ 를 구한다.
- (6) 式(14)에 의해 部材端部力을 구하고 이들을 構造座標系로 變換, 聚合하여 內部抵抗力 벡터 $\{R^i\}$ 를 구한다.
- (7) 現在의 總節點荷重 $\{R\}$ 에서 內部抵抗力 $\{R^i\}$ 를 빼어 不均衡力 $\{R^u\}$ 를 구한다.

(8) $\{R^u\}$ 로 놓고 段階(1)로 되돌아 간다.

段階 (1)~(8)은 不均衡力 $\{R^u\}$ 가 미리 정한 許容値보다 작아질때 까지 반복된다. 이 시점에서 $\{R^u\}$ 를 다음의 荷重増分 $\{\Delta R\}$ 에 加산하고 段階 (1)~(8)의 反復法을 다시 시행한다.

4. 數值解析例

지금까지 기술된 解析過程을 電算프로그램으로 작성하고 이방법의 妥當性和 有用성을 입증하기 위하여 實驗結果와 解析結果를 비교할 수 있는 例題를 선택하였다.

Bresler와 Scordelis(5,6)는 鐵筋콘크리트보의 破壞樣相을 연구하기 위해 많은 실험을 하였다. 이 중 힘에 의해 파괴되는 單純보 B3를 선택하였다.

그림 4에는 中點에 載荷된 構造物의 折半이 그려져 있다. 이 構造物은 中점을 지나는 면에 대하여 대칭이므로 그 절반을 16個의 要素로 나누고 斷面은 19個의 콘크리트層과 4個의 鐵筋層으로 나누어 해석하였다. Lin(7)은 그의 鐵筋콘크리트 슬래브의 연구에서 이 構造物을 해석하

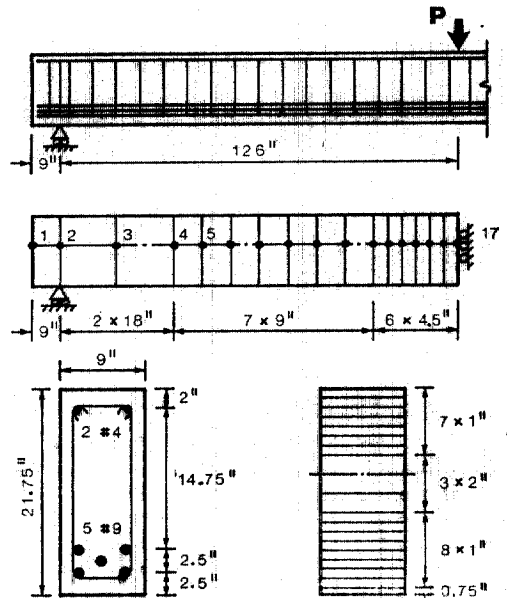


그림 4. Bresler-Scordelis Beam: Structure and Loading

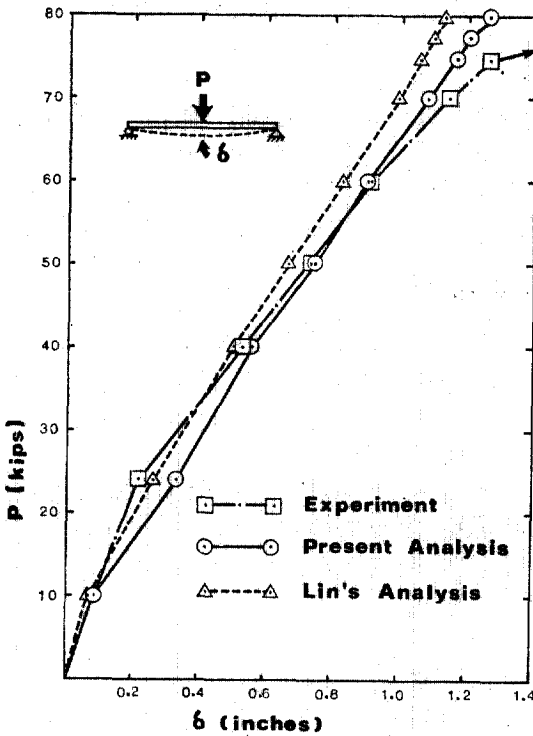


그림 5. Bresler-Scordelis Beam: Comparison of Midspan Deflection.

였는데 유사한 要素分割을 사용하였다.

재료의 性質은 다음과 같다.

콘크리트 : $f_c' = 5.62 \text{ ksi}$ $f_t = 0.611 \text{ ksi}$

$E_1 = 4.867 \times 10^3 \text{ ksi}$ $\epsilon_u = 3.8 \times 10^{-3}$

#4 철근 : $\sigma_y = 50.1 \text{ ksi}$ $\epsilon_u = 0.2$

$E_1 = 29.2 \times 10^3 \text{ ksi}$ $E_2 = 144 \text{ ksi}$

#9 철근 : $\sigma_y = 80.1 \text{ ksi}$ $\epsilon_u = 0.139$

$E_1 = 30.7 \times 10^3 \text{ ksi}$ $E_2 = 418 \text{ ksi}$

極限荷重까지 到達하는데 9個의 荷重増分이 소요되었으며 荷重増分當 平均 6번의 반복을 시행하였다.

그림 5에는 중점에서의 荷重-처짐曲線이 그려져 있다. 實驗値와 함께 Lin의 해석결과와 본 연구결과가 같이 나타나 있다. 실험에서는 極限荷重의 約 30%를 먼저 載荷하고 이것을 제거한 다음 다시 極限荷重까지 載荷하였다. 그림 5에 나타난 실험치는 이 두번째의 재하에 대한 것이다. 두 해석결과는 모두 하중을 단번에 재하한 결과이다.

작은 荷重下에서의 실험치와 해석치와의 차이는 荷重除去 및 再負荷의 영향이라고 생각된다.

極限荷重의 실험치는 79.5 kips이고 해석결과는 모두 80 kips이다. 두 해석결과는 모두 실험에서 얻어진 하중-처짐곡선을 상당히 近似하게 따라가지만 本研究에 의한 해석결과가 Lin의 해석결과 보다 실험치에 더 가까운 것을 알 수 있다. 이것은 本研究에서 콘크리트의 應力-變形度 曲線의 模型에 拋物線을 사용하는데 비해 Lin은 彈性-完全塑性의 두 直線을 사용한다기인 하는 것 같다.

表 1 에는 極限荷重($P=80 \text{ kips}$)에서 보의 중앙에 위치한 16번 要素의 콘크리트 및 鐵筋層에 분포된 應力 및 변형도가 기재되어 있다. 變形度는 가정대로 線型分布를 보이고 있으며 層應力은 非線型 應力-變形度 관계에 의해 계산된 것이다. 水平力과 휨모멘트에 대한 平衡檢證도 표시되어 있다. 0이어야 할 軸力은 -0.018 kips 이고 $40^k \times (126 - 4.512)^{in} = 4950 \text{ k} \cdot in$ 이어야 할 휨모멘트는 $4950.21 \text{ k} \cdot in$ 이 것을 볼 수 있다. 이러한 정도의 오차는 계산상의 오차로서 무시할 수 있는 것이다. 보 中央에서의 電算結果는 軸力이 $6.80 \times 10^{-4} \text{ k}$, 휨모멘트가 $5450 \text{ k} \cdot in$ ($40^k \times 126^{in}$)인데 이것은 물론 式(14)를 數值積分하여 얻어진 것이다.

表 1. Blesler-Scordelis Beam: Stress Distribution and Statics Check at the Center of Element 16 at Ultimate Load ($P=80 \text{ kips}$)

Layer No.	Area A (in ²)	y (in)	Strain $\epsilon \times 10^3$	Stress σ (ksi)	$\sigma \times A$ (k)	$-\sigma \times A \times y$ (k·in)
1	9.	8.5	-2.208	-5.609	-50.481	429.09
2	9.	7.5	-1.959	-5.491	-49.419	370.64
3	9.	6.5	-1.710	-5.241	-47.169	306.60
4	9.	5.5	-1.461	-4.861	-43.749	240.62
5	9.	4.5	-1.211	-4.349	-39.141	176.13

Concrete Layers	6	9.	3.5	-0.962	-3.707	-33.363	116.77	
	7	9.	2.5	-0.713	-2.933	-26.397	65.99	
	8	18.	1.	-0.339	-1.528	-27.504	27.50	
	9	18.	-1.	0.160	0.	0.	0.	
	10	18.	-3.	0.658	0.	0.	0.	
	11	9.	-4.5	1.032	0.	0.	0.	
	12	9.	-5.5	1.282	0.	0.	0.	
	13	9.	-6.5	1.531	0.	0.	0.	
	14	9.	-7.5	1.780	0.	0.	0.	
	15	9.	-8.5	2.030	0.	0.	0.	
	16	9.	-9.5	2.279	0.	0.	0.	
	17	9.	-10.5	2.528	0.	0.	0.	
	18	9.	-11.5	2.777	0.	0.	0.	
	19	6.75	-12.375	2.996	0.	0.	0.	
	Steel Layers	1	0.3907	7.	-1.835	-50.12	-19.582	137.07
		2	2.037	-7.75	1.843	56.57	115.233	893.06
		3	1.0185	-9.0	2.154	66.13	67.353	606.18
		4	2.037	-10.25	2.466	75.70	154.201	1580.56
		Total→						-0.018

5. 結 論

有限要素法에 의한 鐵筋콘크리트 平面樑대構造物의 非線型 數值解析法을 提示하였다. 이 方法에 의하면 힘에 의해 破壞되는 鐵筋콘크리트 平面樑대構造物의 彈性, 非彈性 및 極限荷重領域을 통한 應答에 대한 精確한 數值解를 얻을수 있다. 本研究를 통해 개발된 電算프로그램은 이들 構造物의 設計에 有用하게 쓰일 수 있으리라 본다.

參 考 文 獻

1. Scordelis, A.C., "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures," *Proceedings of the Specialty Conference on Finite Element Methods in Civil Engineering*, Montreal, June 1972.
2. Hognestad, E., "A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members," *University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin Series No. 399, Bulletin No. 1*, November 1951.
3. Kang, Y.J., "Nonlinear Geometric, Material and

Time Dependent Analysis of Reinforced and Prostressed Concrete Frames," *Thesis presented to the University of California, Berkeley, California*, in 1976, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Civil Engineering

4. Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science," McGraw-Hill Publishing Company, London, 1971.
5. Bresler, B., and Scordelis, A.C., "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams," *Series 100, Issue 13, Structures and Materials Research, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley*, June 1961.
6. Bresler, B. and Scordelis, A.C., "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams," *ACI Journal, Proc. Vol. 60, No. 1*, January 1963.
7. Lin, C.S., "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs and Shells," *Ph. D. Dissertation, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, UC-SESM Report No. 73-7*, April 1973.

(接受 1983.11.29)